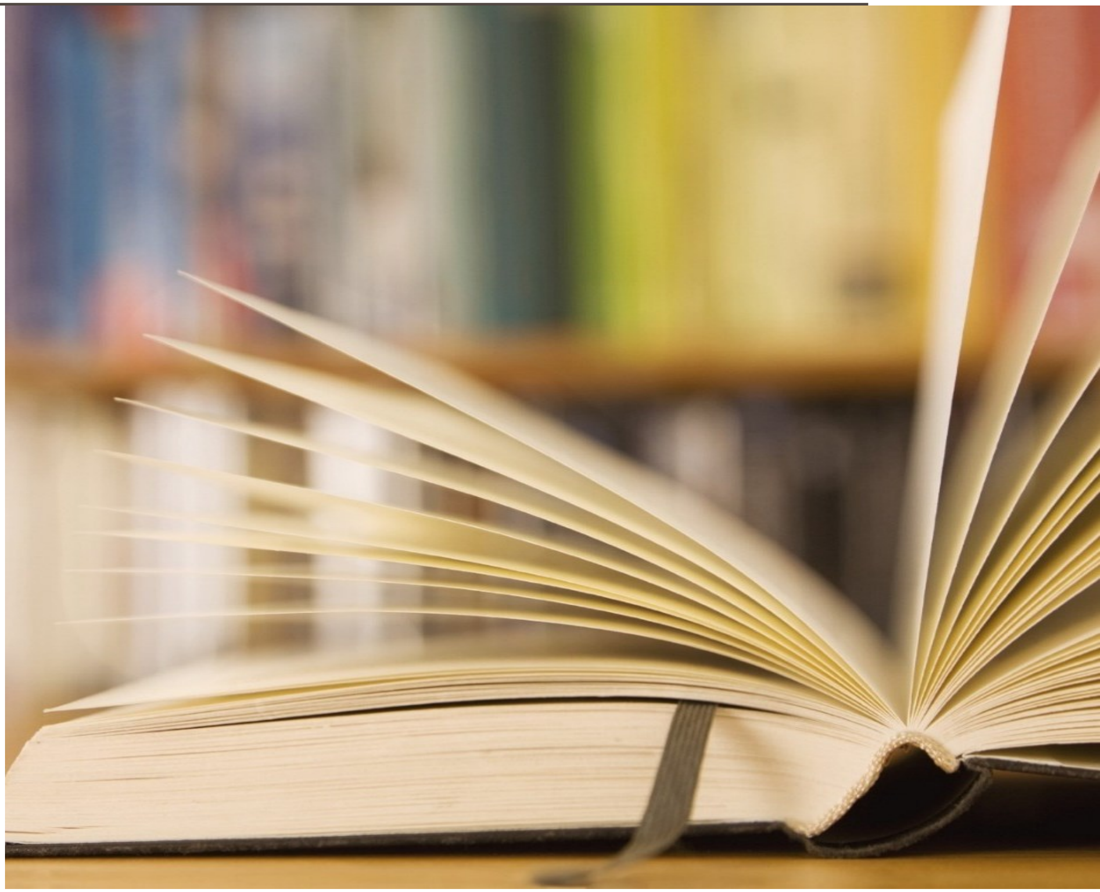
LA MATEMATICA GRECA

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore



EUCLIDE

Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico.

Albert Einstein, Come io vedo il mondo, 1954, La questione del metodo”, p. 46

EUCLIDE

- Fin dall'antichità, l’opera euclidea ebbe tanto successo da soppiantare tutti gli altri testi di geometria precedenti.
- I libri (oggi si chiamerebbero capitoli) che formano gli ***Elementi***, sono **tredici** e contengono in tutto **467 teoremi**.
- Alcune edizioni antiche degli ***Elementi*** contengono anche due libri in più, il ***XIV*** ed il ***XV***, ma è stato appurato che il libro ***XIV*** si deve ad Ipsicle (circa 150 a.C.), mentre il ***XV*** fu sostanzialmente composto nel VI secolo d.C.

EUCLIDE

Può apparire singolare il fatto che proprio Euclide, la cui opera principale, gli *Elementi*, sia stata nella storia, dopo la Bibbia, la più letta, la più diffusa e la più tradotta di tutti i testi antichi, sia invece come persona il più sconosciuto.

Di notizie attendibili su di lui vi è solo un passo di Proclo Diadoco (V sec. D.) da cui apprendiamo che egli dovette vivere ad Alessandria al tempo di Tolomeo I35; molti elementi inoltre fanno pensare che dovette essere uno dei primi scienziati
chiamati dal re per operare ed insegnare nel Museo.

Lo stesso Proclo prosegue il passo di cui sopra affermando che:
“Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli Elementi la costruzione delle figure chiamate platoniche.”

