1
Le origini

1. Il concetto di numero - 2. Basi numeriche primitive - 3. Il linguaggio dei numeri e le origini del calcolo - 4. Le origini della geometria - Bibliografia.

1 I matematici del XX secolo svolgono un'attività intellettuale altamente sofisticata, difficile da definire; ma gran parte di ciò che oggi va sotto il nome di matematica è il risultato di uno sviluppo di pensiero che originariamente era accentrato attorno ai concetti di numero, grandezza e forma. Le vecchie definizioni della matematica come quella di "scienza del numero e della grandezza" non sono più valide; tuttavia esse indicano le origini delle varie branche della matematica. Le nozioni originarie collegate ai concetti di numero, grandezza e forma si possono far risalire alle epoche più antiche in cui visse l'uomo e vaghi accenni a nozioni matematiche si possono vedere adombrati in forme di vita che forse hanno anticipato il genere umano di parecchi milioni di anni. Darwin in *Descent of man* (*L'origine della specie*) (1871) notò che certi animali superiori posseggono capacità come la memoria e l'immaginazione, e oggi è ancor più evidente che le capacità di distinguere il numero, la dimensione, l'ordine e la forma — rudimenti di un istinto matematico — non sono proprietà esclusiva del genere umano. Esperimenti effettuati con corvi, per esempio, hanno mostrato che almeno certi uccelli sono in grado di distinguere insiemi contenenti fino a quattro elementi[1]. In numerose forme inferiori di vita è chiaramente presente una consapevolezza delle differenze esistenti in strutture che si trovano nel loro ambiente, e ciò è affine all'interesse del matematico per la forma e la relazione.

Un tempo si pensava che la matematica avesse direttamente a che fare con il mondo della nostra esperienza sensibile; fu solo nel XIX secolo che la matematica pura si liberò dalle limitazioni imposte dalla osser-

---

[1] Vedi LEVI CONANT, *The Number Concept. Its Origin and Development*, 1923. Cfr. H. KALMUS, "Animals as Mathematicians", *Nature*, 202, 1964, pp. 1156-1160.

vazione della natura. È chiaro che originariamente la matematica nacque come un aspetto della vita quotidiana dell'uomo; e se è valido il principio biologico della "sopravvivenza del più adatto", la durata del genere umano probabilmente non è del tutto priva di rapporto con lo sviluppo di concetti matematici nell'uomo. In un primo tempo le nozioni primitive di numero, grandezza e forma facevano, forse, riferimento più a contrasti che non a somiglianze: la differenza tra un solo lupo e molti lupi, la disuguaglianza di dimensioni tra un pesciolino e una balena, la dissomiglianza tra la rotondità della Luna e la rettilinearità di un pino. Gradualmente deve essere emersa, dal disorientamento di esperienze caotiche, la consapevolezza che esistono somiglianze: e da questa consapevolezza di somiglianze di numero e di forma trassero origine tanto la scienza della natura quanto la matematica. Le differenze stesse sembrano rinviare a somiglianze: infatti, il contrasto tra un solo lupo e molti lupi, tra una pecora e un gregge, tra un albero e una foresta suggerisce che un lupo, una pecora e un albero hanno qualcosa in comune: la loro unicità. Nella stessa maniera si sarebbe osservato che certi altri gruppi, come le coppie, possono essere messi in corrispondenza biunivoca. Le mani possono essere appaiate con i piedi, con gli occhi, con le orecchie o con le narici. Questo riconoscimento di una proprietà astratta che certi gruppi hanno in comune, e che chiamiamo numero, rappresenta un grande passo verso la matematica moderna. È inverosimile che tale riconoscimento sia stato dovuto alla scoperta di un singolo individuo o di una singola tribù: si trattò più probabilmente di una consapevolezza graduale che si è forse sviluppata a uno stadio altrettanto primitivo dello sviluppo culturale dell'uomo quanto lo fu l'uso del fuoco, forse circa 300.000 anni fa. Che lo sviluppo del concetto di numero sia stato un processo lungo e graduale, è indicato dal fatto che alcune lingue, come il greco, hanno conservato nella loro grammatica una distinzione tripartita tra uno, due e più di due, mentre la maggior parte delle lingue moderne fanno soltanto una distinzione di "numero" bipartita tra il singolare e il plurale. Evidentemente i nostri più antichi antenati in un primo tempo contavano soltanto fino a due, indicando con "molti" qualsiasi insieme superiore. Ancor oggi molti popoli primitivi continuano a contare gli oggetti disponendoli in gruppi di due.

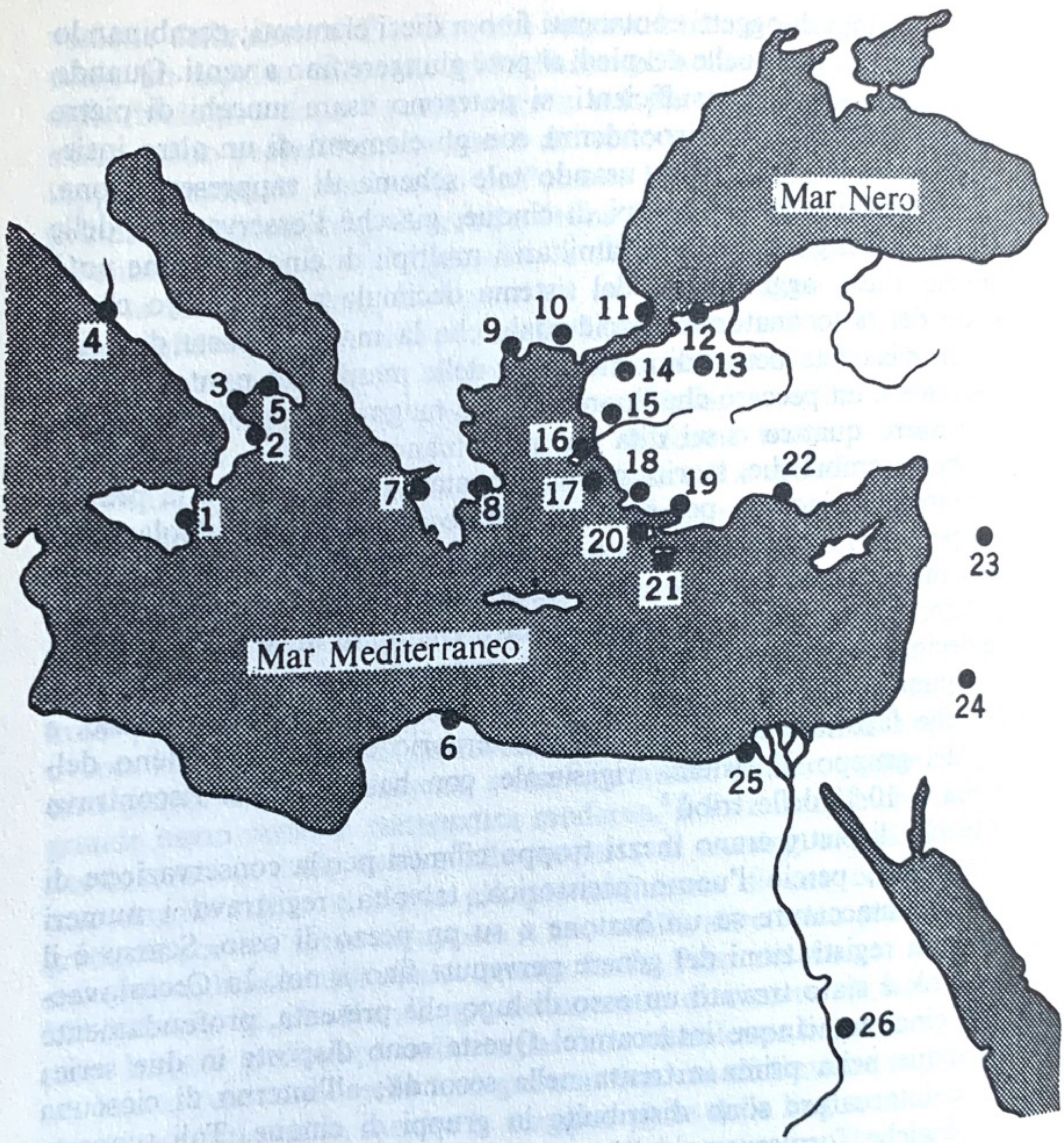
2 La consapevolezza del numero diventò alla fine sufficientemente estesa e viva da far nascere il bisogno di esprimere tale proprietà in qualche modo. Dapprima presumibilmente si utilizzò soltanto un linguaggio di segni. Le dita di una mano poterono facilmente venire usate per indicare un insieme di due o tre o quattro o cinque oggetti, mentre il numero uno in un primo momento non venne generalmente riconosciuto come vero "numero". Usando le dita di entrambe le mani si poterono rappresentare gruppi di oggetti contenenti fino a dieci elementi; combinando le dita delle mani con quelle dei piedi si potè giungere fino a venti. Quando le dita si dimostrarono insufficienti, si poterono usare mucchi di pietre per rappresentare una corrispondenza con gli elementi di un altro insieme. Spesso l'uomo primitivo, usando tale schema di rappresentazione, ammucchiava le pietre in gruppi di cinque, giacché l'osservazione delle mani e dei piedi gli aveva reso familiari i multipli di cinque. Come notò Aristotele, l'uso, oggi diffuso, del sistema decimale non fu altro che il risultato del fatto anatomico accidentale che la maggior parte di noi è nata con dieci dita dei piedi e dieci dita delle mani. Dal punto di vista matematico è un peccato che l'uomo di Cro-magnon e i suoi discendenti non avessero quattro o sei dita per ogni mano.

Sebbene sembri che, storicamente, il contare con le dita, o la pratica di contare per cinque e per dieci sia venuto più tardi del calcolare per due e per tre, i sistemi quinario e decimale quasi sempre rimpiazzarono gli schemi binario e ternario. Uno studio di parecchie centinaia di tribù di indiani d'America, per esempio, mostrò che quasi un terzo usava una base decimale e che circa un altro terzo aveva adottato un sistema quinario o quinario-decimale; meno di un terzo aveva un sistema binario, e quelli che facevano uso di un sistema ternario costituivano meno dell'1 % del gruppo. Il sistema vigesimale, con base venti, si riscontrava in circa il 10 % delle tribù[2].

