T

CAPITOLO G1
Enti geometrici fondamentali

Piazza del Duomo, con la cattedrale di Santa Maria del Fiore e la cupola del Brunelleschi, è soltanto una delle tante mete turistiche di Firenze.

Prepariamo un giro per Firenze usando le rette orientate?

la risposta a p. **G6**

1. Geometria euclidea

GUARDA!
2 Video
7 Maths in English
8 Attività interattive
1 GeoGebra

Definizioni e teoremi

Esercizi a pagina G24

Definizioni ed enti primitivi

In geometria, per spiegare che cosa è un suo *ente*, cioè un oggetto geometrico, forniamo una **definizione**, cioè una frase con cui associamo un nome all'ente e ne descriviamo le caratteristiche.

- «Un triangolo è un poligono con tre lati.»

Nel definire un ente facciamo riferimento ad altri enti, che devono essere già noti.

Per esempio, nella definizione di triangolo, abbiamo usato la parola *poligono*. Ma qualcuno potrebbe non sapere che cos'è un poligono. Anche questo ente va allora definito, usando, a sua volta, altri enti geometrici, anch'essi da definire…

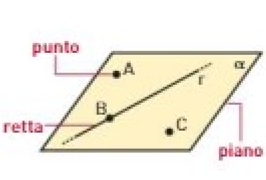
Per interrompere questo procedimento, che potrebbe continuare all'infinito, è necessario che alcuni enti non vengano definiti e vengano accettati come noti.

Questi enti sono chiamati **enti primitivi**.

Il **punto**, la **retta** e il **piano** sono enti primitivi.

Indichiamo i punti con lettere maiuscole, le rette con lettere minuscole, i piani con lettere minuscole dell'alfabeto greco.

- Nella figura sono rappresentati un piano α, una retta r e tre punti A, B e C.



Quelle che tracciamo su un foglio sono soltanto *rappresentazioni*, perché gli enti geometrici sono *ideali*, cioè sono ottenuti con astrazioni dal mondo fisico che ci circonda.
Per esempio, il punto della geometria non ha dimensioni e può essere considerato come l'astrazione del segno che lasciamo con una matita per rappresentarlo.

I punti sono gli enti che costituiscono tutte le *figure geometriche*.

DEFINIZIONE
Una **figura geometrica** è un insieme di punti.

In questo capitolo e nei successivi studieremo la *geometria del piano*: studieremo cioè le proprietà delle figure geometriche i cui punti sono tutti in uno stesso piano.

Rappresentazioni e astrazioni
La *retta* ideale, che è illimitata in entrambe le direzioni e non ha spessore, è un'astrazione di quella che disegniamo. Su un foglio è possibile disegnare solo una parte di *piano* che rappresenta quello ideale, illimitato in tutte le direzioni e senza spessore.

Teoremi e postulati

Le proprietà delle figure geometriche sono descritte mediante *teoremi*.

DEFINIZIONE
Un **teorema** è un enunciato di cui si fa vedere la verità mediante una dimostrazione.
Una **dimostrazione** è una sequenza di deduzioni che parte da quello che si suppone vero, l'**ipotesi**, e arriva a quello che si vuole dimostrare, la **tesi**.

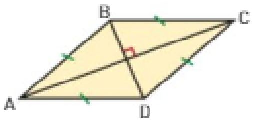
ipotesi → **deduzioni** → **tesi**

ESEMPIO

teorema

In un rombo le diagonali sono perpendicolari.

ipotesi — tesi



Ipotesi: ABCD rombo.
Tesi: $BD \perp AC$.

Nella dimostrazione, le deduzioni possono basarsi, oltre che su altri teoremi già dimostrati, anche su alcune proprietà che si chiede di accettare come vere senza darne dimostrazione.
Queste proprietà sono dette **postulati** o **assiomi**.

Spesso, per chiarire meglio qual è l'ipotesi e qual è la tesi, si preferisce scrivere l'enunciato di un teorema nella forma: **se** *ipotesi*, **allora** *tesi*.

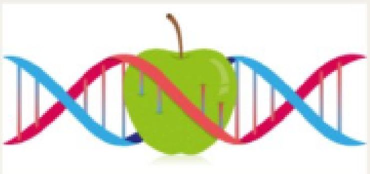
- Il teorema dell'esempio precedente si può scrivere così:
«**se** un quadrilatero è un rombo, **allora** le sue diagonali sono perpendicolari».
In simboli, può anche essere scritto: $ABCD$ rombo $\rightarrow BD \perp AC$.

MATHS IN ENGLISH
Within a given theory, a **postulate** or **axiom** is a statement assumed to be *true*, while a **theorem** is a statement that can be proved.

Dimostrazioni scientifiche

BIOLOGIA

Per certi aspetti, una dimostrazione scientifica in cui si mostra l'esecuzione di un esperimento assomiglia a una dimostrazione di geometria, perché può essere divisa in passi analoghi a quelli di una dimostrazione geometrica.



Il tecnico del laboratorio di scienze mostra agli studenti di una classe come estrarre il DNA da una mela.

- Per eseguire l'esperimento sul DNA servono diversi materiali: detersivo liquido, succo d'ananas, alcool etilico e una mela; sono il punto di partenza, un po' come le affermazioni che ammettiamo come ipotesi in una dimostrazione di geometria.
- La dimostrazione dell'esperimento è una sequenza di passi che spiega come combinare i materiali a disposizione seguendo un filo logico.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

- L'agglomerato di filamenti di DNA è l'obiettivo da raggiungere, un po' come la tesi in una dimostrazione di geometria.

Come in geometria, bisogna fare attenzione a non saltare passaggi.
Per esempio, se dimentichi di aggiungere il detersivo alla mela frullata, la membrana delle cellule non si rompe e quindi non riesci a isolare i filamenti di DNA.
Naturalmente, fra le dimostrazioni di un esperimento di scienze e quelle di geometria ci sono anche grosse differenze: le scoprirai dopo aver fatto un po' di pratica con le une e con le altre.

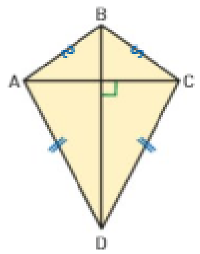
► Parti da un esperimento scientifico che hai fatto in laboratorio o studiato. Individua l'obiettivo da raggiungere, i materiali a disposizione e la sequenza di azioni necessaria per ottenere il risultato. Trova analogie e differenze con una dimostrazione di geometria.

Un teorema è il **teorema inverso** (o **reciproco**) di un altro se le loro ipotesi e tesi possono essere scambiate.
In generale, non è detto che scambiando ipotesi e tesi di un teorema si ottenga una proposizione vera, ossia un altro teorema.

Se scambiamo l'ipotesi e la tesi del teorema che abbiamo esaminato nell'esempio precedente, otteniamo la proposizione

«**se** un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, **allora** è un rombo».

Questo non è un teorema, perché non è una proposizione sempre vera: riusciamo a trovare esempi, come quello della figura a lato, in cui è vero che le diagonali sono perpendicolari, ma il quadrilatero non è un rombo.



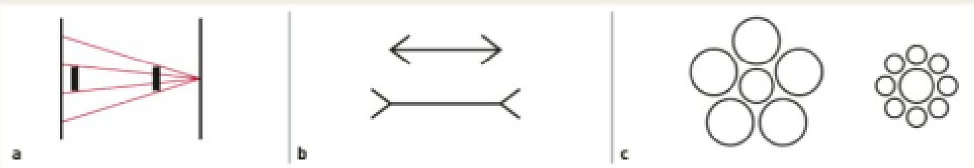
Perché dimostrare?

METODI MATEMATICI

La geometria che studieremo si sviluppò per merito di matematici greci. Il metodo di ricavare tutte le proprietà dai postulati mediante deduzioni, detto **metodo ipotetico-deduttivo** o **metodo assiomatico**, è stato usato da Euclide negli *Elementi*, nel terzo secolo a.C. Per questo motivo parliamo di **geometria euclidea**.

Non è un caso che la geometria euclidea sia nata all'interno della civiltà greca insieme allo sviluppo delle prime forme di governo basate sulla democrazia, dove le decisioni vengono prese a maggioranza in un'assemblea.
Scienza e politica, infatti, condividono la necessità di convincere i membri di una comunità della validità di un'idea, fornendo argomentazioni oggettive che vadano oltre le apparenze.
Il metodo assiomatico-deduttivo è diventato uno degli strumenti più efficaci utilizzati dagli scienziati per far accettare le proprie teorie.

Osserviamo degli esempi di illusioni ottiche che aiutano a capire quanto sia fondamentale dimostrare una teoria o un'idea: non sempre possiamo fidarci di ciò che vediamo.



Nella figura **a**, il rettangolo di destra *sembra* più alto del rettangolo di sinistra, ma *non è vero*!
Nella figura **b**, il segmento in alto *sembra* più corto di quello in basso, ma *non è vero*!
Nella figura **c**, il cerchio centrale a destra *sembra* più grande di quello centrale a sinistra, ma *non è vero*!

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

► Approfondisci il rapporto fra scienza e democrazia cercando informazioni nel Web o leggendo delle pubblicazioni di divulgazione scientifica, per esempio: Maria Luisa Villa, *Scienza è democrazia*, Guerini e associati, 2018.

Postulati di appartenenza e d'ordine

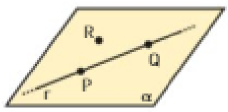
Esercizi a pagina G25

Abbiamo detto che punto, retta e piano sono enti primitivi.
Ma se non li definiamo, come possiamo conoscerne le caratteristiche?
Ciò è possibile mediante dei postulati e, in particolare, mediante i postulati di appartenenza e d'ordine, che definiscono implicitamente gli enti primitivi attraverso le loro relazioni reciproche.