EUCLIDE

Secondo Proclo, gli ***Elementi*** di Euclide sono un testo scolastico che riunisce tutti quei concetti e teoremi che costituiscono il fondamento della matematica greca. È il solo pervenutoci di libri similari (Ippocrate da Chio etc.). L'elenco seguente dà il contenuto dei tredici libri:

Il **Libro I** contiene, le definizioni, i postulati e le nozioni comuni, le proprietà elementari dei triangoli e alcune delle principali costruzioni geometriche: la *bisettrice*, il *punto medio*, la *perpendicolare*, etc.

Il **Libro II** contiene la cosiddetta "**algebra geometrica**", la trattazione cioè di problemi che oggi risolviamo con equazioni di primo e secondo grado.

Il **Libro III** è interamente dedicato al cerchio.

Il **Libro IV** è dedicato ai poligoni regolari iscrittibili e circoscrittibili a un cerchio.

I Libri V e VI sono rispettivamente dedicati alla teoria delle proporzioni (il V) ed alla similitudine (il VI).

EUCLIDE

I Libri VII, VIIII e IX sono i cosiddetti “**libri aritmetici**”, dedicati alla trattazione delle proprietà dei numeri naturali [**notevole la IX,20 che dimostra l’infinità dei numeri primi**].

Il **Libro X**, il più lungo degli *Elementi* (**115 Proposizioni!**), tratta delle irrazionalità che noi esprimiamo con radicali quadratici (anche sovrapposti). Notevole la **X,1** che afferma l’esistenza di grandezze piccole a piacere.

.
Il Libro XI è dedicato alla trattazione della geometria solida elementare.

Il Libro XII è dedicato alla misura di superfici e volumi [**metodo di esaustione**].

.
Il **Libro XIII**, infine, tratta dei poliedri ed è introdotto da sei Proposizioni riguardanti la cosiddetta ***sezione aurea*** di un segmento.

EUCLIDE

Libro	Libri precedenti o Proposizioni da cui dipende
I	- (indipendente)
II	- **I**
III	- **I**; II,5-6
IV	- **I**; II,11; III
V	- (indipendente)
VI	- **I**; III,27-31; V
VII	- (indipendente)
VIII	- V, def.ni; VII
IX	- II,3-4; VII; VIII
X	- **I,44 e 47**; II; III,31; V; VI; VII,4, 11 e 26; IX, 1, 24 e 26
XI	- **I**; III,31; IV,1; V; VI
XII	- **I**; III; IV,6 e 7; V; VI; X,1; XI
XIII	- **I**; II,4; III; IV; V; VI; X; XI

È dunque evidente, a parte la complessità del Libro X, il più difficile dell'opera, la forte influenza che il **Libro I** esercita su tutta la struttura geometrica degli ***Elementi***: da esso dipendono infatti i Libri **II**, **III**, **IV**, **VI**, **XI**, **XII**, **XIII** e **parzialmente il X**.

EUCLIDE

Il Libro comprende le ***definizioni* preliminari**, i ***postulati***, gli ***assiomi*** o ***nozioni comuni***, e **48 teoremi**.

Le definizioni mirano a descrivere un ente geometrico.

Così, quando Euclide definisce il punto con la celebre definizione: ***Punto è ciò che non ha parti***, vuole soltanto descrivere l'ente geometrico ***punto***, con una nomenclatura soddisfacente, affinché lo si possa individuare facilmente.

Le definizioni sono in tutto **23**, e l'ultima è quella di rette parallele, sulla quale ritorneremo.

Dopo le definizioni, Euclide elenca **5 postulati** e **5 assiomi** (o nozioni comuni).

EUCLIDE

Definizioni preliminari

Si inizia poi con le seguenti quattro definizioni.

1. Il punto è ciò che non ha parti
2. Una linea è una lunghezza senza larghezza
3. Estremi di una linea sono punti
4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

Una critica che a volte è stata fatta a tali definizioni è che rimandano il concetto da definire ad altri concetti che non si sono definiti. Infatti per definire il punto si ricorre alla nozione di "parte", per definire le linee si utilizzano le nozioni di "lunghezza" e "larghezza", in 3 si usa la parola "estremi". Infine è alquanto oscuro che cosa significhi "giacere ugualmente".

Tali critiche sono però ingiustificate perché per i greci le definizioni avevano un significato completamente diverso da quello attuale. Il loro ruolo (in un certo senso precedente ed esterno alla elaborazione scientifica) era quello di indicare, in qualche modo, enti che si riteneva avessero una esistenza propria e di cui ogni uomo ha una idea chiara. Prima di cominciare una trattazione scientifica di tali oggetti era infatti necessario, per potersi capire, essere sicuri che si stava parlando delle stesse cose.