Mucchi di pietre erano mezzi troppo effimeri per la conservazione di informazioni; perciò l'uomo preistorico, talvolta, registrava i numeri incidendo intaccature su un bastone o su un pezzo di osso. Scarso è il numero di registrazioni del genere pervenute fino a noi. In Cecoslovacchia, però, è stato trovato un osso di lupo che presenta, profondamente incise, cinquantacinque intaccature. Queste sono disposte in due serie: venticinque nella prima e trenta nella seconda; all'interno di ciascuna serie le intaccature sono distribuite in gruppi di cinque. Tali scoperte archeologiche forniscono una prova del fatto che l'idea di numero è molto più antica di progressi tecnologici quali l'uso di metalli o la costruzione di veicoli a ruote. Tale idea precede la nascita della civiltà e della scrittura, nel senso usuale del termine: ci sono infatti pervenuti resti archeologici dotati di significato numerico, come l'osso testè descritto, che appartengono a un periodo risalente a circa 30.000 anni fa. Ulteriori testimonianze concernenti i più antichi concetti dell'uomo intorno al numero si possono riscontrare nella lingua inglese odierna. A quanto pare, le parole *eleven* e *twelve* significavano originariamente "uno in più" e "due in più"; ciò indica che il prevalere del concetto

---

[2] W.C. EELS, "Number Systems of North American Indians", *American Mathematical Monthly*, 20, 1913, p. 293. Cfr. anche D.J. STRUIK, "Stone Age Mathematics", *Scientific American*, 179, Dicembre 1948, pp. 44-49.



Centri matematici dell'antichità classica
1. Siracusa (Archimede) - 2. Crotone (Pitagora) - 3. Elea (Parmenide, Zenone) - 4. Roma (Boezio) - 5. Taranto (Pitagora, Archita, [Filolao?]) - 6. Cirene (Teodoro, Eratostene) - 7. Elide (Ippia) - 8. Atene (Platone, Teeteto) - 9. Stagira (Aristotele) - 10. Abdera (Democrito) - 11. Bisanzio (Proclo) - 12. Calcedonia (Senocrate) - 13. Nicea (Ipparco) - 14. Cizico (Callippo) - 15. Pergamo (Apollonio) - 16. Chio (Ippocrate) - 17. Samo (Pitagora, Conone, Aristarco) - 18. Smirne (Teone) - 19. Mileto (Talete) - 20. Cnido (Eudosso) 21. Rodi (Eudemo, Gemino) - 22. Perge (Apollonio) - 23. Calcide (Giamblico) - 24. Gerasa (Nicomaco) - 25. Alessandria (Euclide, Erone, Tolomeo, Pappo, Menelao e altri) - 26. Siene (Eratostene).

decimale risale a un'epoca molto antica. Tuttavia è stata avanzata l'ipotesi che forse la parola indo-europea che sta a indicare otto sia derivata da una forma duale usata per indicare quattro, e che la parola latina *novem*, che significa nove, vada forse collegata con *novus* (nuovo), nel senso che era l'inizio di una nuova serie. Parole del genere possono forse venire interpretate come indicanti la persistenza per un certo periodo di una scala quaternaria o ottonaria, così come la parola francese *quatre-vingt* usata tutt'oggi sembra essere il residuo di un sistema vigesimale.

3 L'uomo si differenzia dagli altri animali soprattutto per l'uso del linguaggio. Lo sviluppo di quest'ultimo ha avuto una importanza essenziale per il sorgere del pensiero matematico astratto: tuttavia le parole che esprimono concetti numerici si vennero formando con relativa lentezza. *Segni* numerici probabilmente precedettero le *parole* che indicavano numeri; è infatti più facile praticare incisioni in un bastone che formulare una frase ben costruita per indicare un numero. Se il problema del linguaggio non fosse stato così difficile, avrebbero avuto maggiori possibilità di farsi strada sistemi alternativi rispetto a quello decimale. La base cinque, per esempio, fu una delle più antiche a lasciare dietro di sé tangibili testimonianze scritte; ma prima che il linguaggio diventasse formalizzato, la base dieci aveva avuto il sopravvento. Le lingue moderne sono costruite, quasi senza eccezione, in base dieci: così il numero tredici, per esempio, non viene descritto come tre più cinque più cinque, ma come tre più dieci. Quanto sia stata lenta la formazione di un linguaggio che esprimesse astrazioni quali il numero, si deduce anche dal fatto che le espressioni numeriche verbali primitive facevano sempre riferimento a specifiche raccolte concrete — come "due pesci" o "due bastoni" — e che solo più tardi una espressione del genere fu adottata convenzionalmente per indicare tutti gli insiemi di due oggetti. In parecchie delle attuali misure di lunghezza si riscontra la tendenza del linguaggio a evolversi da forme concrete verso forme astratte. L'altezza di un cavallo è misurata in "mani", e le parole "piede" e "braccio" sono analogamente derivate da parti del corpo.

Le parecchie migliaia di anni che furono necessarie all'uomo per ricavare concetti astratti da ripetute situazioni concrete testimonia le difficoltà che indubbiamente si incontrarono nella costruzione di basi anche molto primitive della matematica. Per di più, vi sono molte questioni irrisolte circa le origini della matematica. Si suppone solitamente che la matematica sia sorta in risposta a bisogni pratici dell'uomo, ma ricerche antropologiche suggeriscono la possibilità di una origine diversa. È stata avanzata l'ipotesi[3] che l'arte del contare sia sorta in connessione

[3] Vedi A. Seidenberg, "The Ritual Origin of Counting", *Archive for History of Exact Sciences*, 2, 1962, pp. 1-40.

con riti religiosi primitivi, e che l'aspetto ordinale abbia preceduto il concetto quantitativo. In cerimonie rituali che rappresentavano miti della creazione era necessario chiamare in scena i partecipanti secondo un ordine specifico, e forse il contare fu inventato per rispondere a questa esigenza. Se le teorie sull'origine rituale del contare sono corrette, può darsi che il concetto di numero ordinale abbia preceduto quello di numero cardinale. Inoltre un'origine del genere tenderebbe a indicare la possibilità che unica sia stata l'origine del contare, diffusosi in seguito ad altre regioni della Terra. Questa teoria, sebbene non abbia ancora trovato una conferma definitiva, si accorderebbe con la divisione rituale dei numeri interi in dispari e pari, i primi considerati come maschili e i secondi come femminili. Simili distinzioni erano familiari a civiltà fiorite in tutti gli angoli della Terra, e miti riguardanti i numeri maschili e femminili hanno presentato una notevole continuità.

Il concetto di numero intero è uno dei più antichi concetti matematici, e le sue origini sono avvolte nelle nebbie della preistoria. La nozione di frazione razionale, però, si sviluppò relativamente tardi e in generale non era in stretto rapporto con i sistemi numerici ideati dall'uomo per i numeri interi. Sembra che le tribù primitive non avessero virtualmente alcun bisogno di frazioni. Per le necessità pratiche connesse con la quantità l'uomo primitivo poteva scegliere unità sufficientemente piccole da rendere superfluo l'uso di frazioni. Pertanto non vi fu una evoluzione coerente dalle frazioni binarie alle frazioni quinarie e decimali: i sistemi decimali furono essenzialmente il prodotto della matematica dell'età moderna piuttosto che di quella del periodo antico.

4 Le asserzioni circa le origini della matematica, che si tratti sia dell'aritmetica sia della geometria, sono necessariamente arrischiate, giacché gli inizi di questa disciplina sono più antichi della scrittura stessa. È solo nel corso degli ultimi sei millenni di un periodo durato forse migliaia di millenni che l'uomo è riuscito a mettere in forma scritta i suoi documenti e i suoi pensieri. Per i dati concernenti l'età preistorica, dobbiamo dipendere da interpretazioni basate sui pochi resti archeologici conservati, sulle testimonianze fornite dall'attuale antropologia, e su congetture estrapolate dai documenti pervenutici. Erodoto e Aristotele erano poco inclini a far risalire le origini della matematica a un'epoca più antica della civiltà egiziana, ma è chiaro che la geometria che essi avevano in mente aveva radici più antiche. Erodoto sosteneva che la geometria avesse avuto origine in Egitto; riteneva infatti che tale disciplina fosse sorta in quella regione per rispondere al bisogno pratico di misurare le terre dopo le periodiche inondazioni del Nilo. Aristotele era dell'opinione che fosse stata l'esistenza in Egitto di una classe agiata di sacerdoti a stimolare lo studio della geometria. Possiamo considerare i punti di vista di Erodoto e di Aristotele come rappresentativi delle due opposte teorie sugli inizi della matematica, l'una che ne vede le origini nelle necessità pratiche, l'altra nell'agiatezza e nelle cerimonie rituali della classe sacerdotale. Il fatto che i geometri egiziani venissero talvolta indicati con il nome di "tenditori di corde" (o agrimensori) può essere invocato a sostegno sia dell'una sia dell'altra teoria: infatti le corde venivano indubbiamente usate tanto per tracciare la pianta dei templi quanto per ridefinire i confini cancellati dall'inondazione. Non possiamo contrapporci con solidi argomenti né a Erodoto né ad Aristotele in merito ai motivi che hanno portato al sorgere della matematica; ma è fuori dubbio che entrambi sottovalutavano l'antichità di questa disciplina. L'uomo dell'età neolitica poteva avere scarsa agiatezza e scarso bisogno di misurare terre, nondimeno i suoi graffiti e disegni manifestano un interesse per le relazioni spaziali che preparò la strada alla geometria. Terraglie, tessuti e cesti presentano esempi di congruenza e di simmetria, ossia di concetti che essenzialmente fanno parte della geometria elementare. Inoltre, semplici serie di disegni, come quella rappresentata nella figura 1.1, suggeriscono l'idea di una sorta di teoria dei gruppi allo stato concreto, oltre a illustrare alcune preposizioni di geometria e di aritmetica.