Postulati di appartenenza

POSTULATI

1. Il piano è un insieme di punti. Le rette sono sottoinsiemi del piano.
2. A una retta appartengono *almeno* due punti distinti.
3. Nel piano esistono *almeno* tre punti che non appartengono alla stessa retta.
4. Due punti distinti appartengono entrambi a *una* retta e a *una sola*.



P e Q appartengono a r.
r è l'unica retta a cui appartengono entrambi.
R non appartiene a r.

Per il primo postulato, la retta è un insieme di punti, quindi possiamo utilizzare il concetto di appartenenza.
Dire che un punto P *appartiene* a una retta r è equivalente a dire che P *sta su* r o anche che r *passa per* P.
Diciamo poi che tre o più punti sono **allineati** se appartengono a una stessa retta.
Per il terzo postulato, nel piano esistono almeno tre punti non allineati.

Il quarto postulato dice che, se consideriamo due punti distinti A e B, c'è sicuramente una retta che passa per A e B (appartengono a *una* retta) e tale retta è unica (appartengono a *una sola* retta). Diciamo allora che A e B *individuano* una retta, che chiamiamo *retta AB*.

Una conseguenza del quarto postulato è che due rette distinte non possono avere più di un punto in comune. Se ne avessero più di uno, sarebbero la stessa retta, cioè sarebbero coincidenti. Diciamo che due rette con un punto in comune si *intersecano* in un punto e sono **incidenti**.

Vediamo in un esempio come usare i postulati di appartenenza per dimostrare proprietà.

ESEMPIO

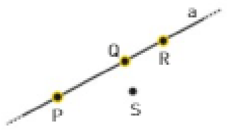
► Dimostriamo che, data una retta r nel piano, c'è almeno un punto del piano che non appartiene alla retta.

Per il terzo postulato, nel piano esistono tre punti distinti, P, Q e R, non allineati. Se almeno uno tra P e Q non appartiene a r, la tesi è verificata. Supponiamo invece che entrambi i punti P e Q appartengano a r. Poiché P, Q e R non sono allineati, R non appartiene alla retta r: anche in questo caso la tesi è verificata.

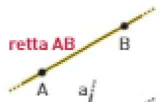
MATHS IN ENGLISH
In Euclidean geometry there are postulates describing relations between points, lines and planes.

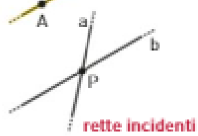
Il fatto che le figure siano *insiemi* di punti permette di utilizzare altri elementi della teoria degli insiemi, come il concetto di sottoinsieme o le operazioni di unione e intersezione, con i relativi simboli.

Una e una sola
Dicendo «a una retta e a una sola»:
- «una» esprime l'*esistenza*: dati due punti distinti, esiste almeno una retta che passa per quei punti;
- «una sola» esprime l'*unicità*: la retta passante per i due punti è unica.



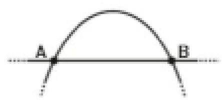
P, Q, R, allineati
P, Q, S, non allineati





rette incidenti

Descrivere senza definire
Il quarto postulato di appartenenza esclude che entrambe le linee disegnate in figura possano essere una retta. Questo esempio fa capire come i postulati forniscano le caratteristiche degli enti primitivi pur non definendoli.

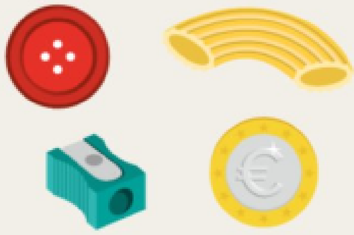


Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Modelli geometrici

COLLEGAMENTI MATEMATICI

Possiamo costruire un modello geometrico anche solo con i postulati di appartenenza.



Pensiamo di prendere come piano l'insieme dei quattro oggetti della figura, che sono i punti del nostro piano.
Prendiamo come rette gli insiemi costituiti da due oggetti: {*bottone, moneta*}, {*temperino, maccherone*}, {*bottone, temperino*} e così via.
Il nostro modello soddisfa i postulati di appartenenza.
Per esempio, vale il terzo postulato perché, presi i tre punti *bottone, moneta, temperino*, essi non appartengono alla stessa retta.
Possiamo concludere che, se ci limitiamo a pochi postulati, esistono modelli geometrici in cui punto, retta e piano sono enti diversi da quelli che di solito pensiamo. Da questo punto di vista, i postulati possono essere considerati come «definizioni implicite» degli enti primitivi.

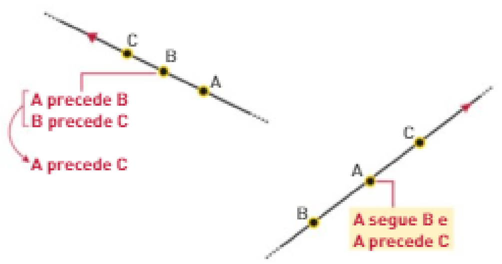
► Considerati il piano e i punti dell'esempio, verifica che non puoi pensare alle rette come agli insiemi di tre punti. Se per esempio consideri {*temperino, bottone, moneta*} e {*temperino, moneta, maccherone*}, quale postulato non vale?

Postulati d'ordine

Ogni retta può essere **orientata** stabilendo su di essa un verso di percorrenza.
Nell'esempio della figura a lato, diciamo che *A precede B*, oppure che *B segue A*, perché, percorrendo la retta nel verso fissato, incontriamo prima *A* e poi *B*.
L'orientamento della retta stabilisce una relazione fra i suoi punti e valgono i seguenti postulati.

POSTULATI

1. Se *A* e *B* sono due punti distinti di una retta, o *A* precede *B* oppure *B* precede *A*.
2. Se *A* precede *B* e *B* precede *C*, *allora A* precede *C*.
3. Preso un punto *A* su una retta, c'è *almeno* un punto che precede *A* e uno che segue *A*.
4. Presi due punti *B* e *C* su una retta, con *B* che precede *C*, c'è *almeno* un punto *A* della retta che segue *B* e precede *C*.



Per il postulato **1**, non ci sono punti di una retta che non si possono confrontare tra loro e vale la *proprietà antisimmetrica*; per il postulato **2**, vale la *proprietà transitiva*. Quindi la relazione considerata è una *relazione d'ordine totale*.

Il postulato **3** dice che una **retta è illimitata**: su una retta non esistono né un primo punto, né un ultimo.

Il postulato **4** afferma invece che la **retta è un insieme denso**: fra due punti distinti esiste sempre un altro punto.
Questo significa che una retta contiene **infiniti** punti. Infatti, presi due punti qualsiasi A_1 e A_2 di una retta, fra di essi per il postulato **4** c'è almeno un punto A_3 della retta. Per lo stesso postulato, fra A_1 e A_3 c'è almeno un punto A_4… Il procedimento può essere ripetuto infinite volte.

PROVA SUBITO

Rappresenta su una retta orientata i punti *A*, *B* e *C* in modo che:

a. *A* segua *C* e *B* segua *A*;
b. *B* preceda *A* e *C* segua *A*;
c. *A* segua *B* e *C* segua *B*;
d. *B* sia compreso fra *A* e *C*.

La posizione dei tre punti è determinata in modo univoco in tutti i casi?

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

In giro per Firenze

MODELLI MATEMATICI

La relazione d'ordine su una retta orientata è utile per creare degli ordinamenti anche nella vita quotidiana, tenendo presenti alcuni vincoli che la situazione reale impone.

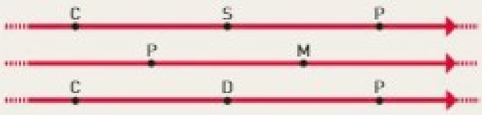
Dobbiamo programmare un giro turistico per Firenze. Vogliamo visitare piazza della Signoria, piazza del Duomo, piazzale Michelangelo, piazza Santa Croce e piazza dei Pitti.

Il tour è accompagnato da una narrazione in audioguida, quindi vanno rispettate le seguenti precedenze:

- piazza della Signoria dopo piazza Santa Croce e prima di piazza dei Pitti;
- piazzale Michelangelo dopo piazza dei Pitti;
- piazza del Duomo prima di piazza dei Pitti e dopo piazza Santa Croce.

Quanti e quali sono i possibili percorsi del tour?

Schematizziamo i vincoli come segue.



S = piazza della Signoria
D = piazza del Duomo
M = piazzale Michelangelo
C = piazza Santa Croce
P = piazza dei Pitti

Riportando le indicazioni sulla stessa retta orientata, per il giro turistico otteniamo due possibilità:

1. piazza Santa Croce, piazza della Signoria, piazza del Duomo, piazza dei Pitti, piazzale Michelangelo;

2. piazza Santa Croce, piazza del Duomo, piazza della Signoria, piazza dei Pitti, piazzale Michelangelo.

► Fai un altro esempio di una situazione reale in cui puoi utilizzare la relazione d'ordine su una retta orientata.

Dai postulati d'ordine e di appartenenza si deduce che:
- per un punto di un piano passano infinite rette;
- il piano contiene infiniti punti e infinite rette.

L'insieme delle infinite rette del piano che passano per un punto P si chiama **fascio proprio di rette** e P è il **centro del fascio**.

fascio proprio di rette

ATTIVITÀ INTERATTIVA

Teoremi e postulati

Dimostra, utilizzando i postulati di appartenenza, che se due rette hanno più di un punto in comune, allora coincidono.