EUCLIDE

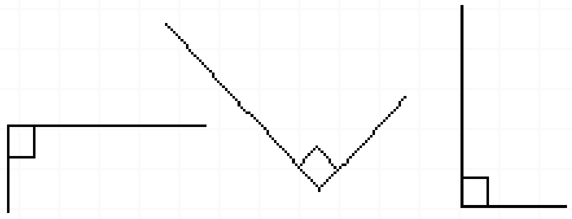
I *postulati*

P_1 Che si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi

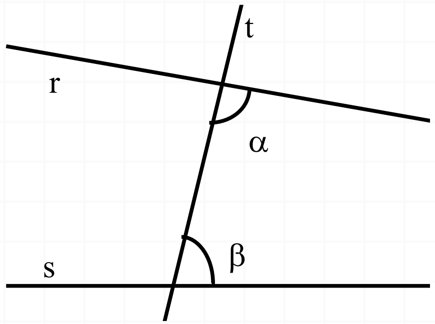
P_2 Che si possa prolungare indefinitamente una linea retta

P_3 Che si possa descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi

P_4 Che tutti gli angoli retti siano uguali



P_5 Che se una retta (t), intersecando due altre rette (r,s), forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti



EUCLIDE

Gli assiomi

1. Cose uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro
2. Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, le totalità sono uguali
3. Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali
4. Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;
5. Il tutto è maggiore della parte

Le nozioni comuni si differenziano dai postulati per il fatto di non appartenere esclusivamente alla geometria ma a tutte le scienze. Inoltre, in un certo senso, esse hanno un grado di certezza maggiore dei postulati. Da notare che sia le nozioni comuni che i postulati saranno chiamati dai matematici posteriori con il nome di assiomi.

EUCLIDE

1. Proposizioni costruttive:

I,1: *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.*

I,2: *Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.*

I,3: *Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

I,23: *Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo dato.*

EUCLIDE

2. I criteri di uguaglianza (congruenza) dei triangoli (I, 4-8-26) *e le proposizioni che servono immediatamente alla loro dimostrazione* (I, 7-24-25).

3. Le proprietà delle perpendicolari (I, 11-12) e *le relazioni fra gli angoli formati da due rette incidenti* (I, 13-14-15).

- **I,15: Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali.**

4. Le relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo (I, 5-6-16-17-18-19).

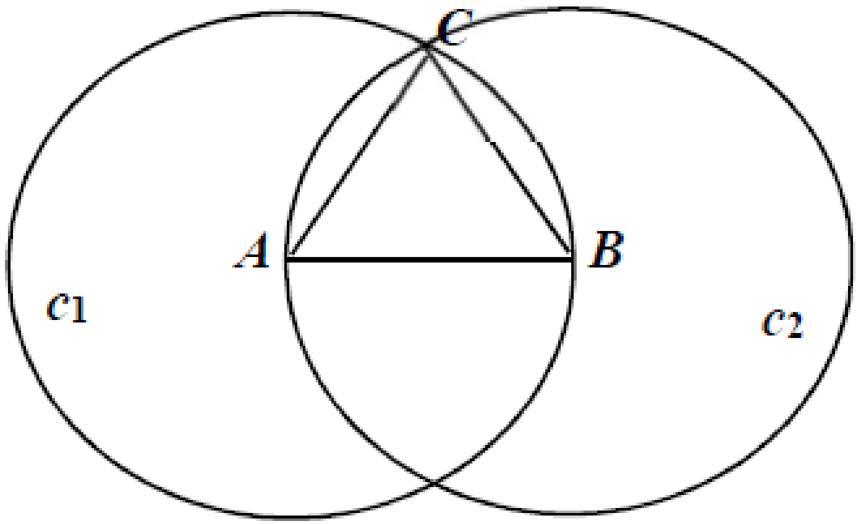
- **I,16-17: In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti. In ogni triangolo, la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.**

5. La teoria delle parallele (I,27-28-29-30-31).Dopo la transitività del parallelismo (I,31), si perviene all’importante «teorema dei due retti» (I,32), cui si riattaccano le proprietà elementari dei parallelogrammi (I,33-45), la costruzione del quadrato (I,46), il Th. di Pitagora (I,47) e il suo inverso (I,48)

EUCLIDE

Proposizione 8.1. E’ possibile, dato un segmento AB, costruire un triangolo equilatero di lato uguale ad AB.

Dim.
Si tracci la circonferenza c1 di centro A ed apertura AB e la circonferenza c2 di centro B ed apertura BA e sia C il punto di incontro di tali circonferenze.
Allora il triangolo ABC è equilatero.
Infatti AC è uguale ad AB in quanto entrambi raggi di c1 e CB è uguale ad AB in quanto raggi di c2.



Come si vede si tratta di una dimostrazione semplice ed elegante …, purtroppo proprio in questa che è la prima delle dimostrazioni presente negli Elementi di Euclide si presenta un errore !