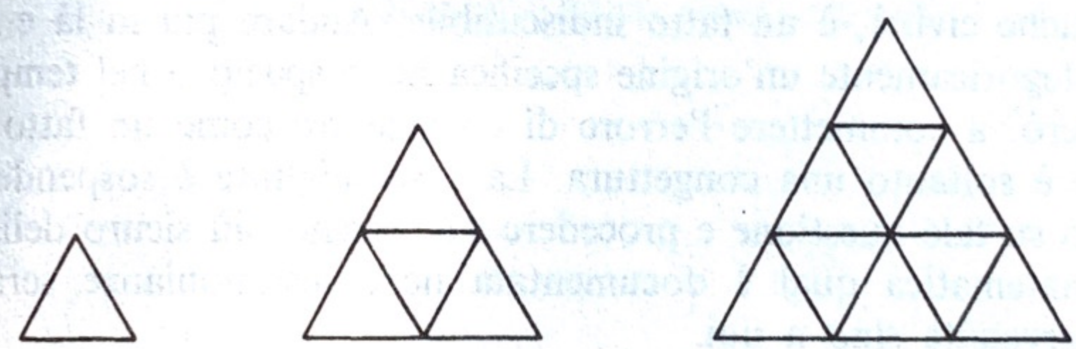


Fig. 1.1

Il disegno rende immediatamente evidente che le aree dei triangoli stanno tra loro come le aree dei quadrati costruiti su uno dei loro lati, oppure, attraverso il conteggio, che le somme di numeri dispari consecutivi, a partire dall'unità, sono quadrati perfetti. Del periodo preistorico non abbiamo nessuna documentazione: pertanto è impossibile seguire l'evoluzione della matematica da un disegno specifico a un teorema familiare. Le idee però sono simili a spore durature: talvolta la presunta origine di un concetto non è altro che la ricomparsa di un'idea molto più antica che era rimasta assopita.

Può darsi che l'interesse dell'uomo preistorico per concezioni e relazioni spaziali sia stato originato dal suo senso estetico e dal piacere provato per la bellezza della forma, motivi che spesso stimolano anche i matematici del nostro tempo. Ci piacerebbe pensare che almeno alcuni dei primi geometri svolgessero il loro lavoro per la pura gioia di fare della matematica, piuttosto che per usarla come strumento pratico nelle misurazioni. Ma vi sono altre ipotesi alternative. Una di queste è che la geometria, come il contare, abbia avuto origine in pratiche rituali primitive. I più antichi risultati geometrici ottenuti in India sono rappresentati da quelli che venivano chiamati *Sulvasutras*, o "regole della corda"; erano semplici relazioni utilizzate, a quanto pare, nella costruzione di altari e di templi. Si ritiene comunemente che la motivazione geometrica dei "tenditori di corde" dell'Egitto avesse una natura più pratica di quella dei loro colleghi indiani. È stata però avanzata l'ipotesi[4] che tanto la geometria indiana quanto quella egiziana possano aver avuto un'unica origine: una protogeometria collegata con riti primitivi, pressappoco allo stesso modo in cui la scienza si sviluppò a partire dalla mitologia e la filosofia a partire dalla teologia. Va tenuto presente che la teoria dell'origine della geometria in una secolarizzazione di pratiche rituali non ha ancora trovato nessuna conferma definitiva. Può anche darsi che lo sviluppo della geometria sia stato stimolato dal bisogno pratico di costruire edifici e di misurare terre, oppure da un senso estetico per il disegno e l'ordine. Possiamo fare congetture circa ciò che avrebbe spinto gli uomini dell'età della pietra a contare, a misurare e a disegnare, ma che gli inizi della matematica risalgono a un'epoca anteriore alle più antiche civiltà, è un fatto indiscutibile. Andare più in là e identificare categoricamente un'origine specifica nello spazio o nel tempo equivale, però, a commettere l'errore di considerare come un fatto storico ciò che è soltanto una congettura. La cosa migliore è sospendere ogni giudizio su tale questione e procedere sul terreno più sicuro della storia della matematica qual è documentata nelle testimonianze scritte che sono pervenute sino a noi.

Bibliografia

CONANT LEVI, *The Number Concept. Its Origin and Development*, Macmillan, New York, 1923.

EELS W.C., "Number Systems of North American Indians", in *American Mathematical Monthly*, **20,** 1913, p. 293.

KALMUS H., "Animals as Mathematicians", in *Nature*, **202,** 1964, pp. 1156-1160.

MENNINGER K., *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2ª ed., Vandenhoeck & Ruprecht, Gottinga, 1957-1958, 2 voll.

SEIDENBERG A., "The Ritual Origin of Geometry", in *Archive for History of Exact Sciences*, **1,** 1962, pp. 488-527.

SEIDENBERG A., "The Ritual Origin of Counting", in *Archive for History of Exact Sciences*, **2,** 1962, pp. 1-40.

SMELTZER D., *Man and Number*, Emerson Books, New York, 1958.

SMITH D.E., *History of Mathematics*, Ginn, Boston, 1923-1925, 2 voll., e Dover, New York, 1958.

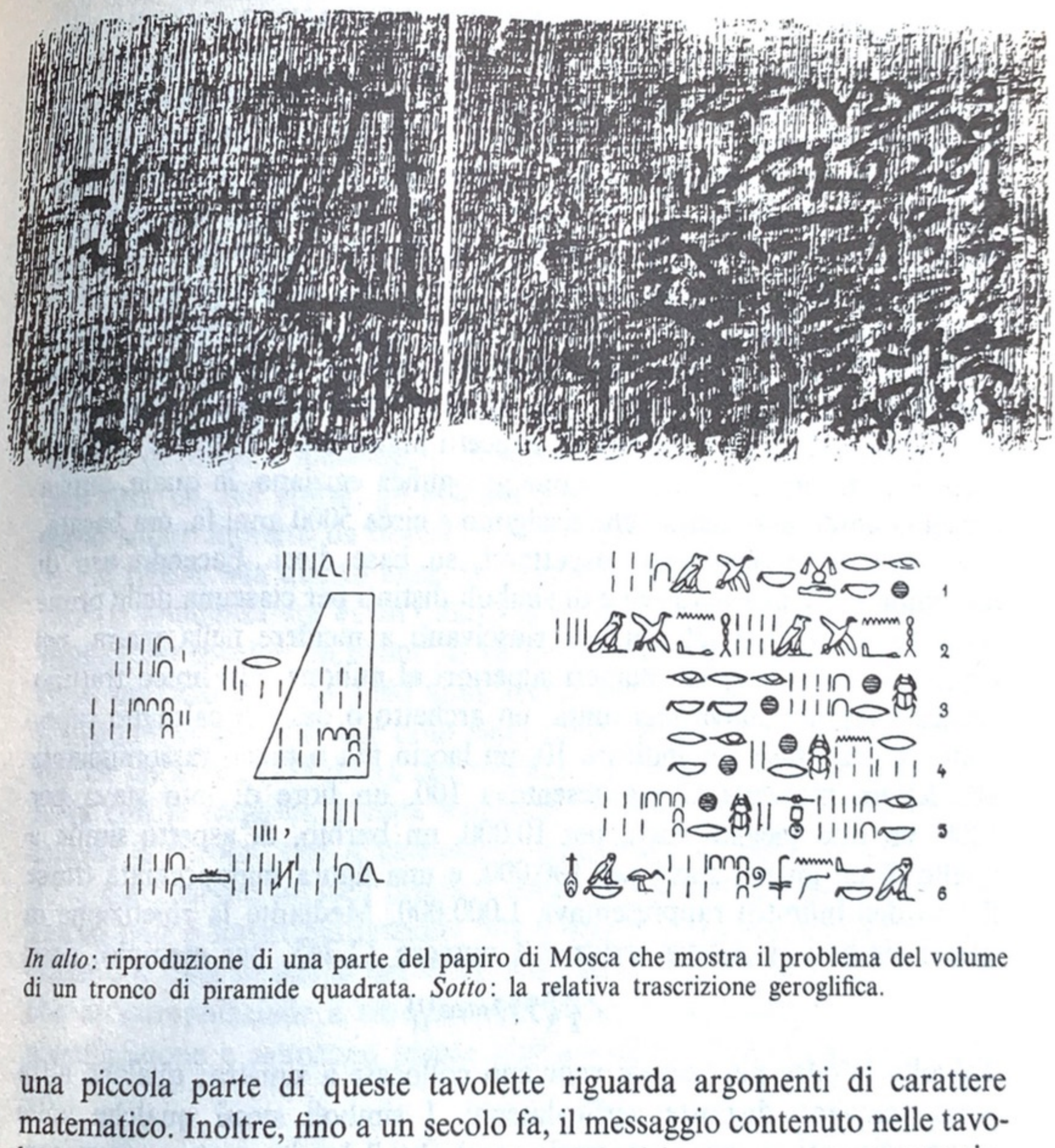
SMITH D.E. e GINSBURG J., *Numbers and Numerals*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1958.

STRUIK D.J., "Stone Age Mathematics", in *Scientific American*, **179,** dicembre 1948, pp. 44-49.

2
L'Egitto

1. I documenti più antichi - 2. La notazione geroglifica - 3. Il papiro di Ahmes - 4. Frazioni con numeratore uno - 5. Operazioni aritmetiche - 6. Problemi algebrici - 7. Problemi geometrici - 8. Un rapporto trigonometrico - 9. Il papiro di Mosca - 10. I punti deboli della matematica egiziana - Bibliografia.