> **Nel Prova tu**, questo e altri 2 esercizi.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

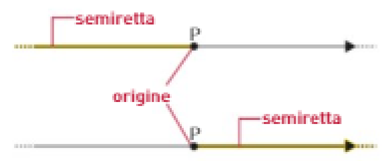
2. Figure e proprietà

Esercizi a pagina G26

MATHS IN ENGLISH
A **ray** is the set of points on a line that either all precede or all follow a given point.

Semirette

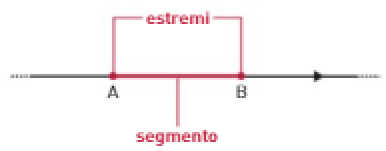
DEFINIZIONE
Su una retta orientata consideriamo un punto P: chiamiamo **semiretta** di **origine** P l'insieme del punto P e di tutti i punti che lo precedono, oppure l'insieme del punto P e di tutti quelli che lo seguono.



Un punto P su una retta individua sempre due semirette, che si dicono **opposte**. Il punto che è origine di entrambe le semirette è il loro unico punto di intersezione. Come le rette, indichiamo le semirette con lettere minuscole a, b, c, ...

Segmenti

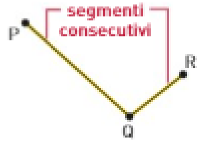
DEFINIZIONE
Su una retta orientata consideriamo i punti A e B, con A che precede B. Il **segmento** di **estremi** A e B è l'insieme dei punti A e B e dei punti della retta che seguono A e precedono B.



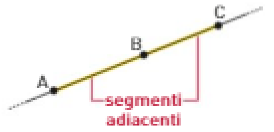
I punti compresi fra A e B sono i **punti interni** del segmento. Un segmento è **nullo** se i suoi estremi coincidono, cioè è formato da un punto solo.

Due segmenti sono:

consecutivi se hanno in comune solo un estremo;



adiacenti se sono consecutivi e sulla stessa retta.



MATHS IN ENGLISH
A **segment** is the set of points of a line contained between two points, the endpoints of the segment.

PROVA SUBITO
Nell'insieme dei segmenti, considera la relazione «essere consecutivo». È transitiva? E la relazione «essere adiacente»?

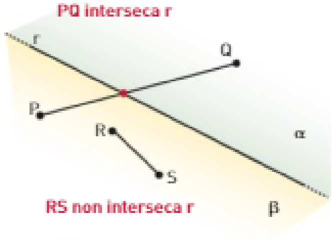
Semipiani

Possiamo dare la definizione di semiretta perché un punto divide una retta in modo che, «muovendosi» sulla retta, per passare da una semiretta all'altra bisogna «attraversare» il punto.
Il postulato seguente serve per introdurre un concetto analogo per il piano.

POSTULATO
Partizione del piano mediante una retta
Una retta di un piano divide i punti del piano che non le appartengono in due insiemi distinti, in modo che, se due punti appartengono allo stesso insieme, allora il segmento di cui sono estremi è contenuto nell'insieme e non interseca la retta; se appartengono a insiemi diversi, allora il segmento interseca la retta.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Il postulato dice che, se consideriamo, come nella figura, una retta r, essa divide i punti del piano in due insiemi α e β in modo che, per passare dall'insieme α all'insieme β, considerando per esempio i punti P e Q, dobbiamo «attraversare» la retta r. Questo invece non succede se «restiamo», per esempio, in β, considerando i punti R e S.



Gli insiemi α e β della figura sono esempi di *semipiani* di cui r è l'*origine*. In generale, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE
Considerata una retta r di un piano, un **semipiano** di **origine** r è l'insieme dei punti di r e di uno dei due insiemi in cui il piano è diviso da r.

Diciamo che i due semipiani originati da una retta in un piano sono **opposti**. La retta origine di entrambi è la loro intersezione.

Figure convesse, figure concave

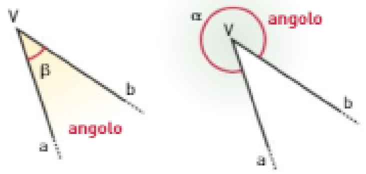
DEFINIZIONE
Una figura è **convessa** se, presi due suoi punti qualsiasi, questi sono sempre estremi di un segmento tutto contenuto nella figura.
In caso contrario la figura è **concava**.

Sono figure convesse una retta, una semiretta, un segmento, due segmenti adiacenti, mentre due segmenti consecutivi non adiacenti sono una figura concava.
Sono figure convesse anche i piani e, in base al postulato di partizione del piano mediante una retta, i semipiani.

PROVA SUBITO
L'intersezione di due figure convesse è ancora una figura convessa.
Mostra con un esempio che, invece, l'unione di due figure convesse non sempre dà luogo a una figura convessa.

Angoli

DEFINIZIONE
In un piano consideriamo le semirette a e b con la stessa origine V. Un **angolo** di **vertice** V e **lati** a e b è l'insieme dei punti delle semirette a e b e di una delle due parti in cui esse dividono il piano.



Nella figura della definizione puoi osservare che, fissati un vertice e due lati (che non siano due semirette coincidenti oppure opposte), si formano due angoli: quello giallo è una figura convessa, che chiamiamo **angolo convesso**, e quello verde è una figura concava, che chiamiamo **angolo concavo**.

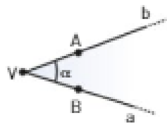
MATHS IN ENGLISH
An **angle** can be considered as either of the two parts of the plane bordered by two rays with a common endpoint.

D'ora in poi, se non daremo indicazioni diverse, quando parleremo di angoli intenderemo gli angoli convessi.

Possiamo indicare un angolo in diversi modi.

- L'angolo della figura può essere indicato con:

  α; $\quad A\widehat{V}B$; $\quad a\widehat{V}b$; $\quad \widehat{ab}$.



PROVA SUBITO
Fai un esempio di come un angolo può essere ottenuto tramite l'intersezione di due semipiani.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

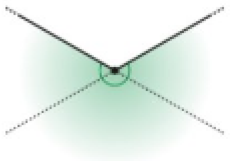
Chiamiamo punti interni di un angolo i punti che appartengono all'angolo ma non ai suoi lati. Se i lati di un angolo coincidono in una sola semiretta, chiamiamo:

- **angolo nullo** l'angolo di cui fanno parte soltanto i punti della semiretta;
- **angolo giro** l'angolo che ha per lati la semiretta ed è costituito da tutti i punti del piano.

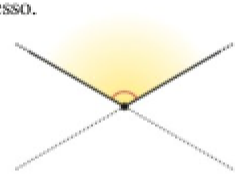
Un **angolo piatto** è un angolo i cui lati sono semirette opposte. Un angolo piatto è quindi un semipiano. Di solito indicheremo un angolo piatto con π.

L'angolo piatto e l'angolo giro sono angoli convessi. Per angoli diversi dall'angolo piatto e dell'angolo giro, possiamo distinguere gli angoli concavi da quelli convessi usando le proprietà descritte nelle figure seguenti.

Se i prolungamenti dei lati sono *interni* all'angolo, allora l'angolo è concavo.



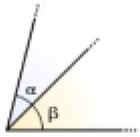
Se i prolungamenti dei lati sono *esterni* all'angolo, allora l'angolo è convesso.



Due angoli sono:

consecutivi se hanno in comune solo il vertice e uno dei lati;

α e β consecutivi

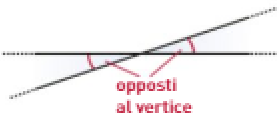


adiacenti se sono consecutivi e i lati non in comune sono semirette opposte.

γ e δ adiacenti

DEFINIZIONE

Due angoli convessi sono **opposti al vertice** se i lati di uno sono le semirette opposte dei lati dell'altro.



Nella figura a lato, gli angoli α e β non sono opposti al vertice.

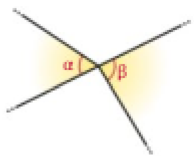
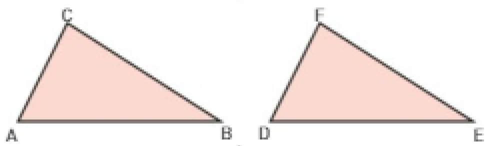


Figure congruenti

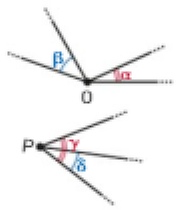
Sappiamo che due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi. Quindi due figure geometriche, che sono insiemi di punti, sono **uguali** solo se hanno gli stessi punti. Per esempio, nella figura a lato, i triangoli *ABC* e *BCA* sono uguali perché formati dagli stessi punti. In pratica, diciamo che due figure geometriche sono uguali solo se coincidono. I triangoli *ABC* e *DEF* invece, non sono uguali perché non sono formati dagli stessi punti. Se però li ritagliamo e li sovrapponiamo con un movimento che non li deformi, detto **movimento rigido**, vediamo che coincidono punto per punto.



Sono angoli convessi
L'angolo piatto, l'angolo giro e l'angolo nullo sono figure convesse, infatti:
- l'angolo *piatto* è un semipiano;
- l'angolo *giro* è costituito da tutti i punti del piano;
- l'angolo *nullo* coincide con una semiretta.

PROVA SUBITO

Spiega perché gli angoli α e β e γ e δ delle due figure seguenti *non* sono consecutivi.