EUCLIDE

Proposizione 8.2.
La dimostrazione della Proposizione 8.1 è sbagliata.
Inoltre nel sistema di assiomi di Euclide non possono esistere dimostrazioni corrette di tale proposizione.

Dim.
L’errore consiste nell’asserire, senza che sia stato dimostrato, che le due circonferenze si incontrano in un punto C. Per potere dimostrare questo fatto è necessario un postulato ulteriore, detto postulato di continuità che analizzeremo nel seguito. Nei suoi Elementi Euclide non pone in modo esplicito tale postulato
anche se poi di fatto lo utilizza. Naturalmente si potrebbe anche pensare di trovare una dimostrazione diversa che non usi la proprietà di continuità. Purtroppo una tale dimostrazione non può esistere. Infatti consideriamo un modello di geometria in cui i punti sono gli elementi del prodotto cartesiano QxQ, cioè le coppie di numeri razionali ed in cui una retta è l’insieme dei punti che soddisfano una data equazione di
primo grado a coefficienti razionali. Chiamiamo piano razionale tale modello. Non è difficile controllare che nel piano razionale tutti i postulati di Euclide sono verificati e quindi lo sono anche tutti teoremi che seguono da tali postulati. Se allora si potesse dimostrare la Proposizione 8.1, tale proposizione dovrebbe essere verificata dal piano razionale. Ciò non è vero. Infatti consideriamo i punti A = (-1,0) e B = (1,0), e supponiamo che esista C tale che ABC sia equilatero. Allora tale punto dovrebbe essere del tipo (0,q) e, per il teorema di Pitagora, q2 dovrebbe essere uguale a 3. Non esistendo un razionale il cui quadrato sia 3, ciò è assurdo.

EUCLIDE

Teoria delle grandezze omogenee (invece dei numeri reali)

Le nozioni di classe di grandezze omogenee e di proporzione tra grandezze omogenee si trovano nel libro V degli Elementi di Euclide e sembrano risalire a Eudosso di Cnido, vissuto pochi decenni prima di Euclide. Tali nozioni permettono ai greci di fare molte delle cose che attualmente vengono fatte ricorrendo ai numeri reali positivi. Negli Elementi non viene proposto un sistema di assiomi completo per la nozione di classe di grandezze omogenee e spesso Euclide utilizza proprietà dettate dall’intuizione. Invece noi proviamo a proporre il seguente sistema di assiomi.

EUCLIDE

I criterio di congruenza

« *Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l’angolo compreso rispettivamente congruenti* »

Questo criterio va preso come postulato. Euclide ne dà una dimostrazione, effettuata tramite il trasporto di segmenti e di angoli (I, 4). Questo metodo, tuttavia, non è valido, come è stato mostrato dalla matematica moderna, quindi l'intera dimostrazione viene invalidata, come ha fatto notare David Hilbert. Questo criterio costituisce l'assioma III.6 degli assiomi di Hilbert. Esso non può essere generalizzato nella forma *due triangoli sono congruenti se hanno un angolo, uno dei lati ad esso adiacenti e il lato ad esso opposto ordinatamente congruenti*, come si fa nel *secondo criterio*. Viene chiamato anche *Criterio LAL* (Lato-Angolo-Lato)

EUCLIDE

II criterio di congruenza

« Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli a esso adiacenti rispettivamente congruenti »

Se si ammette valido il quinto postulato di Euclide, si può dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale ad un angolo piatto; per questo motivo, se si conoscono due angoli di un triangolo è sempre possibile determinarne il terzo, e quindi il criterio è generalizzabile in: *Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti*.
Il secondo criterio (nella sua formulazione originale) è però dimostrabile senza far uso del quinto postulato di Euclide. Per questo i libri di testo sono soliti riportare entrambe le formulazioni, e spesso la seconda (quella che fa uso del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo) viene detta *secondo criterio generalizzato*.
Viene chiamato anche *Criterio ALA* (Angolo-Lato-Angolo).

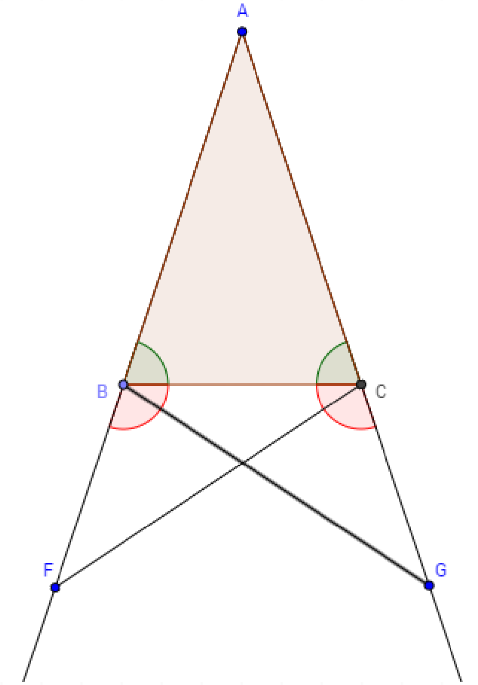
EUCLIDE

« *Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti* »