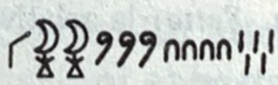
1 È abitudine dividere la storia del genere umano in ere e periodi, con particolare riferimento al livello e alle caratteristiche della cultura. Tali divisioni sono utili, sebbene si debba sempre tenere presente che esse sono soltanto schematizzazioni arbitrariamente imposte per nostra convenienza e che le separazioni temporali da esse indicate non sono abissi incolmabili. L'Età della Pietra, un lungo periodo precedente l'impiego dei metalli, non finì in modo improvviso; di fatto, il tipo di cultura che essa rappresentava ebbe termine in Europa molto più tardi che in certe parti dell'Asia e dell'Africa. Il sorgere di civiltà caratterizzate dall'impiego dei metalli ebbe luogo dapprima in vallate attraversate da fiumi, come l'Egitto, la Mesopotamia, l'India e la Cina; pertanto indicheremo la parte più antica di tale periodo storico come lo "stadio potamico". Le testimonianze relative alle civiltà fiorite nelle vallate dei fiumi Indo e Yangtzechiang non sono molto attendibili dal punto di vista cronologico, ma si hanno informazioni abbastanza degne di fede sulle popolazioni che vissero lungo il Nilo e nella "fertile mezzaluna" compresa tra i fiumi Tigri ed Eufrate. Prima della fine del IV millennio a.C. una forma primitiva di scrittura era in uso sia nella Mesopotamia sia nella vallata del Nilo. In queste regioni le primitive testimonianze ideografiche, attraverso un costante processo di convenzionalizzazione, evolsero verso una disposizione lineare di simboli più semplici. In Mesopotamia, dove l'argilla era abbondante, segni a forma di cuneo venivano impressi con uno stiletto su tavolette di argilla fresca, che venivano poi indurite mediante cottura in forni o con il calore del sole. Questo tipo di scrittura è noto con il nome di scrittura cuneiforme (dalla parola latina *cuneus*), a causa della forma dei singoli segni impressi. Il significato che la scrittura cuneiforme intendeva comunicare era determinato dal modo in cui erano disposte le impronte a forma di cuneo. I documenti cuneiformi possedevano caratteristiche per cui potevano essere conservate a lungo; pertanto ci sono pervenute parecchie migliaia di tavolette del genere, molte delle quali risalenti a circa 4000 anni fa. Naturalmente, soltanto



In alto: riproduzione di una parte del papiro di Mosca che mostra il problema del volume di un tronco di piramide quadrata. *Sotto*: la relativa trascrizione geroglifica.

una piccola parte di queste tavolette riguarda argomenti di carattere matematico. Inoltre, fino a un secolo fa, il messaggio contenuto nelle tavolette cuneiformi era rimasto sconosciuto perché nessuno era ancora riuscito a decifrare tale scrittura. Negli anni 1870 furono fatti progressi significativi nella lettura della scrittura cuneiforme in seguito alla scoperta che la Roccia di Behistun presentava una narrazione trilingue della vittoria di Dario su Cambise: le iscrizioni erano redatte in persiano, in elamitico e in babilonese. La conoscenza del persiano successivamente fornì una chiave per la lettura dell'assiro, una lingua che aveva stretti rapporti con il babilonese antico. Ma anche dopo questa importante scoperta, la decifrazione e l'analisi delle tavolette di contenuto matematico procedette lentamente, e fu soltanto nel secondo quarto del XX secolo che si raggiunse un'apprezzabile conoscenza dei contributi matematici mesopotamici, in gran parte grazie alle ricerche pionieristiche di Thureau-Dangin in Francia e di Otto Neugebauer in Germania e in America[1].

2 I documenti redatti in scrittura egiziana avevano avuto, nel frattempo, migliore fortuna di quelli babilonesi. La Pietra di Rosetta, che, redatta in tre lingue, svolse un ruolo simile a quello della Roccia di Behistun, era stata scoperta nel 1799 nel corso della spedizione napoleonica. Questa larga tavoletta, trovata a Rosetta, un antico porto vicino ad Alessandria, conteneva un messaggio in tre scritture: greca, demotica e geroglifica. Basandosi sulla conoscenza del greco, Champollion in Francia e Thomas Young in Inghilterra fecero rapidi progressi nella decifrazione dei geroglifici egiziani (ossia, delle "incisioni sacre"). Fu così possibile leggere le iscrizioni sulle tombe e sui monumenti egiziani, anche se documenti relativi a cerimonie del genere non costituivano la migliore fonte d'informazione per quanto concerne i concetti matematici. Tuttavia fu facile svelare il mistero della numerazione geroglifica egiziana, la quale, antica almeno quanto le piramidi, che risalgono a circa 5000 anni fa, era basata, come potremmo facilmente aspettarci, su base dieci. Facendo uso di un semplice schema iterativo e di simboli distinti per ciascuna delle prime sei potenze di dieci, gli egiziani riuscivano a incidere nella pietra, nel legno e in altri materiali numeri superiori al milione. Un unico trattino verticale rappresentava una unità, un archetto o osso di calcagno capovolto veniva usato per indicare 10, un laccio più o meno rassomigliante alla lettera maiscola C rappresentava 100, un fiore di loto stava per 1000, un dito piegato stava per 10.000, un barbio, di aspetto simile a quello di un girino, stava per 100.000, e una figura inginocchiata (forse il Dio dell'Infinito) rappresentava 1.000.000. Mediante la ripetizione di questi simboli si poteva scrivere il numero 12.345, per esempio, così:



Talvolta le cifre più piccole venivano collocate a sinistra; qualche altra volta venivano disposte verticalmente. I simboli stessi qualche volta erano orientati in senso contrario, così che il laccio poteva essere convesso verso destra o verso sinistra.

Le iscrizioni egiziane documentano l'uso di grandi numeri fin da una epoca molto antica. Un museo di Oxford possiede una mazza reale che risale a oltre 5000 anni fa, sulla quale sono registrati 120.000 prigionieri e 1.422.000 capre confiscate[2]. Può darsi che tali cifre siano esagerate,

[1] Si veda, per esempio, O. NEUGEBAUER, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin: Springer, 1934. Per una esposizione più generale si veda, dello stesso autore, *The Exact Sciences in Antiquity*, 1957, tr. ital.: *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano, 1974.

[2] J.E. QUIBELL, *Hierakonpolis*, B. Quaritch, London, 1900. Vedi in particolare la tavola 26B.

tuttavia da altre considerazioni appare chiaro che gli egiziani avevano raggiunto un elevato grado di esattezza nel contare e nel misurare. Le piramidi mostrano una tale precisione nella costruzione e nel modo in cui sono orientate che intorno ad esse sono fiorite leggende dotate, tuttavia, di scarsi fondamenti. L'ipotesi, per esempio, che il rapporto tra il perimetro della base e l'altezza della Grande Piramide di Khufu o Cheope fosse stato consapevolmente stabilito in 2π è chiaramente in contraddizione con le nostre conoscenze sulla geometria degli egiziani[3]. Nondimeno, le piramidi e i cunicoli all'interno di esse hanno un orientamento così preciso che si sono fatti tentativi per determinare la loro età sulla base della variazione della posizione della stella polare.

Gli egiziani si erano interessati all'astronomia fin da tempi molto antichi e avevano osservato che lo straripamento annuale del Nilo aveva luogo quando Sirio, la stella della Costellazione del Cane, sorgeva a Est poco prima del Sole. In base alla constatazione che queste levate eliache di Sirio, il messaggero dello straripamento, erano separate l'una dall'altra da 365 giorni, gli egiziani costruirono un soddisfacente calendario solare formato da dodici mesi di trenta giorni ciascuno più cinque giorni festivi. Ma questo anno civile era più corto dell'anno solare effettivo: la differenza era di un quarto di giorno. Di conseguenza le stagioni risultavano spostate in avanti di un giorno ogni quattro anni fino a che, dopo un ciclo di circa 1460 anni, tornavano a coincidere di nuovo con il calendario. Siccome ci è noto dalla testimonianza di Censorino, autore del *De die natali* (238 d.C.), che nell'anno 139 d.C. il calendario si accordava con le stagioni, è stata avanzata l'ipotesi, basata su una estrapolazione a ritroso, che il calendario fosse stato istituito nell'anno 4241 a.C., esattamente tre cicli prima. Calcoli più precisi (basati sul fatto che l'anno non è lungo esattamente 365 giorni e $\frac{1}{4}$) hanno portato a modificare tale data in quella del 4228. Altri studiosi però sono dell'opinione che un'estrapolazione a ritroso che vada al di là di due cicli non trova giustificazione e avanzano invece l'ipotesi di un'origine intorno al 2773 a.C.

3 Le informazioni matematiche che si possono inferire dalle pietre tombali e dai calendari sono limitate, e il quadro dei contributi egiziani che ne possiamo trarre sarebbe estremamente frammentario se dovessimo dipendere soltanto da documenti di carattere cerimoniale e astronomico. La matematica non si riduce al contare e misurare, ossia agli aspetti generalmente documentati dalle iscrizioni geroglifiche. Fortunatamente possediamo altre fonti di informazione. Esistono numerosi papiri egiziani che in un modo o nell'altro sono sopravvissuti alle ingiurie

[3] N.F. Wheeler, "Pyramids and Their Purpose", *Antiquity*, 9. 1935, pp. 5-21, 161-189, 292-304.

del tempo per un periodo di tre millenni e mezzo. Il più esteso, fra quelli di natura matematica, è un papiro largo circa 30 cm e lungo circa 5,46 m, che si trova ora al British Museum (a eccezione di pochi frammenti conservati nel Museo di Brooklyn). Era stato acquistato nel 1858 in una città balneare sul Nilo da un antiquario scozzese, Henry Rhind, e perciò è conosciuto spesso sotto il nome di Papiro di Rhind o, meno frequentemente, di Papiro di Ahmes in onore dello scriba che lo aveva trascritto verso il 1650 a.C.[4]. Lo scriba ci informa che il contenuto è tratto da un esemplare risalente al Regno Medio e composto fra il 2000 e il 1800 a.C. È possibile che alcune delle nozioni che esso contiene risalgano addirittura a Imhotep, il leggendario architetto e medico personale del Faraone Zoser, che diresse i lavori di costruzione della sua piramide circa 5000 anni fa. In ogni caso, la matematica egiziana sembra avere attraversato un periodo di stagnazione per circa 2000 anni dopo un inizio abbastanza promettente.