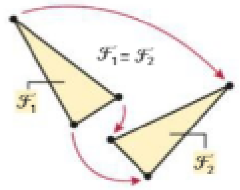


PROVA SUBITO

Disegna quattro semirette aventi la stessa origine O, chiamandole a, b, c e d in senso orario, in modo che $a\widehat{O}b$ e $c\widehat{O}d$ siano opposti al vertice. Come sono $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$? E $b\widehat{O}c$ e $a\widehat{O}d$?

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

In generale, richiamandoci alla nostra esperienza concreta, possiamo dire che due figure sono **congruenti** se possono essere sovrapposte punto per punto con un movimento rigido, cioè un movimento che avviene senza deformazioni, proprio come succede nel mondo reale se spostiamo un oggetto rigido. Il concetto di movimento rigido comprende traslazioni e rotazioni, ma anche la possibilità di «ribaltare» le figure, uscendo dal piano. Per esempio, per sovrapporre $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$, nella figura a lato, dobbiamo ribaltare $\mathcal{F}_1$.
Tuttavia, nella sistemazione teorica della geometria non è possibile definire in modo rigoroso che cosa intendiamo per movimento rigido. Per questo assumiamo la congruenza come *concetto primitivo*.
Per indicare la congruenza usiamo il simbolo $\simeq$.

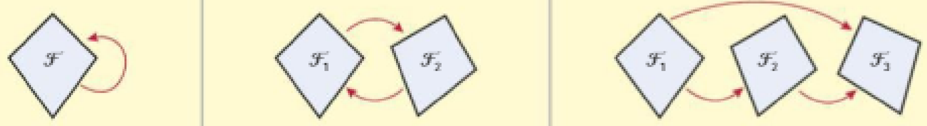


Valgono i seguenti **postulati della congruenza**.

POSTULATI

1. La congruenza tra figure è una relazione di equivalenza.

Proprietà riflessiva | Proprietà simmetrica | Proprietà transitiva



$\forall \mathcal{F}: \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$ | se $\mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_2$, allora $\mathcal{F}_2 \simeq \mathcal{F}_1$ | se $\mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2 \simeq \mathcal{F}_3$, allora $\mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_3$

2. Sono congruenti fra loro: tutte le rette, tutte le semirette, tutti i semipiani.

Poiché i semipiani sono congruenti fra loro, tutti **gli angoli piatti sono congruenti fra loro**.

Euclide e le definizioni

STORIA DELLA MATEMATICA

Oggi la geometria euclidea viene presentata partendo dagli *Elementi* di Euclide, ma a volte non coincide con il contenuto dell'opera, soprattutto per quanto riguarda le definizioni e i postulati.

Euclide con i suoi allievi (Raffaello, *Scuola di Atene*, 1508-1511, Roma, Musei vaticani).

Vediamo alcune delle prime definizioni proposte da Euclide, con il numero assegnato loro negli *Elementi*.

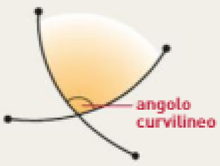
Punti e linee

1. Punto è ciò che non ha parti.
2. Linea è lunghezza senza larghezza.
3. Estremi di una linea sono punti.
4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa.

Abbiamo visto che una trattazione rigorosa della geometria prevede di lasciare alcuni enti non definiti (gli enti primitivi). Le prime «definizioni di Euclide» non vanno quindi considerate come vere e proprie definizioni, sono piuttosto un tentativo di descrivere gli enti riferendosi alla realtà concreta.

Angoli

8. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.
9. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.



Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

In base alla definizione **8** sono ammessi anche angoli *curvilinei*, cioè angoli i cui lati non sono rette. L'angolo come lo conosciamo noi viene chiamato da Euclide «angolo rettilineo» (definizione **9**). Osserva che la definizione di angolo si basa sul concetto di inclinazione, che però non viene definito.

- Con la definizione **8** Euclide esclude un angolo particolare, che noi invece utilizziamo. Quale?
- Cerca nel Web informazioni sui primi quattro postulati contenuti negli *Elementi* di Euclide.

3. Linee, poligonali, poligoni

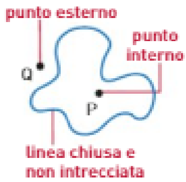
Esercizi a pagina G30

Linee

Aggiungiamo agli enti primitivi che già conosciamo la **linea**.
Se con la matita tracciamo un segno su un foglio senza mai alzare la punta, stiamo rappresentando una linea.

La retta può essere vista come un caso particolare di linea. Ogni linea che non sia una retta, una semiretta o un segmento viene detta **linea curva**.
Un tratto di curva compreso fra due suoi punti viene detto **arco**; i due punti si chiamano **estremi**.

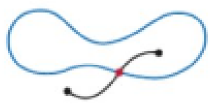
Fra le linee distinguiamo le **linee aperte** e le **linee chiuse**, quelle **intrecciate**, che intersecano se stesse in almeno un punto, e quelle **non intrecciate**.



Una linea chiusa e non intrecciata divide il piano in due insiemi: quello dei **punti interni** e quello dei **punti esterni** alla linea. La proprietà caratteristica che distingue i due insiemi è che nell'insieme dei punti esterni è possibile tracciare rette contenute nell'insieme stesso, mentre questo non è possibile nell'insieme dei punti interni.

POSTULATO

Partizione del piano mediante una linea chiusa
Una linea che congiunge un punto interno e un punto esterno di una linea chiusa la interseca in almeno un punto.

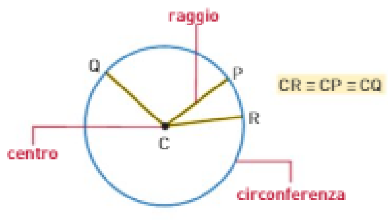


Consideriamo un punto C e tutti i punti P, Q, R, … tali che $CP \simeq CQ \simeq CR$…
Diciamo anche che P, Q, R, … hanno distanza uguale da C. L'insieme di tali punti è una particolare linea chiusa non intrecciata: la circonferenza.

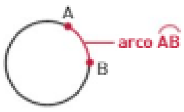
MATHS IN ENGLISH
A **circle** can be defined as the set of points with the same distance from a point.

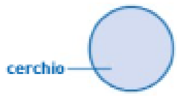
DEFINIZIONE

Dati su un piano i punti C e P, la **circonferenza** di **centro** C e **raggio** CP è l'insieme dei punti del piano che hanno da C distanza uguale a quella di P.



La parte di circonferenza compresa fra due suoi punti è un **arco**.
L'insieme dei punti di una circonferenza e di tutti quelli interni a essa è un **cerchio**.





Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

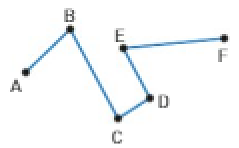
Ammettiamo il seguente **postulato della circonferenza**.

> **POSTULATO**
> Presi a piacere, in un piano, un punto e un segmento, esiste una sola circonferenza che ha per centro quel punto e per raggio quel segmento.

Poligonali

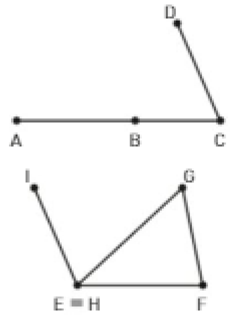
I concetti esaminati per le linee sono ripetibili in particolare per le poligonali.

> **DEFINIZIONE**
> Una **poligonale** o **spezzata** è un insieme di segmenti tale che:
> - ogni segmento è consecutivo ma non adiacente al successivo,
> - ogni estremo dei segmenti appartiene al massimo a due di essi.

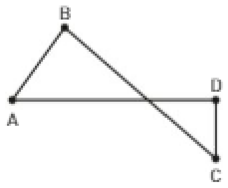


poligonale

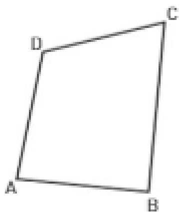
- Nella figura a lato, $ABCD$ non è una poligonale perché i segmenti AB e BC sono adiacenti. Anche $EFGHI$ non lo è perché l'estremo $E \equiv H$ è in comune a tre segmenti (EF, EG ed EI).



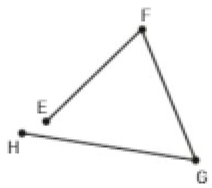
Una poligonale è **chiusa** se ogni estremo appartiene esattamente a due segmenti, altrimenti la poligonale è **aperta**. Una poligonale è **intrecciata** se almeno due segmenti si intersecano in un punto diverso dagli estremi.



poligonale chiusa intrecciata



poligonale chiusa non intrecciata



poligonale aperta non intrecciata

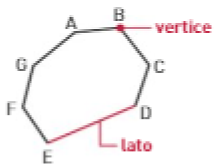
Poligoni

Nello studio della geometria euclidea hanno particolare importanza le figure che si generano tracciando poligonali chiuse e non intrecciate.

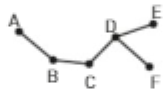
> **DEFINIZIONE**
> Un **poligono** è l'insieme dei punti di una poligonale chiusa e non intrecciata e di tutti i suoi punti interni.

In generale, un poligono può essere convesso o concavo. Per brevità, se non faremo altre precisazioni, useremo il termine *poligono* per indicare un poligono convesso.

In un poligono i segmenti che formano la poligonale sono i **lati** e i loro estremi sono i **vertici**.



PROVA SUBITO
Spiega perché la figura seguente *non* è una poligonale.

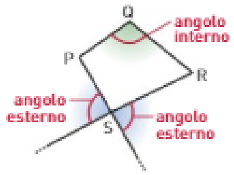


PROVA SUBITO
Disegna se è possibile un triangolo concavo, un quadrilatero concavo, un poligono di 5 lati concavo e uno convesso.