In *Elementi I, 8* Euclide dà una dimostrazione di questo teorema utilizzando il movimento rigido.
Come avviene per la proposizione I, 4 (primo criterio di congruenza), la dimostrazione euclidea non è valida, ma la matematica moderna si avvale di un'altra dimostrazione per la quale questo criterio non va considerato postulato.
Viene chiamato anche *Criterio LLL* (Lato-Lato-Lato).

EUCLIDE

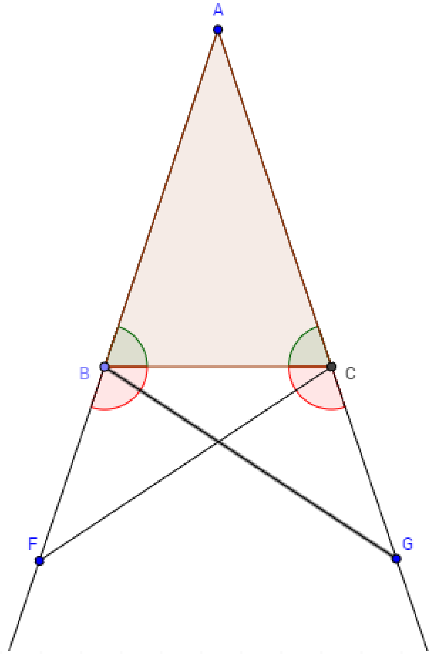
Proposizione I.5 (teorema del pons asinorum)
Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro



Sia *ABC* un triangolo isoscele che ha il lato *AB* uguale al lato *AC* (Def.1-20), e si prolunghi avanti in linea retta con *AB* e *AC* le rette *BD* e *CE* (Post.2): dico che l'angolo *ABC*è uguale all'angolo *ACB*, l'angolo *CBA* è uguale all'angolo *BCE*.

Si prenda un punto arbitrario F su BD e si sottragga dalla maggiore AE una retta AG uguale alla minore AF (Prop.1-3), e si congiungano le rette FC e GB (Post.1).

EUCLIDE

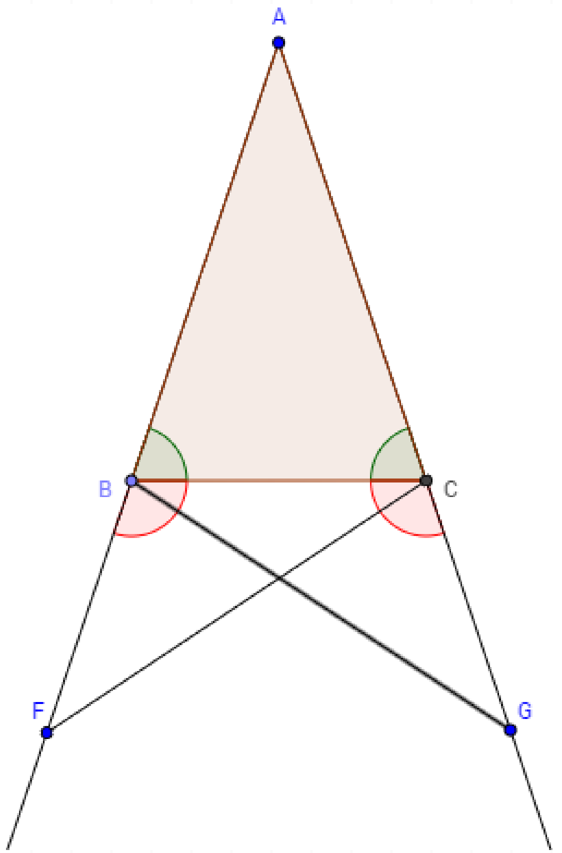


Dimostrazione:

Poiché AF è uguale a AG, e AB è uguale a AC, i due lati FA e AC sono quindi uguali rispetivamente ai due lati GA e AB, e comprendono l'angolo FAG in comune. La base FC è quindi uguale alla base GB, il triangolo AFC è uguale al triangolo AGB, e i restanti angoli sono uguali rispettivamente ai restanti angoli, cioè quelli opposti ai lati uguali, cioè, l'angolo ACF è uguale all'angolo ABG, e l'angolo AFC è uguale all'angolo AGB (Prop.1-4).