Il contenuto del Papiro di Rhind non è scritto nei caratteri geroglifici descritti sopra, ma in una scrittura più agile, meglio adatta all'impiego di penna e inchiostro su fogli di papiro e nota come scrittura ieratica (ossia "sacra", per distinguerla dalla scrittura demotica o popolare, di epoca ancor più tarda). La numerazione rimane decimale, ma il tedioso principio ripetitivo della numerazione geroglifica è stato sostituito con l'introduzione di cifre o segni speciali per rappresentare i numeri da 1 a 9 e i multipli delle potenze di 10. Quattro, per esempio, non viene più rappresentato con quattro trattini verticali, ma da una lineetta orizzontale; e sette non viene scritto nella forma di sette trattini, ma come una unica cifra ʔ simile a una falce. Nella scrittura geroglifica il numero ventotto era scritto così ∩∩||||||||, ma nella scrittura ieratica è semplicemente =⊼. Si noti che il segno =, che indica otto unità (due volte quattro) compare alla sinistra e non alla destra. Il principio della scrittura in cifre, introdotto dagli egiziani circa 4000 anni fa e usato nel Papiro di Rhind, rappresentava un importante contributo alla elaborazione di un sistema di numerazione, ed è uno dei fattori che resero possibile l'efficace sistema oggi in uso.

4 Gli uomini dell'Età della Pietra non conoscevano l'uso delle frazioni, ma con l'avvento di culture più avanzate nell'Età del Bronzo si resero necessari il concetto di frazione e le notazioni frazionarie. Le iscrizioni geroglifiche egiziane presentano una notazione speciale per le fra-

---

[4] Vi sono due buone edizioni inglesi, una curata da T.E. Peet e pubblicata a Londra nel 1923, l'altra curata da A.B. Chance e altri e pubblicata in due volumi a Oberlin, Ohio, nel 1927-1929. Il volume I di quest'ultima contiene un'ampia esposizione generale della matematica egiziana scritta da R.C. Archibald, una traduzione con commento del papiro di Ahmes, e una bibliografia molto ampia di articoli sulla matematica egiziana.

zioni aventi come numeratore l'unità. Il numero reciproco di un qualsiasi intero veniva indicato semplicemente collocando al di sopra della notazione per il numero intero un segno ovale allungato. La frazione $\frac{1}{8}$ appariva così , e $\frac{1}{20}$ veniva scritto così . Nella notazione ieratica dei papiri, l'ovale allungato viene sostituito con un puntino, collocato al di sopra della cifra rappresentante il numero intero corrispondente (oppure al di sopra della cifra di destra nel caso del reciproco di un numero di più cifre). Nel Papiro di Ahmes, per esempio, la frazione $\frac{1}{8}$ appare come , e $\frac{1}{20}$ è scritto nella forma . Tali frazioni venivano comunemente usate al tempo di Ahmes, ma il concetto generale di frazione sembra sia rimasto un enigma per gli egiziani. Essi si sentivano a loro agio con la frazione $\frac{2}{3}$, per rappresentare la quale avevano uno speciale segno ieratico ; talvolta usavano segni speciali per rappresentare frazioni della forma $n/(n+1)$, ossia per i complementi delle frazioni con numeratore unitario. Alla frazione $\frac{2}{3}$ gli egiziani assegnavano un ruolo speciale nei procedimenti aritmetici: così, per trovare un terzo di un numero essi ne trovavano prima i due terzi e poi toglievano metà del risultato! Essi conoscevano e sfruttavano il fatto che due terzi della frazione $\dfrac{1}{p}$ è la somma delle due frazioni $\dfrac{1}{2p}$ e $\dfrac{1}{6p}$; erano anche consapevoli del fatto che il doppio della frazione $\dfrac{1}{2p}$ equivale alla frazione $\dfrac{1}{p}$. Tuttavia, sembra che, fatta eccezione per la frazione $\frac{2}{3}$, gli egiziani considerassero una frazione razionale generale della forma $\dfrac{m}{n}$ non come una "cosa" elementare, ma come parte di un processo inconcluso. Mentre oggi concepiamo $\frac{3}{5}$ come una frazione irriducibile, gli scribi egiziani la concepivano come riducibile alla somma delle tre frazioni aventi per numeratore l'unità: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{15}$. Per facilitare la riduzione di frazioni "miste" alla somma di frazioni aventi per numeratore l'unità, il Papiro di Rhind si apre con una tabella che, per tutti i valori dispari di n da 5 a 101, esprime $\dfrac{2}{n}$ come somma di tali frazioni. L'equivalente di $\frac{2}{5}$ viene espresso come $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{15}$; $\frac{2}{11}$ è scritto come $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{66}$; e $\frac{2}{15}$ viene rappresentato con $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{30}$. Nell'ultima riga della tabella la frazione $\frac{2}{101}$ viene decomposta[5] in $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{202}$, $\frac{1}{303}$ e $\frac{1}{606}$. Non sono chiare le ragioni per cui una particolare forma di decomposizione venisse preferita a un'altra fra le

[5] Una lista di scomposizioni in frazioni di $\dfrac{2}{n}$ da $n = 5$ a $n = 101$ è presentata in B.L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, 1961, e in K. VOGEL, *Vorgriechische Mathematik*, vol. I: *Vorgeschichte und Ägypten*, 1958. Una chiara spiegazione delle frazioni egiziane appare anche in O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*. Queste tre opere formano una eccellente esposizione della matematica egiziana.

innumerevoli possibili. Tempo fa venne avanzata l'ipotesi che alcuni dei risultati della tabella delle frazioni della forma $\frac{2}{n}$ fossero stati trovati usando l'equivalente della formula:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

oppure dalla formula:

$$\frac{2}{p\cdot q}=\frac{1}{p\cdot\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{q\cdot\frac{p+q}{2}}.$$

Tuttavia nessuno di questi procedimenti dà la combinazione per $\frac{2}{15}$ che compare nella tabella. Recentemente è stata avanzata l'ipotesi[6] che la scelta nella maggior parte dei casi sia stata dettata dalla preferenza degli egiziani per frazioni derivate dalle frazioni "naturali" $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ mediante dimezzamenti successivi. Così se si vuole esprimere $\frac{2}{15}$ come somma di frazioni aventi per numeratore l'unità, si potrebbe benissimo cominciare togliendo metà di $\frac{1}{15}$ e vedere poi se al risultato, $\frac{1}{30}$, sia possibile aggiungere una frazione avente come numeratore l'unità per formare $\frac{2}{15}$; oppure si potrebbe ricorrere alla nota relazione:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p},$$

per ottenere il medesimo risultato $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$. Un problema nel Papiro di Rhind fa specifico riferimento al secondo metodo per trovare due terzi di $\frac{1}{5}$ e asserisce che si procede in maniera analoga per altre frazioni. Passi come questo indicano che gli egiziani avevano una qualche consapevolezza dell'esistenza di regole e metodi generali al di sopra e al di là del caso specifico da trattare. Questo fatto rappresenta un importante passo in avanti nello sviluppo della matematica. Per la decomposizione di $\frac{2}{5}$ non era adatto il procedimento dei dimezzamenti successivi; ma cominciando con un terzo di $\frac{1}{5}$ si trova la decomposizione data da Ahmes, $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Nel caso di $\frac{2}{7}$ si ricorreva al procedimento dei dimezzamenti successivi applicandolo due volte a $\frac{1}{7}$ per ottenere il risultato $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$; con successive divisioni a metà si otteneva anche la decomposizione di Ahmes $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$. L'ossessione degli egiziani per il procedimento delle successive divisioni a metà e per quello del togliere un terzo è visi-

[6] Vedi NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, cap. IV, paragr. 36.

bile nell'ultima riga della tabella, relativa alla frazione $\frac{2}{n}$ per $n=101$; infatti non è affatto evidente per noi per quale ragione la decomposizione $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot n}$ sia migliore di quella $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$. Forse uno degli obbiettivi della decomposizione delle frazioni della forma $\frac{2}{n}$ era quello di giungere a frazioni aventi per numeratore l'unità che fossero più piccole di $\frac{1}{n}$.

5 La tabella delle frazioni della forma $\frac{2}{n}$ è seguita, nel Papiro di Ahmes, da una breve tabella delle frazioni della forma $\frac{n}{10}$, ove n sta per qualsiasi cifra da 1 a 9: le frazioni vengono espresse anche qui nei termini delle frazioni privilegiate, ossia delle frazioni aventi per numeratore l'unità e della frazione $\frac{2}{3}$. La frazione $\frac{9}{10}$, per esempio, viene scomposta in $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{3}$. Ahmes all'inizio della sua opera assicurava che essa avrebbe fornito uno "studio completo ed esauriente di tutte le cose ... e la conoscenza di tutti i segreti"; la maggior parte del contenuto del papiro, dopo le tabelle delle frazioni di forma $\frac{2}{n}$ e $\frac{n}{10}$, è formata da ottantaquattro problemi di vario genere. I primi sei problemi chiedono di spartire uno, due, sei, sette, otto o nove pagnotte fra dieci uomini: qui lo scriba fa uso della tavola delle frazioni di forma $\frac{n}{10}$ appena data. Nel primo problema lo scriba si preoccupa di mostrare che è corretto dare a ciascuno dei dieci uomini un decimo di una pagnotta! Se un solo uomo riceve $\frac{1}{10}$ di una pagnotta, due uomini ne riceveranno $\frac{2}{10}$ o $\frac{1}{5}$ e quattro uomini ne riceveranno $\frac{2}{5}$, ossia $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Pertanto otto uomini riceveranno $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$ di una pagnotta, ossia $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ e otto uomini più due ne riceveranno $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, ossia un'intera pagnotta. Sembra che Ahmes usasse una sorta di equivalente del nostro minimo comune multiplo, che gli permetteva di completare la prova. Nella spartizione di sette pagnotte fra dieci uomini, lo scriba avrebbe potuto scegliere $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ di una pagnotta per ciascuno, ma la predilezione per $\frac{2}{3}$ lo porta invece alla combinazione di $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{30}$ di pagnotta per ciascuno[7].

L'operazione aritmetica fondamentale usata dagli egiziani era l'addizione: le nostre operazioni di moltiplicazione e divisione venivano eseguite al tempo di Ahmes mediante successivi raddoppi o "duplicazioni".

[7] Per ulteriori particolari si veda R.J. GILLINGS, "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus", *The Mathematics Teacher*, 55, 1962, pp. 61-69.