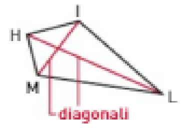
Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Gli angoli convessi formati dalle semirette di lati consecutivi di un poligono sono gli **angoli** del poligono, o **angoli interni**.

Invece, gli angoli adiacenti agli angoli interni sono gli **angoli esterni** del poligono; a ciascun angolo interno corrispondono due angoli esterni congruenti tra loro perché opposti al vertice. Per questo motivo parliamo di **angolo esterno** a un vertice di un poligono, senza precisare quale dei due consideriamo.



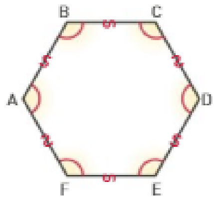
I segmenti che hanno per estremi due vertici del poligono che non appartengono allo stesso lato sono le **diagonali**.



Un poligono con tutti i lati congruenti è **equilatero**, con tutti gli angoli congruenti è **equiangolo**.
Un poligono è **regolare** se è equilatero ed equiangolo.

Classifichiamo i poligoni in base al numero dei lati.
Un triangolo ha 3 lati, un quadrilatero 4, un pentagono 5, un esagono 6, un ettagono 7, un ottagono 8, un ennagono 9, un decagono 10.

Le semirette che delimitano ogni angolo esterno di un poligono sono tali che una contiene un lato del poligono e l'altra è il prolungamento del lato a esso consecutivo.
Nessun angolo esterno ha entrambi i lati che sono prolungamenti.



esagono regolare

4. Operiamo con segmenti e angoli

Esercizi a pagina G32

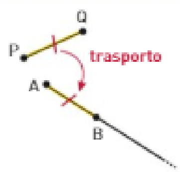
Confronto

Per confrontare segmenti è necessario poterli spostare in una qualsiasi posizione del piano. Ciò è necessario anche se si vogliono confrontare angoli.
Il trasporto di segmenti e di angoli è garantito dai seguenti postulati.

POSTULATI

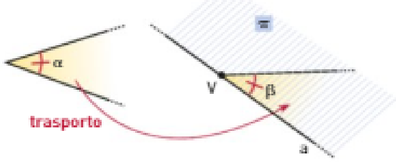
Trasporto di un segmento

- Consideriamo un segmento PQ e una semiretta di origine A.
- Sulla semiretta esiste, ed è unico, il punto B appartenente alla semiretta tale che $AB \simeq PQ$.



Trasporto di un angolo

- Consideriamo un angolo α e un semipiano π. Sulla retta che origina il semipiano prendiamo una semiretta a di origine V.
- Nel piano esiste, ed è unico, l'angolo $\beta \simeq \alpha$ con vertice V, un lato coincidente con a e l'altro appartenente al semipiano π.



Esaminiamo il procedimento per il confronto.

Confronto di segmenti

Dati i segmenti AB e PQ, sovrapponiamoli tra loro con un movimento rigido, in modo che A coincida con P.

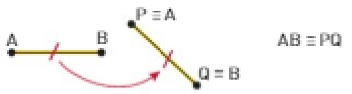
Confronto di angoli

Dati gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{rs}$, sovrapponiamo il primo al secondo con un movimento rigido, in modo che abbiano il vertice in comune e a coincida con r.

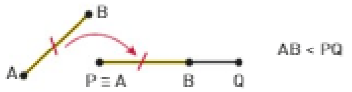
Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Si verifica sempre uno solo dei seguenti casi:

- $AB \simeq PQ$ se B *coincide* con Q;



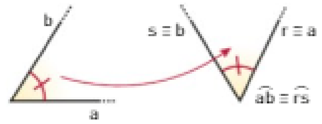
- $AB < PQ$ se B è *interno* a PQ;



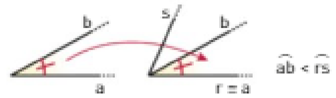
- $AB > PQ$ se B è *esterno* a PQ.

Si verifica sempre uno solo dei seguenti casi:

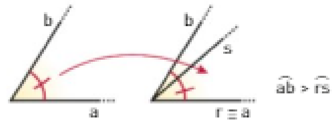
- $\widehat{ab} \simeq \widehat{rs}$ se b *coincide* con s;



- $\widehat{ab} < \widehat{rs}$ se b è *interna* a $\widehat{rs}$;



- $\widehat{ab} > \widehat{rs}$ se b è *esterna* a $\widehat{rs}$.

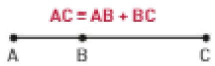


Addizioni e sottrazioni

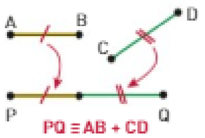
Anche i procedimenti per sommare o sottrarre segmenti o angoli sono molto simili.

Addizione e sottrazione di segmenti

- Se due segmenti AB e BC *sono adiacenti*, la loro **somma** è il segmento AC; scriviamo $AB + BC \simeq AC$.



- Se due segmenti *non sono adiacenti*, otteniamo la loro somma spostandoli con un movimento rigido, in modo che lo diventino.



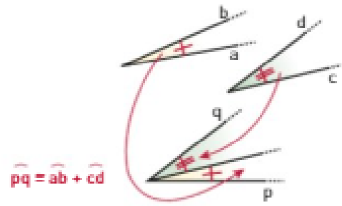
- Se $AB + BC \simeq AC$, diciamo che BC è la **differenza** tra AC e AB e scriviamo $BC \simeq AC - AB$.

La differenza $AB - CD$ fra due segmenti qualsiasi AB e CD non esiste se $AB < CD$.

Addizione e sottrazione di angoli

- Se due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ *sono consecutivi*, la loro **somma** è l'angolo $\widehat{ac}$ tale che $\widehat{ab} + \widehat{bc} \simeq \widehat{ac}$.

- Se due angoli *non sono consecutivi*, otteniamo la loro somma spostandoli con un movimento rigido, in modo che lo diventino.



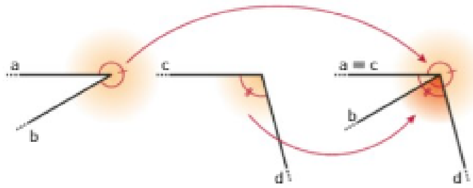
- Se $\widehat{ab} + \widehat{bc} \simeq \widehat{ac}$, diciamo che $\widehat{bc}$ è la **differenza** tra $\widehat{ac}$ e $\widehat{ab}$ e scriviamo $\widehat{bc} \simeq \widehat{ac} - \widehat{ab}$.

La differenza $\widehat{ac} - \widehat{ab}$ fra due angoli qualsiasi $\widehat{ac}$ e $\widehat{ab}$ non esiste se $\widehat{ac} < \widehat{ab}$.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

L'addizione di due angoli non è sempre possibile.

Consideriamo gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ in figura. È possibile eseguire la somma $\widehat{ab}+\widehat{cd}$?



Se spostiamo gli angoli con un movimento rigido in modo da sovrapporre il vertice e un lato, gli angoli hanno anche altri punti in comune e quindi non sono consecutivi. Pertanto non è possibile sommare $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$.

Nel paragrafo 5 vedremo una diversa definizione di angolo che permette di ottenere sempre la somma.
Valgono i seguenti postulati.

POSTULATI
- Somme o differenze di segmenti congruenti sono congruenti.
- Somme o differenze di angoli congruenti sono congruenti fra loro.

Inoltre, per l'addizione e la sottrazione di segmenti, oppure di angoli, valgono proprietà analoghe a quelle delle operazioni con i numeri:
- *proprietà commutativa* e *associativa* per l'addizione,
- *proprietà invariantiva* per la sottrazione.

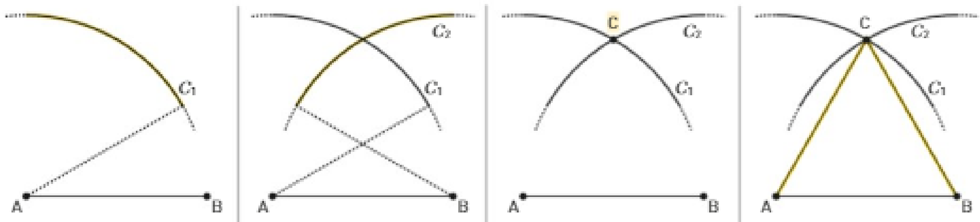
Il segmento nullo è l'*elemento neutro* dell'addizione fra segmenti, l'angolo nullo quello dell'addizione fra angoli.

Costruzioni con riga e compasso

Chiamiamo **costruzioni con riga e compasso** quelle costruzioni, caratteristiche della geometria euclidea, in cui possiamo utilizzare soltanto:
- il compasso, che serve per tracciare circonferenze o archi di circonferenza;
- la riga, che serve per congiungere punti e tracciare segmenti, mentre non può essere usata per misurare, come siamo abituati a fare.

Esaminiamo due costruzioni con riga e compasso.

Costruzione di un punto con uguale distanza dagli estremi di un segmento



Dato un segmento AB, puntiamo il compasso in A e con raggio AB tracciamo l'arco di circonferenza C_1.

Puntiamo il compasso in B e sempre con raggio AB tracciamo l'arco $\widehat{C_2}$.

I due archi si incontrano in C.

Con la riga, congiungiamo C con A e con B.

Se i segmenti (o gli angoli) da sommare sono tre, determiniamo la somma dei primi due e poi sommiamo il terzo al risultato ottenuto.