E poiché AF totale è uguale a AG totale, e in questi AB è uguale a AC, il restante BF è quindi uguale al restante CG (NC3). Ma FC è stato dimostrato uguale a GB, i due lati BF e FC sono quindi uguali rispettivamente ai due lati CG e GB, e l'angolo BFC è uguale all'angolo CGB, mentre la BC è in comune tra loro. Il triangolo BFC è quindi uguale al triangolo CGB, e i restanti angoli sono uguali rispettivamente ai restanti angoli, cioè quelli opposti ai lati uguali (Prop.1-4). L'angolo FBC è quindi uguale all'angolo GCB, e l'angolo BCF è uguale all'angolo CBG.

EUCLIDE



Poiché dunque l'angolo ABG totale è stato dimostrato uguale all'angolo ACF, e in questo l'angolo CBG è uguale all'angolo BCF, il restante angolo ABC è uguale al restante angolo ACB, ed essi sono angoli alla base del triangolo ABC (CN3). Ma l'angolo FBC è stato pure dimostrato uguale all'angolo GCB, e sono angoli sotto la base

EUCLIDE

Teorema diretto del triangoli isosceli

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

Ipotesi: $AC \cong BC$
Tesi: $B\hat{A}C \cong A\hat{B}C$

Dimostrazione

Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C .

I triangolo ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

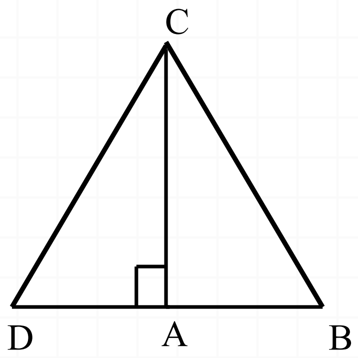
$AC \cong BC$ per ipotesi, CK lato in comune

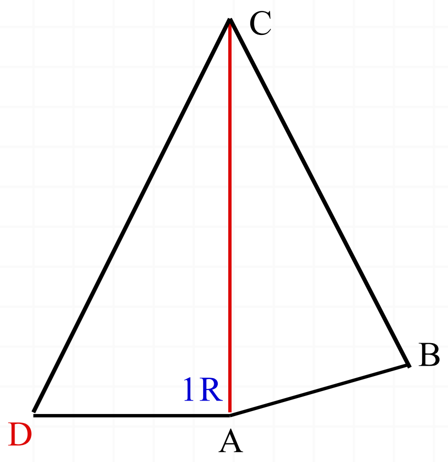
$$A\hat{C}K \cong B\hat{C}K$$

perché CK è la bisettrice dell'angolo in C .

Pertanto, essendo congruenti hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo in A è congruente all'angolo in B. Q.e.d.

Teorema I.48: *Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l'angolo contenuto dai due lati rimanenti è retto*

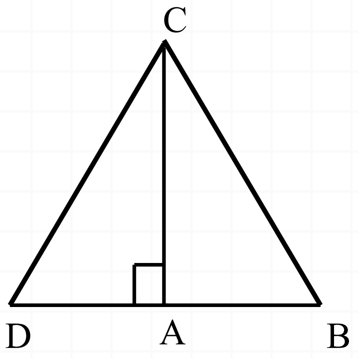


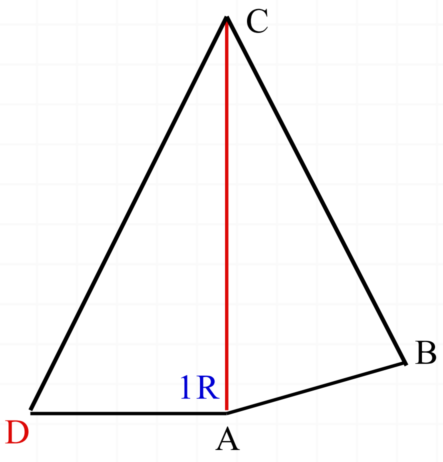


L’ipotesi è che $BC^2 = AB^2 + AC^2$, e si tratta di dimostrare che l’angolo BAC è retto.

Dal punto A del lato AC si tiri la AD ⊥re ad AC [I.11]. Su AD si prenda il punto D tale che AD = AB [I.3]. Si congiunga D con C.

Dal momento che il triangolo ADC è rettangolo, la I.47 dà: $AD^2 + AC^2 = DC^2$.





Poiché AB = AD, dalla ipotesi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ segue: $AD^2 + AC^2 = BC^2$.

Si hanno allora le due relazioni:

$AD^2 + AC^2 = BC^2$

$AD^2 + AC^2 = DC^2$

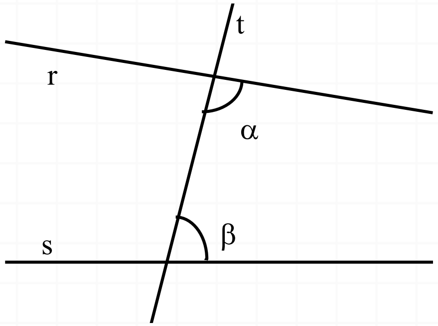
Da esse segue: $BC^2 = DC^2$ e quindi BC = DC.