Il nostro stesso termine di "moltiplicazione" fa pensare, di fatto, al procedimento egiziano. La moltiplicazione, per esempio, di 69 per 19 verrebbe eseguita sommando 69 a se stesso per ottenere 138, sommando poi questo risultato a se stesso per giungere a 276, applicando poi ancora la "duplicazione" per ottenere 552, e poi ancora una volta per ottenere 1104, che è, naturalmente, sedici volte 69. Siccome $19 = 16 + 2 + 1$, il risultato della moltiplicazione di 69 per 19 è $1104 + 138 + 69$, ossia 1311. Talvolta si faceva ricorso anche alla moltiplicazione per dieci: questa era, infatti, una concomitante naturale della notazione geroglifica decimale. Dell'aritmetica egiziana faceva parte anche la moltiplicazione di frazioni aventi l'unità come numeratore. Il problema 13 del Papiro di Ahmes, per esempio, chiede di trovare il prodotto di $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$ per $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; si trova, correttamente, che il risultato è $\frac{1}{8}$. Per la divisione si inverte il procedimento di "duplicazione", e si raddoppia successivamente il *divisore* invece del *moltiplicando*. Che gli egiziani avessero sviluppato un alto grado di maestria nell'applicare il procedimento di "duplicazione" e il concetto di frazione avente per numeratore l'unità, è evidente dai calcoli che accompagnano i problemi di Ahmes. Il problema 70 chiede di trovare il quoziente della divisione di 100 per $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; il risultato, $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$, viene ottenuto nel modo seguente. Raddoppiando successivamente il divisore, otteniamo dapprima $15 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, poi $31 + \frac{1}{2}$, e infine 63, che è otto volte il divisore. Inoltre, si sa che due terzi del divisore è uguale a $5 + \frac{1}{4}$. Pertanto il divisore, se moltiplicato per $8 + 4 + \frac{2}{3}$, darà un totale di $99 + \frac{3}{4}$, che è $\frac{1}{4}$ meno del prodotto 100 che si desidera ottenere. A questo punto veniva introdotto un ingegnoso adattamento. Siccome il divisore moltiplicato per 8 è uguale a 63, ne segue che il divisore, se moltiplicato per $\frac{2}{63}$, darà il prodotto $\frac{1}{4}$. Dalla tabella delle frazioni di forma $\frac{2}{n}$ si sa che $\frac{2}{63}$ è uguale a $\frac{1}{42} + \frac{1}{126}$; pertanto il quoziente desiderato è $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$. Possiamo osservare, tra parentesi, come questo procedimento faccia uso di un principio commutativo della moltiplicazione, con il quale gli egiziani erano evidentemente familiari.

Parecchi fra i problemi di Ahmes mostrano la conoscenza di operazioni su proporzioni equivalenti alla "regola del tre". Il problema 72 chiede di trovare il numero di pagnotte di "forza" 45 che siano equivalenti a 100 pagnotte di "forza" 10, e la soluzione viene data come $\frac{100}{10} \times 45$, ossia 450 pagnotte. Nei problemi concernenti il pane e la birra la "forza" o *pesu* è il reciproco della densità dei chicchi di frumento o di orzo; essa è uguale al quoziente del numero delle pagnotte o delle unità di volume diviso per il numero dei chicchi. Problemi concernenti il pane e la birra sono numerosi nel Papiro di Ahmes. Il problema 63, per esempio, chiede di distribuire 700 pagnotte fra quattro persone in modo che le rispettive porzioni stiano nella proporzione $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. La soluzione viene trovata dividendo 700 per la somma delle frazioni contenute nella proporzione. In questo caso il quoziente di 700 diviso per $1+\frac{3}{4}$ viene trovato moltiplicando 700 per il reciproco del divisore, che è $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$. Il risultato è 400; prendendone $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, si ottengono le porzioni di pane richieste.

6 I problemi egiziani sin qui descritti sono classificabili come problemi aritmetici; ve ne sono altri, però, che rientrano in una classe che è più appropriato chiamare algebrica. Questi problemi non riguardano oggetti concreti specifici, come il pane e la birra, né richiedono operazioni da eseguirsi su numeri noti. Essi chiedono, invece, di trovare l'equivalente di soluzioni di equazioni lineari della forma $x+ax=b$, oppure $x+ax+bx=c$, dove a, b e c sono noti mentre x non lo è. L'incognita viene indicata con il termine di "aha" o mucchio. Il problema 24, per esempio, chiede quale sia il valore del mucchio se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19. La soluzione data da Ahmes non è quella che si trova sui manuali moderni, ma è caratteristica di un procedimento oggi noto come il "metodo di falsa posizione" o la "regola del falso". Si attribuisce al mucchio un valore specifico, che molto probabilmente è un valore falso, e su questo valore assunto si eseguono le operazioni indicate alla sinistra del segno di uguaglianza. Il risultato di queste operazioni viene poi confrontato con il risultato desiderato, e ricorrendo all'uso di proporzioni si trova la risposta esatta. Nel problema 24 il valore attribuito all'incognita è 7, così che $x+\frac{1}{7}x$ è 8, invece della risposta desiderata, che era 19. Siccome $8(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=19$, si deve moltiplicare 7 per $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ per ottenere il mucchio esatto. La soluzione trovata da Ahmes era $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Ahmes "verificava" poi il suo risultato mostrando che se a $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ si aggiungeva un settimo di questo (che era $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$), si otteneva effettivamente 19. Ci troviamo qui di fronte a un altro importante passo avanti nello sviluppo della matematica: infatti la verifica rappresentava una forma semplice di dimostrazione. Sebbene il metodo di falsa posizione venisse usato da Ahmes su scala generale, v'è un problema (il problema 30) in cui la $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$ viene risolta raccogliendo a fattor comune il lato sinistro dell'equazione e dividendo 37 per $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$, ottenendo così il risultato $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Molti dei calcoli "aha" contenuti nel Papiro di Rhind erano evidentemente esercizi pratici per giovani studenti. Sebbene gran parte di essi sia di natura pratica, in alcuni casi sembra che lo scriba avesse in mente indovinelli o giochetti matematici. Così il problema 79 si limita a citare "sette case, 49 gatti, 343 topi, 2401 spighe di farro, 16807 misure di grano". È presumibile che lo scriba avesse a che fare con un problema, forse abbastanza celebre, secondo il quale in ciascuna delle sette case v'erano sette gatti ciascuno dei quali mangiava sette topi, ciascuno dei quali avrebbe mangiato sette spighe di grano, ciascuna delle quali avrebbe prodotto sette misure di grano. Il problema non chiedeva di dare una risposta pratica, quale sarebbe stata quella di trovare il numero di misure di grano che si sarebbero serbate, ma domandava la somma — di nessuna importanza pratica — dei numeri delle case, dei gatti, dei topi, delle spighe di farro, e delle misure di grano. Questo indovinello del Papiro di Ahmes era una anticipazione della famosa filastrocca:

Per una strada che andava a Camogli,
Incontrai un uomo con sette mogli;
Ciascuna moglie aveva sette sacchi,
Ciascun sacco conteneva sette gatti,
Ciascun gatto aveva sette gattini.
Tra mogli, sacchi, gatte e gattini,
In quanti andavano dunque a Camogli?

7 Lo storico greco Erodoto ci dice che la cancellazione dei confini dei terreni per lo straripamento del Nilo rendeva pressante il bisogno di agrimensori. I risultati raggiunti dai "tenditori di corde" dell'antico Egitto suscitarono l'ammirazione di Democrito, esperto matematico e uno dei fondatori della teoria atomistica; oggi si ha l'impressione che tali risultati siano stati sopravvalutati, in parte a causa della stupefacente accuratezza nella costruzione delle piramidi. Viene spesso affermato che gli antichi egiziani fossero a conoscenza del teorema di Pitagora, ma nei papiri che ci sono pervenuti non si riscontra alcun cenno di tale teorema. Nondimeno nel Papiro di Ahmes vi sono alcuni problemi geometrici. Il problema 51 mostra che l'area di un triangolo isoscele veniva trovata prendendo la metà di quella che noi chiameremmo la base e moltiplicandola per l'altezza. Ahmes giustificava il proprio metodo di trovare l'area osservando che il triangolo isoscele poteva venire concepito come formato da due triangoli rettangoli, uno dei quali poteva venire spostato in modo che insieme i due triangoli formassero un rettangolo. Il trapezio isoscele viene trattato in maniera simile nel problema 52, ove la base maggiore di un trapezio è 6, la base minore è 4, e la distanza tra esse è 20. Prendendo metà della somma delle basi, "così da formare un rettangolo", Ahmes la moltiplicava per 20 per trovare l'area. In trasformazioni come queste, in cui triangoli e trapezi isosceli vengono convertiti in rettangoli, possiamo ravvisare gli inizi di una teoria della congruenza e l'affiorare dell'idea di dimostrazione geometrica. Ma gli egiziani non svilupparono ulteriormente queste loro intuizioni. Un grave difetto della loro geometria era costituito dalla mancanza di una netta distinzione tra relazioni esatte e relazioni soltanto approssimate. Un atto notarile rinvenuto a Edfu, risalente a un periodo di circa 1500 anni posteriore al Papiro di Ahmes, presenta esempi di triangoli, trapezi, rettangoli e quadrilateri in senso più generale: la regola per trovare l'area di un quadrilatero in generale consiste nel prendere il prodotto delle medie aritmetiche dei lati opposti. Per quanto poco precisa sia tale regola, l'autore dell'atto notarile ne derivava un corollario, secondo il quale l'area di un triangolo è uguale a metà della somma di due lati moltiplicata per la metà del terzo lato. È questo un esempio notevole della ricerca di relazioni fra figure geometriche, oltre che di un uso molto antico del concetto di zero in sostituzione di una grandezza geometrica.