FLIPPED CLASSROOM

Operiamo con i segmenti

> A casa:
- analizzare, nel **Da sapere,** come si confrontano e si sommano due segmenti;
- esaminare le regole analoghe per gli angoli nell'Attività interattiva **Operiamo con gli angoli**;
- capire, con il **Per esempio**, come sommare operativamente due segmenti.

> In classe: usare riga e compasso per confrontare due segmenti e disegnare la loro somma.

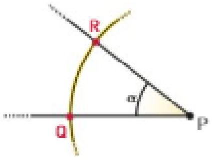
La differenza tra due segmenti (o angoli) congruenti è il segmento (o l'angolo) nullo.

I Greci ritenevano che rappresentare una grandezza utilizzando solo il compasso e la riga non graduata garantisse di ottenere delle figure dalle quali potessero essere misurati i valori cercati. Il processo di misura era infatti lecito soltanto per ricavare il risultato finale. Si imbatterono però in problemi che non potevano essere risolti utilizzando solo la riga e il compasso: la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo.

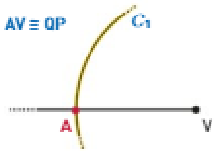
Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Giustifichiamo la costruzione della pagina precedente. $AC \simeq AB$ perché entrambi raggi di C_1 e $AB \simeq BC$ perché entrambi raggi di C_2, quindi $AC \simeq BC$ per la proprietà transitiva della congruenza.

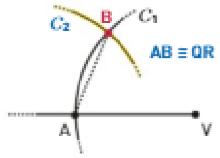
Costruzione di un angolo congruente a un angolo dato



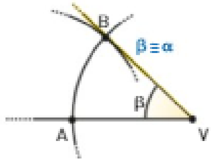
a. Disegniamo α di vertice P. Con centro P e raggio qualsiasi, tracciamo un arco di circonferenza che interseca i lati di α in Q e R.



b. Tracciamo una semiretta di origine V. Con centro V e raggio congruente a QP, tracciamo un arco C_1 che interseca la semiretta in A.



c. Con centro A e raggio congruente a QR, tracciamo un arco C_2 che interseca C_1 in B.



d. Tracciamo la semiretta VB. L'angolo cercato è $\beta = A\hat{V}B$: $\beta \equiv \alpha$.

La giustificazione della costruzione qui sopra sarà proposta come esercizio di applicazione del terzo criterio di congruenza nel capitolo G2.
È l'esercizio 117 di pagina G81.

5. Multipli e sottomultipli

Esercizi a pagina G33

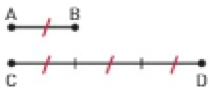
Multipli e sottomultipli di segmenti e di angoli

Consideriamo ancora in parallelo segmenti e angoli.

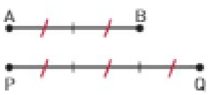
Multipli e sottomultipli di segmenti

- Dati un numero naturale n e un segmento AB, il segmento CD **multiplo** di AB secondo n è:
  - il segmento nullo, se $n = 0$;
  - AB, se $n = 1$;
  - la somma di n segmenti congruenti ad AB, se $n > 1$.

  In simboli: $CD \simeq nAB$, che si legge «CD è multiplo di AB secondo n».
- Se $n \neq 0$, CD è diviso in n parti congruenti ad AB e diciamo anche che AB è **sottomultiplo** di CD secondo n.
  In simboli: $AB \simeq \frac{1}{n}CD$, che si legge «AB è un n-esimo di CD».



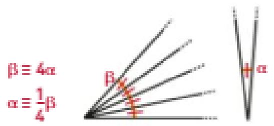
- Con $PQ \simeq \frac{m}{n}AB$ indichiamo $PQ \simeq m\left(\frac{1}{n}AB\right)$, ossia che PQ è multiplo secondo m del sottomultiplo secondo n di AB.



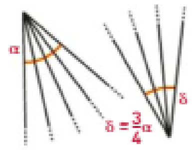
Multipli e sottomultipli di angoli

- Dati un numero naturale n e un angolo α, l'angolo β **multiplo** di α secondo n è:
  - l'angolo nullo, se $n = 0$;
  - α, se $n = 1$;
  - la somma di n volte α, se $n > 1$.

  In simboli: $\beta \simeq n\alpha$, che si legge «β è multiplo di α secondo n».
- Se $n \neq 0$, β è diviso in n parti congruenti ad α e diciamo anche che α è **sottomultiplo** di β secondo n.
  In simboli: $\alpha \simeq \frac{1}{n}\beta$, che si legge «$\alpha$ è un n-esimo di β».



- Con $\delta \simeq \frac{m}{n}\alpha$ indichiamo $\delta \simeq m\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$, ossia che δ è multiplo secondo m del sottomultiplo secondo n di α.

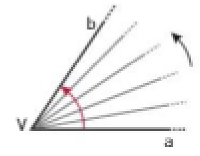


Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

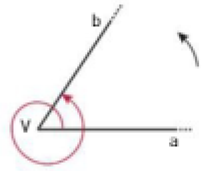
Nuova definizione di angolo

Per poter ottenere sempre i multipli degli angoli è necessario estendere il concetto di angolo in modo che esistano angoli maggiori di un angolo giro.

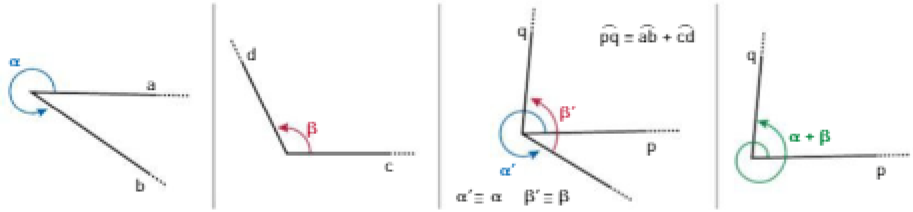
Consideriamo un angolo $a\widehat{V}b$ e un verso di rotazione, per esempio quello antiorario, come nella figura a lato. L'angolo può essere pensato come l'insieme delle semirette che si ottengono facendo ruotare, nel verso scelto, la semiretta *a* fino a farla coincidere con *b*.



Consideriamo ora tutte le semirette che si ottengono da una rotazione della semiretta *a*, come quella della figura a lato: l'angolo $a\widehat{V}b$ ottenuto dal movimento di *a* fino a sovrapporsi a *b* dopo aver effettuato un giro completo è un angolo maggiore di un angolo giro. La diversa e più ampia definizione di angolo che abbiamo esaminato permette di ottenere *sempre* la somma di due angoli.

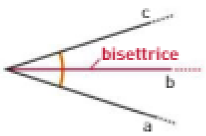


- Considera gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ della figura: l'angolo $\widehat{pq} \simeq \widehat{ab} + \widehat{cd}$ esiste ed è maggiore di un angolo giro.



Punto medio e bisettrice

DEFINIZIONE

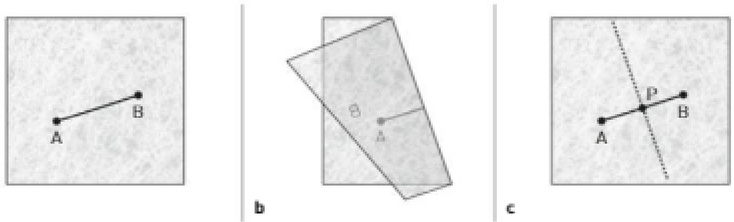
Il **punto medio** di un segmento è il punto che lo divide in due segmenti congruenti.	La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che lo divide in due angoli congruenti.
 $AM \equiv MB$ $AM \equiv \frac{1}{2}AB$ $AB \equiv 2AM$	 $\widehat{ab} \equiv \widehat{bc}$ $\widehat{ab} \equiv \frac{1}{2}\widehat{ac}$ $\widehat{ac} \equiv 2\widehat{ab}$

ESEMPIO

Piegando la carta lucida, possiamo sovrapporre punti, figure e le pieghe stesse che corrispondono a rette. La *geometria delle pieghe* è quella su cui si basano gli origami.

► Come possiamo «costruire» il punto medio di un segmento?

Prendiamo un foglio di carta lucida e con la matita segniamo due punti, *A* e *B*. Tracciamo il segmento *AB* (figura **a**). Pieghiamo la carta in modo che i due punti coincidano (figura **b**). Il punto *P* (figura **c**) in cui si intersecano la retta della piega e il segmento è il punto medio cercato, perché, sovrapponendo *B* ad *A*, abbiamo *AP* e *PB* coincidenti. Quindi *AP* e *PB* sono congruenti.



a **b** **c**

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Accettiamo come postulati l'esistenza e l'unicità del punto medio di un segmento e della bisettrice di un angolo.

POSTULATI

Dato un segmento qualsiasi, **esiste** ed è **unico** il suo punto medio.
Dato un angolo qualsiasi, **esiste** ed è **unica** la sua bisettrice.

Accettiamo come postulati anche le proprietà che seguono.

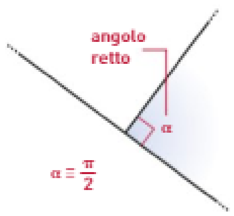
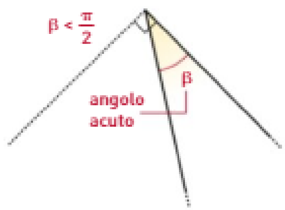
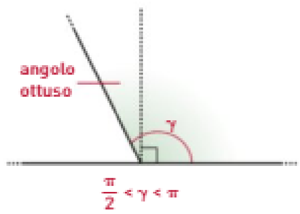
POSTULATI

1. Dati due segmenti (o due angoli) non nulli, è sempre possibile trovare un multiplo di uno dei due che supera l'altro.
2. Esiste, ed è unico, il sottomultiplo di un segmento (o di un angolo) secondo un numero naturale qualsiasi diverso da 0.
3. Multipli o sottomultipli secondo lo stesso numero di segmenti (o di angoli) congruenti sono congruenti.