Ma allora i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio [I.8], per cui l'angolo CAB è congruente all'angolo DAC. Ma l'angolo DAC è retto per costruzione, dunque anche l'angolo CAB è retto.

EUCLIDE

Ripartiamo dall’enunciato euclideo del V postulato:

Se una retta (t) che interseca due altre rette (r,s) forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

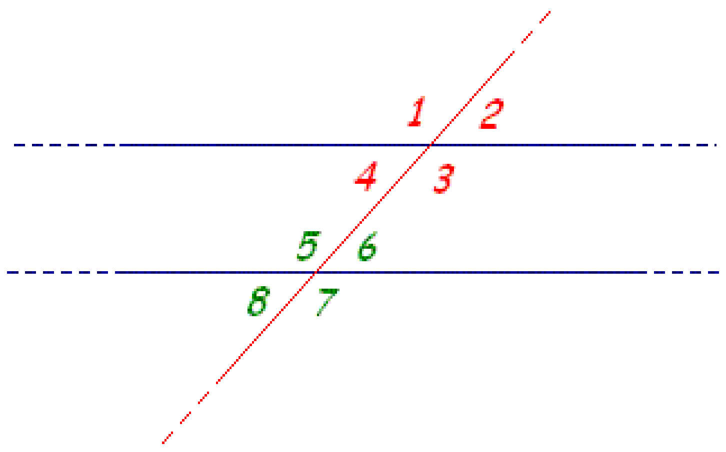


Leggendo il testo, ci si accorge subito che la sua formulazione non ha la semplicità e l'evidenza dei primi quattro postulati. Esso, in realtà, sembra più un teorema da dimostrare che un postulato da accettare. La sua struttura è infatti del tipo “se ... allora”.

Euclide lo introduce solo dopo i primi 28 teoremi, dimostrati con l'ausilio dei primi quattro postulati. Perché? Perché ne ha bisogno per dimostrare il teorema I,29 che è l'inverso del teorema I,27-28.

EUCLIDE

Se due rette r ed s vengono tagliate dalla trasversale t, si formano 8 angoli che possono essere così denominati

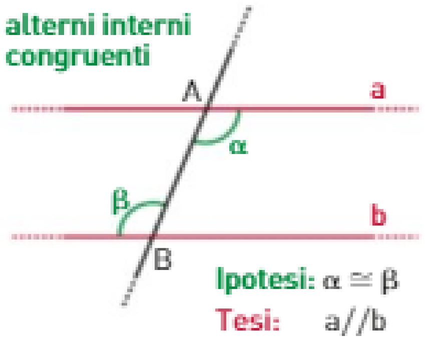


Le coppie 1-5, 2-6, 4-8, 3-7 si chiamano CORRISPONDENTI.
Le coppie 4-6, 3-5 si chiamano ALTERNI INTERNI.
Le coppie 1-7, 2-8 si chiamano ALTERNI ESTERNI.
Le coppie 4-5, 3-6 si chiamano CONIUGATI INTERNI.
Le coppie 1-8, 2-7 si chiamano CONIUGATI ESTERNI.

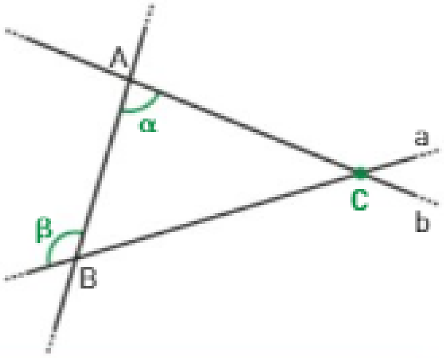
Criterio di parallelismo

TEOREMA

Condizioni sufficienti per il parallelismo
Se due rette distinte tagliate da una trasversale formano angoli alterni (interni o esterni) congruenti oppure angoli corrispondenti congruenti oppure angoli coniugati (interni o esterni) supplementari, allora le rette sono parallele.



DIMOSTRAZIONE
Consideriamo il caso in cui siano congruenti due angoli alterni interni: $a \cong b$.
Ragioniamo per assurdo.
Supponiamo che a non sia parallela a b (negazione della tesi). Allora a e b si incontrano in un punto C. Poiché per ipotesi a , b , nel triangolo ABC l’angolo esterno b è congruente all’angolo interno a . Ma ciò contraddice il teorema per cui ogni angolo esterno di un triangolo è maggiore di ogni angolo interno non adiacente. È dunque assurdo supporre che le rette si incontrino, quindi sono parallele.