La regola seguita dagli egiziani per trovare l'area di un cerchio è stata considerata per molto tempo una delle maggiori conquiste scientifiche di quell'epoca. Nel problema 50 lo scriba Ahmes avanzava l'ipotesi che l'area di un campo circolare con un diametro di nove unità sia uguale all'area di un quadrato con un lato di otto unità. Dal confronto di questa ipotesi con la formula moderna $A = \pi r^2$, risulta che la regola egiziana equivaleva ad attribuire a π un valore di circa $3\frac{1}{6}$, approssimazione abbastanza vicina al valore esatto e degna di considerazione; ma anche in questo caso non abbiamo nessun indizio che Ahmes fosse consapevole del fatto che le aree del suo cerchio e del suo quadrato non erano *esattamente* uguali. È possibile intravedere nel problema 48 un accenno al modo in cui gli egiziani giunsero a trovare l'area del cerchio. In questo problema lo scriba formava un ottagono a partire da un quadrato con lato di nove unità trisezionando i lati e tagliando via i quattro triangoli isosceli che formavano gli angoli, ciascuno dei quali aveva un'area di $4\frac{1}{2}$ unità. L'area dell'ottagono, che non è molto diversa da quella di un cerchio iscritto nel quadrato, è uguale a sessantatrè unità, valore che non è molto lontano da quello dell'area di un quadrato con lato di otto unità. Che il numero $4(8/9)^2$ svolgesse effettivamente un ruolo paragonabile alla nostra costante π, sembra confermato dalla regola egiziana per trovare la circonferenza di un cerchio: secondo tale regola il rapporto tra l'area di un cerchio e la circonferenza è uguale al rapporto tra l'area del quadrato circoscritto e il suo perimetro. Questa regola costituiva una relazione geometrica dotata di molto maggiore precisione e significato matematico di quanto non ne avesse l'approssimazione relativamente buona di π. Il grado di accuratezza nelle approssimazioni non è, dopo tutto, una buona misura dei risultati matematici o architettonici raggiunti, e non dovremmo dare esagerata importanza a questo aspetto dell'opera degli egiziani. Le conoscenze degli egiziani circa le relazioni esistenti tra certe figure geometriche, d'altro canto, sono state troppo spesso trascurate; eppure è proprio qui che essi si avvicinarono maggiormente alla mentalità dei loro successori, i greci. Nella matematica egiziana non si conosce nessun esempio di teorema o dimostrazione formale, ma alcuni dei confronti geometrici effettuati nella Valle del Nilo, come quelli concernenti i perimetri e le aree di cerchi e quadrati, rappresentano storicamente le prime affermazioni esatte concernenti figure curvilinee.

8 Il problema 56 del Papiro di Rhind presenta un interesse tutto particolare per il fatto di contenere alcuni rudimenti di trigonometria e una teoria dei triangoli simili. Nella costruzione delle piramidi era essenziale dare alle facce un'inclinazione uniforme, e può darsi che sia stata proprio questa preoccupazione a indurre gli egiziani a introdurre un concetto equivalente alla cotangente di un angolo. Nella tecnica moderna si suole abitualmente misurare la pendenza di una linea retta dal rapporto tra "elevazione" e "profondità". In Egitto era consuetudine usare il reciproco di questo rapporto. Il termine "seqt" indicava la distanza orizzontale di una linea obliqua dall'asse verticale per ogni variazione unitaria di altezza. Il "seqt" corrispondeva così, fatta eccezione per le unità di misura, alla *rastremazione* usata oggi dagli architetti per descrivere la pendenza verso l'interno di una parete in muratura. L'unità verticale di lunghezza era il cubito; ma nelle misurazioni della distanza orizzontale, l'unità usata era la "mano", che era contenuta sette volte in un cubito. Il seqt della faccia di una piramide era dunque il rapporto tra profondità ed elevazione, la prima misurata in mani e la seconda in cubiti. Nel problema 56 si chiede di trovare il seqt di una piramide alta 250 cubiti con una base quadrata il cui lato misura 360 cubiti. Lo scriba innanzitutto divideva 360 per 2 e poi divideva il risultato per 250, ottenendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$ in cubiti. Moltiplicando il risultato per 7, otteneva per il seqt il valore di $5\frac{1}{25}$ espresso in mani per cubito. In altri problemi concernenti la piramide contenuti nel Papiro di Ahmes, il seqt risulta essere $5\frac{1}{4}$, valore che, in un certo modo, si accorda meglio con quello della grande Piramide di Cheope, larga 440 cubiti e alta 280, ove il seqt è di $5\frac{1}{2}$ mani per cubito.

Vi sono parecchi aneddoti circa presunte relazioni geometriche esistenti tra le dimensioni della Grande Piramide, ma alcuni sono evidentemente falsi. Per esempio, l'aneddoto secondo cui il perimetro della base doveva essere, nelle intenzioni, esattamente uguale alla circonferenza di un cerchio il cui raggio corrispondeva all'altezza della piramide, è in contraddizione con l'opera di Ahmes. Il rapporto tra perimetro e altezza è, infatti, molto vicino a $\frac{44}{7}$, che è esattamente il doppio del valore di $\frac{22}{7}$ che oggi viene spesso dato a π; ma dobbiamo ricordare che il valore assegnato da Ahmes a π era di circa $3\frac{1}{6}$, e non $3\frac{1}{7}$. Che il valore di Ahmes fosse usato anche da altri egiziani, trova conferma in un papiro risalente alla dodicesima dinastia (il Papiro di Kahun, ora conservato a Londra) nel quale il volume di un cilindro viene trovato moltiplicando l'altezza per l'area della base, e la base veniva determinata mediante la regola di Ahmes.

9 Gran parte delle nostre informazioni sulla matematica degli egiziani sono state ricavate dal Papiro di Rhind o di Ahmes, il più ampio documento matematico dell'antico Egitto; ma vi sono anche altre fonti[8]. Oltre al Papiro di Kahun, già citato, vi sono un Papiro di Berlino dello stesso periodo, due tavolette di legno provenienti da Akhmim (Cairo) risalenti al 2000 a.C. circa, un rotolo di pelle contenente elenchi di frazioni con l'unità a numeratore e risalente al tardo periodo degli Hyksos, e un importante papiro, noto come il Papiro di Goleniščev o di Mosca, acquistato in Egitto nel 1893. Il Papiro di Mosca è lungo pressappoco come il Papiro di Rhind — circa 5,5 m — ma è largo soltanto un quarto di quest'ultimo, avendo una larghezza di circa 7,5 cm. Fu scritto, con minore accuratezza dell'opera di Ahmes, da un ignoto scriba della dodicesima dinastia (ca. 1890 a.C.). Contiene venticinque esempi, per lo più desunti dalla vita pratica e non molto diversi da quelli del Papiro di Ahmes, fatta eccezione per due che hanno un significato speciale. Il problema 14 del Papiro di Mosca è corredato da una figura che assomiglia a un trapezio isoscele (fig. 2.1), ma i calcoli che la accompagnano indicano che si tratta di un tronco di piramide quadrata. Al di sopra e al di sotto della figura vi sono i simboli che rappresentano rispettivamente 2 e 4, e all'interno della figura vi sono i simboli ieratici indicanti 6 e 56.

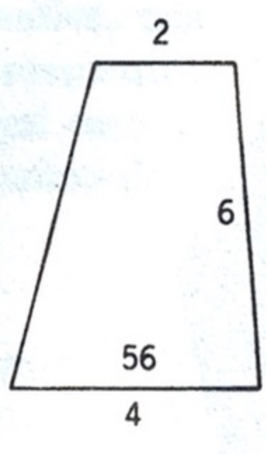


Fig. 2.1

Le istruzioni che accompagnano la figura indicano chiaramente che si tratta del problema di trovare il volume di un tronco di piramide quadrata alto 6 unità, se gli spigoli della base superiore e di quella inferiore sono rispettivamente 2 e 4 unità. Lo scriba calcolava il quadrato dei numeri 2 e 4 e aggiungeva alla somma di questi quadrati il prodotto di 2 per 4, ottenendo così il risultato di 28. Questo risultato veniva poi moltiplicato per $\frac{1}{3}$ di 6; e lo scriba concludeva con le parole: "Vedi, è 56; lo hai trovato esattamente". Ossia, il volume del tronco veniva calcolato in maniera corrispondente alla formula usata attualmente $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$, ove h è l'altezza e a e b sono i lati delle basi qua-

[8] Se ne trova un buon resoconto nell'esposizione di ARCHIBALD citata nella nota 4.

drate. Questa formula non compare mai esplicitamente scritta, ma nella sostanza essa era evidentemente nota agli egiziani. Se, come nell'atto notarile trovato a Edfu, si prende $b = 0$, la formula si riduce alla nota formula per trovare il volume di una piramide: un terzo della base per l'altezza. In che modo gli egiziani siano pervenuti a questi risultati, non è noto. Può darsi che la regola concernente il volume di una piramide avesse un'origine empirica, ma una origine del genere è da escludere per quanto riguarda il volume di un tronco. Per quest'ultimo sembra più probabile una base teorica. Si è avanzata l'ipotesi che gli egiziani avessero seguito anche in questo caso lo stesso procedimento usato nel caso del triangolo isoscele e in quello del trapezio isoscele: ossia è possibile che avessero mentalmente decomposto il tronco in parallelepipedi, prismi e piramidi [9]. Sostituendo le piramidi e i prismi con blocchi rettangolari uguali, un raggruppamento plausibile dei blocchi porta alla formula egiziana. Si sarebbe potuto cominciare, per esempio, con una piramide di base quadrata il cui vertice fosse direttamente sovrastante a uno dei vertici della base. Una ovvia decomposizione del tronco sarebbe consistita nella suddivisione in quattro parti come nella figura 2.2,