Angoli retti, acuti, ottusi

DEFINIZIONE

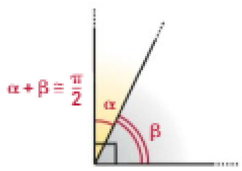
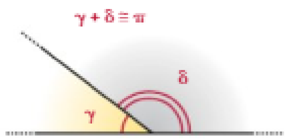
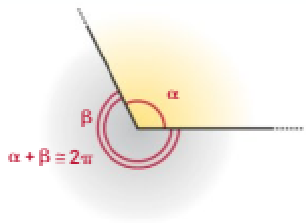
Un angolo:

metà di un angolo piatto è **retto**; lo indichiamo con $\frac{\pi}{2}$;	minore di un angolo retto è **acuto**;	maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto è **ottuso**.
		

Angoli complementari, supplementari, esplementari

DEFINIZIONE

Due angoli sono:

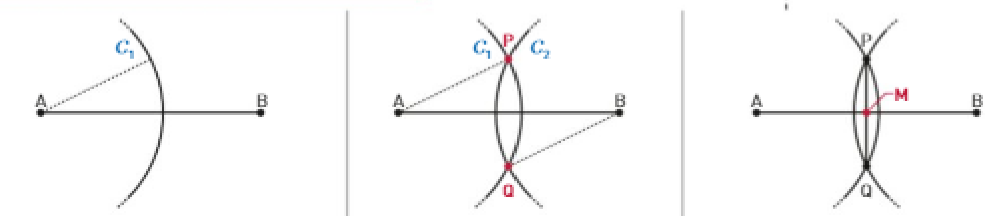
complementari se la loro somma è un angolo retto;	**supplementari** se la loro somma è un angolo piatto;	**esplementari** se la loro somma è un angolo giro.
		

Costruzioni del punto medio e della bisettrice

Esaminiamo le costruzioni con riga e compasso del punto medio di un segmento e della bisettrice di un angolo.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Costruzione del punto medio di un segmento



a. Disegniamo il segmento AB. Con centro A e raggio maggiore della metà di AB, tracciamo l'arco $\widehat{C_1}$.

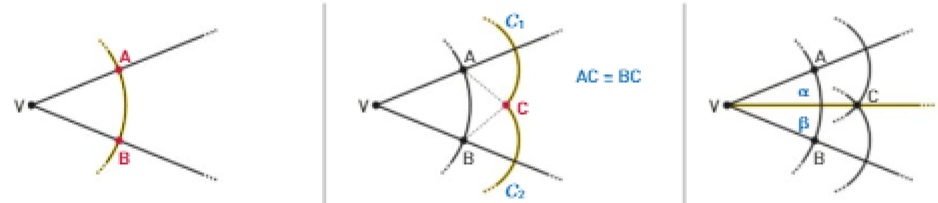
b. Con centro B e raggio uguale a quello di $\widehat{C_1}$, tracciamo l'arco $\widehat{C_2}$. I due archi si intersecano in P e Q.

c. PQ interseca AB nel suo punto medio M.

La giustificazione di questa costruzione ti sarà proposta nel capitolo G4, perché si basa sulle proprietà del parallelogramma e del rombo.

VIDEO
Individuazione del punto medio di un segmento

Costruzione della bisettrice di un angolo



Tracciamo l'angolo e un arco di raggio qualsiasi con centro nel vertice V. L'arco interseca i lati dell'angolo in A e B; quindi $VA \equiv VB$.

Con centri A e B disegniamo due archi $\widehat{C_1}$ e $\widehat{C_2}$, con raggi congruenti, che si intersecano in C; quindi $AC \equiv BC$.

Tracciamo la semiretta VC.

Potremo giustificare questa costruzione nel capitolo G2, utilizzando il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

VIDEO
Costruzione della bisettrice di un angolo

Prime dimostrazioni sugli angoli

Grazie alle definizioni e ai postulati che abbiamo dato, possiamo dimostrare alcuni teoremi sugli angoli.
In queste prime dimostrazioni puoi vedere come sia utile scrivere ipotesi e tesi e disegnare la figura prima di affrontare la dimostrazione vera e propria.

TEOREMA
Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.

Trasformiamo l'enunciato del teorema nella forma *se…*, *allora…* per individuare meglio ipotesi e tesi. *Se* l'angolo β è supplementare dell'angolo α, l'angolo δ è supplementare di γ e α è congruente a γ, *allora* β è congruente a δ.
Disegniamo la figura e scriviamo ipotesi e tesi in modo sintetico.

Ipotesi: α e β supplementari; γ e δ supplementari; $\alpha \simeq \gamma$.
Tesi: $\beta \simeq \delta$.

DIMOSTRAZIONE

$\alpha + \beta \simeq \pi \rightarrow \beta \simeq \pi - \alpha$; $\qquad \gamma + \delta \simeq \pi \rightarrow \delta \simeq \pi - \gamma$.

α e β sono supplementari $\qquad$ γ e δ sono supplementari

β e δ sono differenze di angoli congruenti, quindi sono congruenti.

ATTIVITÀ INTERATTIVA
Angoli complementari, supplementari, opposti al vertice

- Nel **Per esempio** le figure dinamiche mostrano che due angoli complementari di uno stesso angolo sono congruenti e che due angoli opposti al vertice sono congruenti.
- Nel **Prova tu** ci sono le dimostrazioni guidate a completamento di entrambe le proprietà.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

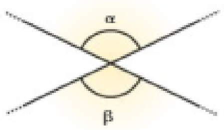
In modo analogo si può dimostrare il teorema seguente.

TEOREMA
Angoli complementari di angoli congruenti sono congruenti.

PROVA SUBITO
Dimostra il teorema enunciato a fianco.

Se due angoli sono congruenti quando sono supplementari di angoli congruenti, in particolare, sono congruenti se sono supplementari dello stesso angolo.
Possiamo allora dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA
Angoli opposti al vertice sono congruenti.



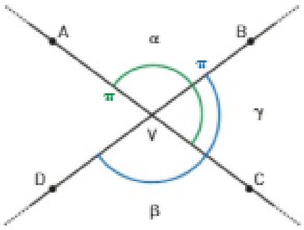
Ipotesi: α e β opposti al vertice.
Tesi: $\alpha \simeq \beta$.

COSTRUISCI CON GEOGEBRA
Angoli opposti al vertice
Costruisci due angoli opposti al vertice. Muovi gli elementi liberi della tua costruzione e verifica che i due angoli sono congruenti.

DIMOSTRAZIONE
Poiché gli angoli α e β sono opposti al vertice per ipotesi:

- $\alpha + \gamma \simeq \pi$ perché le semirette VA e VC sono su una stessa retta e $A\widehat{V}C$ è un angolo piatto;
- $\beta + \gamma \simeq \pi$ perché le semirette VD e VB sono su una stessa retta e $D\widehat{V}B$ è un angolo piatto.

α e β sono supplementari dello stesso angolo, quindi, per il teorema precedente, sono congruenti: $\alpha \simeq \beta$.



6. Lunghezze e ampiezze

Esercizi a pagina G37

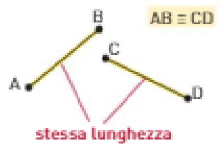
Lunghezze

Per la relazione di congruenza fra segmenti valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi la congruenza fra segmenti è una relazione di equivalenza. Possiamo allora dividere l'insieme dei segmenti in classi di equivalenza, ognuna contenente tutti i segmenti fra loro congruenti. Ogni classe di equivalenza indica una proprietà comune ai segmenti che le appartengono: la *lunghezza*.

DEFINIZIONE
La **lunghezza** di un segmento è la classe di equivalenza, della relazione di congruenza fra segmenti, a cui appartiene il segmento.

Due *segmenti congruenti* hanno *lunghezza uguale*.

Indichiamo una lunghezza con una lettera minuscola (a, b, c, ...) o precisando gli estremi di un segmento che abbia quella lunghezza (AB, PQ, EF, ...).
Le lunghezze si possono confrontare, sommare e sottrarre riferendosi ai segmenti relativi.
In particolare, il **perimetro** di un poligono è la lunghezza della somma dei suoi lati.



DEFINIZIONE
La **distanza fra due punti** è la lunghezza del segmento che congiunge i due punti.

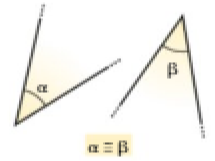
Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

Ampiezze

Quanto detto per segmenti e lunghezze può essere ripetuto per angoli e ampiezze.

La relazione di congruenza tra angoli è una relazione di equivalenza e l'ampiezza è la proprietà comune agli angoli congruenti fra loro.

DEFINIZIONE
L'**ampiezza** di un angolo è la classe di equivalenza della relazione di congruenza fra angoli a cui appartiene l'angolo.



Due *angoli congruenti* hanno *ampiezza uguale*.
Indichiamo le ampiezze come gli angoli ($A\widehat{B}C$, $\widehat{ab}$, α,...).

Misure

Per misurare la lunghezza di un segmento PQ, fissiamo la lunghezza di un altro segmento AB, non nullo, come **unità di misura**: se $PQ = \frac{m}{n}AB$, con $\frac{m}{n}$ numero razionale positivo o nullo, diciamo che $\frac{m}{n}$ è la **misura** della lunghezza di PQ rispetto ad AB e che le lunghezze PQ e AB sono **commensurabili**.

Possiamo scrivere l'uguaglianza come rapporto

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{m}{n}$$

e dire che il rapporto fra le lunghezze PQ e AB è $\frac{m}{n}$.

Indichiamo le misure con simboli come $\overline{PQ}$, $\overline{ED}$, $\overline{AC}$,...
Le misure sono dei numeri, quindi il simbolo $\overline{PQ}$ non va confuso con PQ, che indica un segmento o una lunghezza.

- Se consideriamo i segmenti della figura e prendiamo come unità di misura la lunghezza di AB, indicandola con u:

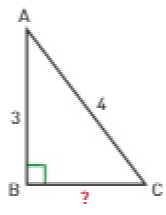
$$PQ = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{4}u \quad \rightarrow \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{3}{4}; \quad \overline{PQ} = \frac{3}{4}.$$

Di solito utilizziamo come unità di misura per le lunghezze il metro (m) e i suoi multipli o sottomultipli. Per esempio, il centimetro (cm) è il sottomultiplo del metro secondo il numero 100.

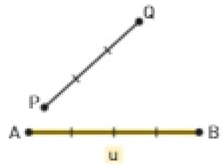
Il concetto di misura può essere esteso anche al caso di lunghezze incommensurabili, tali cioè che la misura di una rispetto all'altra non è un numero razionale. In questo caso la misura è un numero reale di cui, nei problemi, si può utilizzare un valore approssimato.

- Calcoliamo la misura del cateto BC del triangolo rettangolo ABC, in cui $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AC} = 4$.
  Applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \simeq 2{,}6.$$



Sulla tomba di Archimede
L'area del cerchio e quella del quadrato a esso circoscritto sono grandezze incommensurabili.
Il volume della sfera è invece commensurabile con il volume del cilindro a essa circoscritto.
Fu Archimede il primo a scoprire che il rapporto fra queste due grandezze è $\frac{2}{3}$.
A testimonianza di questa scoperta, i due solidi sono scolpiti sulla tomba di Archimede.



$PQ = \frac{3}{4}AB$; $\overline{PQ} = \frac{3}{4}$

PROVA SUBITO
Sul segmento AB considera un punto C tale che $AC \cong \frac{3}{5}CB$. Trova le misure delle lunghezze di AC e CB rispetto ad AB.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

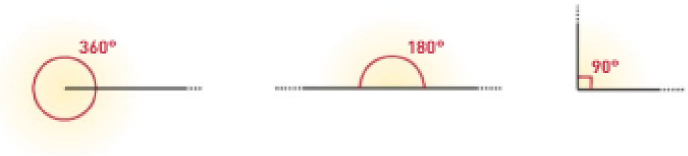
Per le misure delle ampiezze degli angoli valgono considerazioni analoghe a quelle viste per le lunghezze e le loro misure.

Se α e β sono le ampiezze di due angoli e $\alpha = \frac{m}{n}\beta$, con $\frac{m}{n}$ numero razionale positivo o nullo, diciamo che $\frac{m}{n}$ è la **misura** di α rispetto a β.

Indichiamo la misura dell'ampiezza α di un angolo ancora con α.

Utilizziamo come unità di misura delle ampiezze degli angoli il grado sessagesimale, sottomultiplo secondo il numero 360 dell'angolo giro.

Con questa unità di misura, un angolo giro ha ampiezza 360°, un angolo piatto ha ampiezza 180°, un angolo retto 90°.



Con la calcolatrice Le calcolatrici scientifiche sono impostate per rappresentare i numeri in notazione decimale. I sottomultipli del grado devono perciò essere espressi trasformando i *primi* e i *secondi* in un numero decimale. Per esempio, la misura 12,5° equivale a 12°30'.
Le calcolatrici supportano anche la rappresentazione dei numeri in *radianti*, un'unità di misura utilizzata spesso in fisica.

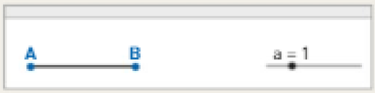
ESPLORA CON GEOGEBRA

Multipli e sottomultipli di un segmento

File già pronto

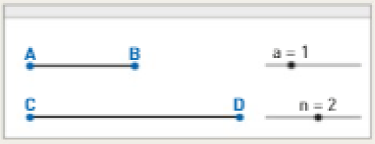
1 **Costruiamo** un segmento AB di lunghezza fissa che misura a.

- Selezioniamo lo strumento **Slider** e inseriamo il parametro a. Facciamo variare lo slider dal valore minimo 0 al valore massimo 10, con incremento 1.
- Con lo strumento **Segmento–Lunghezza Fissa**, costruiamo un segmento AB e digitiamo a nel campo della lunghezza.



2 **Costruiamo** il segmento CD multiplo di AB secondo n.

- Creiamo un altro **Slider** per il parametro n che varia da 0 a 10, con incremento 1.
- Con lo strumento **Segmento–Lunghezza Fissa**, costruiamo un segmento CD digitando $n * a$ per la lunghezza.



3 **Esploriamo la figura.** Con lo strumento **Distanza o Lunghezza** visualizziamo la lunghezza del segmento CD. Muoviamo gli slider e osserviamo quali valori assume $\overline{CD}$ al variare di n, tenendo fissa la lunghezza del segmento AB, per esempio con $a = \overline{AB} = 5$.

ORA PROVA TU

a. Con riferimento a quanto è stato ottenuto con il procedimento precedente, completa la tabella.

n	0	1	2	3
$\overline{CD}$	0	5	10	15

b. Ripeti la costruzione con $\overline{CD} = \frac{1}{n} \cdot a$. Come cambia $\overline{CD}$ al variare di n? Quale valore non può assumere n?

c. Con un procedimento analogo a quello utilizzato per i segmenti, studia i multipli e i sottomultipli di un angolo.

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright

ACCETTI LA SFIDA?

1 Mediante i postulati di appartenenza, dimostra che per un punto del piano passano infinite rette.

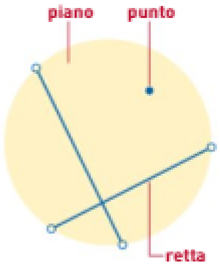
2 Considera due segmenti consecutivi non adiacenti. Stabilisci quante rette del piano intersecano entrambi i segmenti e dimostralo utilizzando i postulati di appartenenza e ordine. [infinite]

3 Considera $P = \{a, b, c, d, e\}$ un insieme qualsiasi di cinque elementi e R l'insieme di tutti i sottoinsiemi di P formati da due suoi elementi distinti. Se chiami «piano» l'insieme P, «punti» i suoi elementi e «rette» gli elementi di R, sono validi i primi tre postulati di appartenenza? Quante sono le «rette» in questo modello di «piano»? Sono validi anche i postulati d'ordine? [sì; 10; no]

4 Considera un qualsiasi cerchio C del piano, privato dei punti della circonferenza che lo delimita, e immagina il seguente modello di geometria:

1. C è il «piano» e i suoi punti sono i «punti del piano C»;
2. i segmenti privati dei loro estremi, che sono due punti della circonferenza, sono le «rette del piano C».

Quali dei postulati di appartenenza e d'ordine sono validi per questo modello?



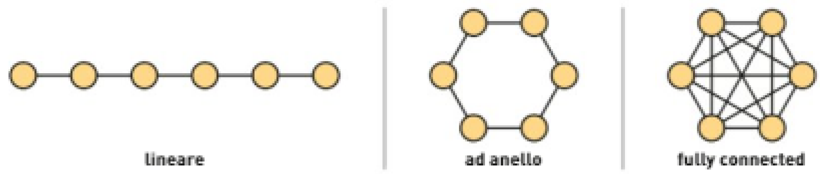
5 Sulla retta r disegna nell'ordine tre punti A, B e C tali che $BC \simeq 2AB$. Siano M e N i punti medi rispettivamente dei segmenti AB e BC, e sia P il punto medio del segmento MN. Dimostra che $AC \simeq 4MP$.

OCCHIO AI DATI Dove hai utilizzato l'ipotesi che $BC \simeq 2AB$? La congruenza che hai dimostrato è vera anche senza questa ipotesi?

6 **INFORMATICA** Roberto ha scritto un programma A che, dato un angolo, ne restituisce il supplementare e un programma B che, dato un angolo, ne calcola il complementare.
Applica 1021 volte consecutivamente il programma A partendo da un angolo di 30° e successivamente applicando il programma al risultato ottenuto dall'applicazione precedente.
Infine, al risultato ottenuto applica una volta sola il programma B.
Spiega perché l'output finale è un messaggio di errore.
[perché il programma B è applicato a un angolo non acuto di 150°]

7 Nel piano considera una retta t e due segmenti consecutivi ma non adiacenti PQ e QT che intersecano entrambi in un loro punto interno la retta t. Spiega perché si può affermare che l'intersezione tra il segmento PT e la retta t è vuota.

8 **TECNOLOGIA** La *topologia di rete* rappresenta le connessioni (*rami*) tra gli elementi (*nodi*) fondamentali di una qualsiasi rete di telecomunicazioni. In figura ci sono tre esempi.



Considera i nodi come punti e i rami come segmenti.

a. Descrivi ogni tipologia da un punto di vista geometrico, evidenziando le differenze con le altre due.

b. Trova la relazione tra il numero di nodi e di rami di ogni topologia e generalizzala per n nodi e r rami.

$\left[\text{b) } r = n - 1; r = n; r = \frac{n^2 - n}{2}\right]$

Riproduzione limitata: v. pagina del copyright