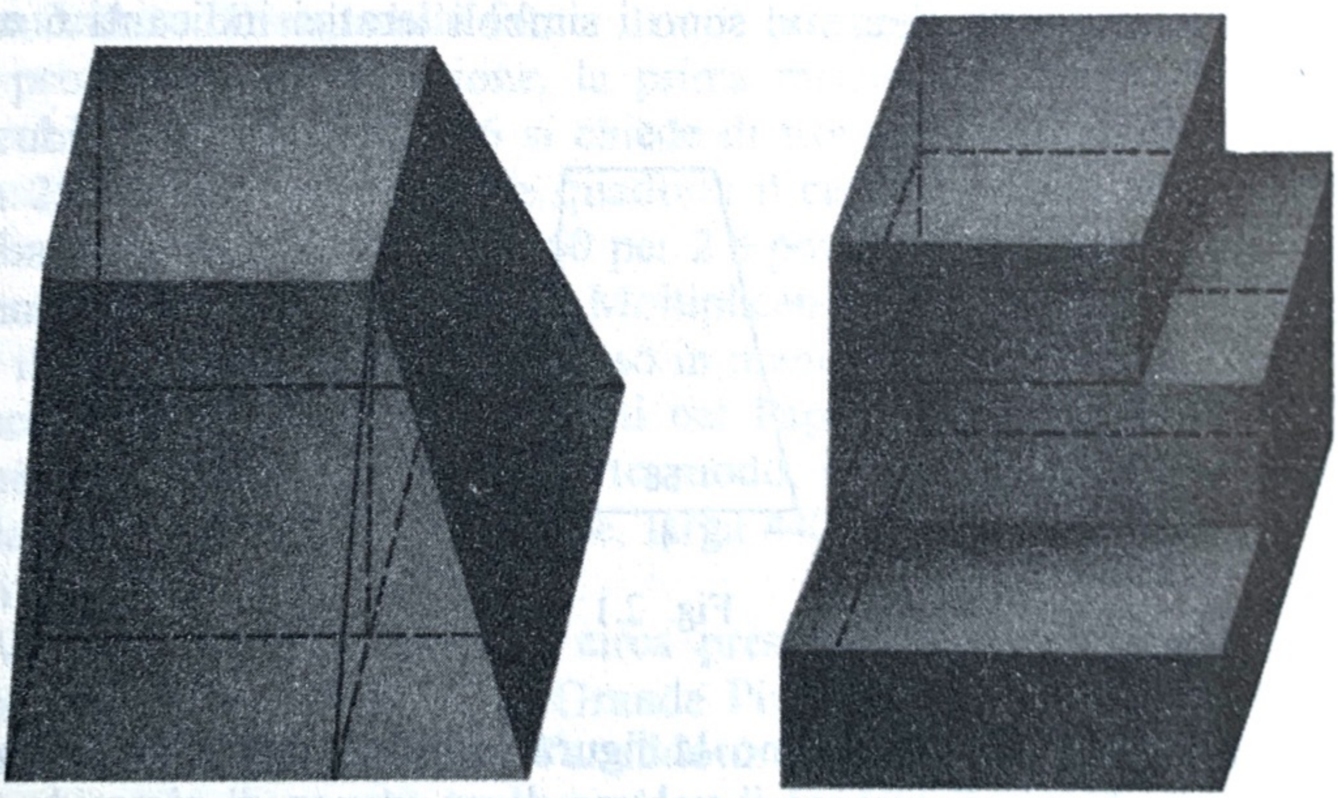


Fig. 2.2

un parallelepipedo rettangolare avente il volume $b^2 h$, due prismi triangolari, ciascuno con volume $b(a-b)h/2$, e una piramide di volume $(a-b)^2 h/3$. I prismi potevano venire combinati a formare un parallelepipedo rettangolare con dimensioni b, $a-b$ e h; e la piramide poteva venire concepita come un parallelepipedo rettangolare avente le dimen-

[9] Van der Waerden, *Science Awakening*, p. 35. Cfr. R.J. Gillings, "The Volume of a Truncated Pyramid in Ancient Egypt", *Mathematics Teacher*, 57, 1964, pp. 552-555.

sioni $a-b$, $a-b$ e $\frac{h}{3}$. Dopo aver tagliato i parallelepipedi più alti in modo che tutte le altezze siano uguali a $\frac{h}{3}$, si possono facilmente disporre i pezzi in modo da formare tre strati, ciascuno di altezza $\frac{h}{3}$, e aventi sezioni trasversali di area, rispettivamente, a^2, ab e b^2.

Il problema 10 del Papiro di Mosca presenta una maggiore difficoltà di interpretazione del problema 14. Qui lo scriba chiede di trovare l'area della superficie di quello che ha l'aspetto di un cesto con un diametro $4\frac{1}{2}$. Il procedimento seguito è l'equivalente di una formula come $S = (1-\frac{1}{9})^2(2x)\cdot x$, ove x è $4\frac{1}{2}$, e viene ottenuto un risultato di 32 unità. Siccome $(1-\frac{1}{9})^2$ è l'approssimazione egiziana di $\pi/4$, il risultato di 32 corrisponderebbe alla superficie di un emisfero di diametro $4\frac{1}{2}$. Questa fu appunto l'interpretazione data al problema nel 1930[10]. Un tale risultato, che anticiperebbe di circa 1500 anni il più antico calcolo di una superficie emisferica che ci sia noto, sarebbe stupefacente, e sembra, di fatto, troppo bello per essere vero. Studi più recenti[11] suggeriscono che il "cesto" potrebbe essere un tetto — più o meno come quello di una capanna a forma di semicilindro di diametro $4\frac{1}{2}$ e lunghezza $4\frac{1}{2}$. In tal caso il calcolo richiederebbe semplicemente la conoscenza della lunghezza di un semicerchio; e la poca chiarezza del testo rende possibili interpretazioni ancor più primitive, compresa quella che il calcolo sia soltanto una valutazione approssimativa dell'area del tetto di un granaio a forma di cupola. In ogni caso, a quanto pare, siamo qui in presenza di una delle prime valutazioni dell'area di una superficie curvilinea.

10 Per molti anni si è supposto che i greci avessero appreso i rudimenti della geometria dagli egiziani: Aristotele spiegava che la geometria era nata nella Valle del Nilo poiché i sacerdoti avevano colà tutto l'agio di sviluppare la conoscenza teorica. Che i greci abbiano preso a prestito dagli egiziani qualche nozione di matematica elementare è probabile, giacché l'uso di frazioni con l'unità a numeratore perdurò in Grecia e a Roma fino al Medioevo inoltrato, ma essi hanno certamente esagerato la misura del loro debito. Le conoscenze contenute nei papiri egiziani pervenuti sino a noi sono per lo più di natura pratica: il calcolo

---

[10] Si veda W.W. STRUVE, "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau", "*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*", Abteil. A, *Quellen*, 1, 1930.

[11] Si veda VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, p. 34. Cfr. però R.J. GILLINGS, "The Area of the Curve Surface of a Hemisphere in Ancient Egypt", *The Australian Journal of Science*, 30, 1967, pp. 113-116, in cui l'autore giunge alla conclusione che lo scriba del Papiro di Mosca trattava effettivamente in maniera corretta, nel Problema 10, la superficie curva di una semisfera.

costituiva l'elemento fondamentale. L'apparente presenza di qualche elemento teorico aveva forse lo scopo di facilitare la tecnica del calcolo più che la comprensione concettuale. Persino la geometria egiziana, un tempo tanto decantata, risulta essere stata principalmente una branca dell'aritmetica applicata. La presenza di relazioni elementari di congruenza sembra dovuta alla necessità di fornire artifici per effettuare misurazioni piuttosto che al desiderio di raggiungere una maggiore profondità concettuale. Le regole di calcolo vengono raramente motivate, e riguardano soltanto casi concreti specifici. Può darsi che i papiri di Ahmes e di Mosca, le nostre due principali fonti di informazione, costituissero soltanto manuali a uso di studenti; essi indicano nondimeno la direzione e le tendenze dell'istruzione matematica egiziana. Ulteriori testimonianze fornite da iscrizioni su monumenti, da frammenti di altri papiri matematici, e da documenti relativi a campi scientifici affini contribuiscono a confermare l'impressione generale. È vero che i nostri due principali papiri matematici risalgono a un periodo molto antico, ossia a un millennio prima della nascita della matematica greca, ma la matematica egiziana sembra non aver mutato granché nell'intero corso della sua lunga storia. In ogni fase del suo sviluppo essa rimase imperniata sull'operazione di addizione; svantaggio questo che dava al computo egiziano un carattere particolarmente primitivo, che talvolta si accompagnava a una stupefacente complicatezza. La fertile Valle del Nilo è stata descritta come la più vasta oasi del mondo nel più vasto deserto del mondo. Bagnata da uno dei fiumi più tranquilli e geograficamente protetta contro invasioni straniere, era un paradiso per popolazioni pacifiche dedite, in larga misura, a un tipo di vita calmo e tranquillo. L'amore verso gli dei benefici, il rispetto per la tradizione, e la preoccupazione per la morte e per i bisogni dei morti, tutti questi fattori incoraggiavano un alto grado di inattività. Può darsi che la geometria sia stata un dono del Nilo, come credeva Erodoto, ma gli egiziani fecero ben poco con tale dono. La matematica di Ahmes non era diversa da quella dei suoi predecessori, e rimase la stessa per i suoi successori. Per trovare conquiste matematiche più avanzate, dobbiamo volgere lo sguardo alla più turbolenta vallata della Mesopotamia.

Bibliografia

CHACE A.B., BULL L.S., MANNING H.P. e ARCHIBALD R.C., a cura di, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Oberlin, Ohio, 1927-1929, 2 voll. Quest'opera contiene una estesa bibliografia degli studi sulla matematica egiziana pubblicati nell'intervallo di tempo che va dal 1706 al 1927, oltre a una vasta esposizione generale della matematica egiziana.

GILLINGS R.J., "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus", in *The Mathematics Teacher*, **55**, 1962, pp. 61-69. Il seguito si trova in volumi successivi della stessa rivista.

GUGGENBUHL L., "Mathematics in Ancient Egypt: A Checklist", in *The Mathematics Teacher*, **58**, 1965, pp. 630-634.

NEUGEBAUER O., *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, Springer, Berlino, 1926.

NEUGEBAUER O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2ª ed., Brown University Press, Providence, R.I., 1957; ed. in paperback, Harper Torchbook, New York; tr. ital. *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano, 1974.

PARKER R.A., *The Calendars of Ancient Egypt*, University of Chicago Press, Chicago, 1950.

STRUVE W.W., "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum der Schönen Künste in Moskau", in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, parte A, *Quellen*, I, 1930.

VAN DER WAERDEN B.L., "Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung", in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, parte B, *Studien*, IV, 1937-1938, pp. 359-382.

VAN DER WAERDEN B.L., *Science Awakening*, trad. ingl. di A. Dresden, Oxford University Press, New York, 1961; ed. in paperback, Wiley, New York, 1963.

VOGEL K., *Vorgriechische Mathematik*, vol. I, *Vorgeschichte und Aegypten*; ed. in paperback, Hermann Schroedel, Hannover, 1958.

WHEELER N.F., "Pyramids and their Purpose", in *Antiquity*, **9**, 1935, pp. 5-21, 161-189, 292-304.