Criterio di parallelismo

Da questa dimostrazione ricaviamo la seguente proprietà.

Se due rette a e b sono perpendicolari a una stessa retta r, allora sono tra loro parallele.

TEOREMA
Esistenza della parallela
Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, esiste sempre una retta passante per P e parallela a r.

Se le rette sono parallele

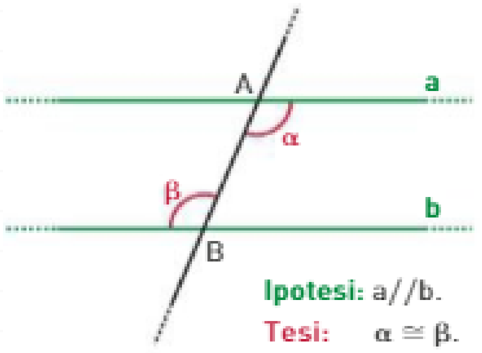
Postulato delle parallele (quinto postulato di Euclide)
Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, è unica la retta passante per P e parallela a r.

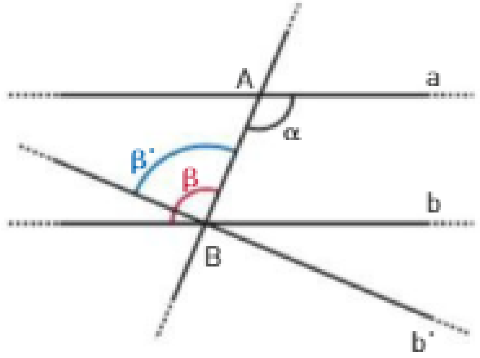
Le Geometrie non euclidee
Il quinto postulato di Euclide è molto meno immediato dei precedenti, al punto che si ipotizzò che si potesse dimostrare. I matematici provarono quindi a negarlo, nella speranza di giungere a conclusioni assurde (dimostrazione per assurdo).
Uno dei modi per negare il quinto postulato è affermare che **le rette parallele a una retta data e passanti per un punto esterno sono infinite**. Questa negazione non portò a un assurdo ma alla nascita di una nuova geometria, diversa da quella euclidea: **la geometria iperbolica**. Si può negare il quinto postulato anche affermando che **non esistono rette parallele a una retta data passanti per un punto esterno**. Questa ipotesi portò alla nascita della **geometria ellittica**.

Inverso del criterio di parallelismo

TEOREMA
Condizioni necessarie per il parallelismo
Se due rette sono parallele, allora tagliate da una trasversale formano: angoli alterni congruenti e angoli corrispondenti congruenti e angoli coniugati supplementari.

DIMOSTRAZIONE
Dimostriamo che gli angoli alterni interni sono congruenti.
Scriviamo ipotesi e tesi come in figura e ragioniamo per assurdo. Supponiamo che α non sia congruente a β (negazione della tesi). Precisamente, supponiamo $\alpha < \beta$.
Per B conduciamo la retta b' tale che $\beta' \cong \alpha$.





Per il criterio di parallelismo b' è parallela ad a, quindi per B passano due parallele ad a. Ciò è assurdo, perché contraddice il postulato delle parallele. Non è vero che α e β non sono congruenti, quindi $\alpha \cong \beta$.

Teorema dell'angolo esterno di un triangolo

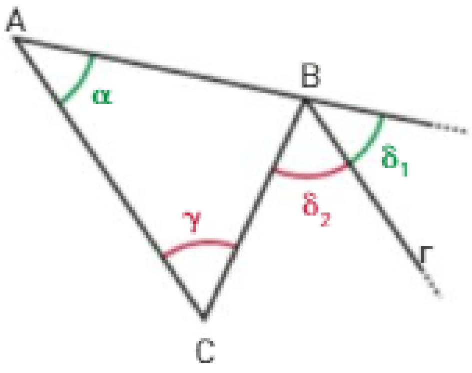
TEOREMA
Angolo esterno di un triangolo.
In un triangolo, ogni angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti.

DIMOSTRAZIONE

Per B tracciamo la semiretta r parallela ad AC che divide l'angolo δ in due angoli, δ_1 e δ_2.

- $\delta_1 \cong \alpha$ perché angoli corrispondenti delle parallele AC e r tagliate da AB;
- $\delta_2 \cong \gamma$ perché angoli alterni interni delle parallele AC e r tagliate da BC;
- $\delta \cong \delta_1 + \delta_2$, quindi:

$$\delta \cong \alpha + \gamma.$$



Somma degli angoli interni di un triangolo

TEOREMA
Somma degli angoli interni di un triangolo
In un triangolo, la somma degli angoli interni è congruente a un angolo piatto.

DIMOSTRAZIONE

- In B, l'angolo esterno δ è adiacente all'angolo β, quindi:

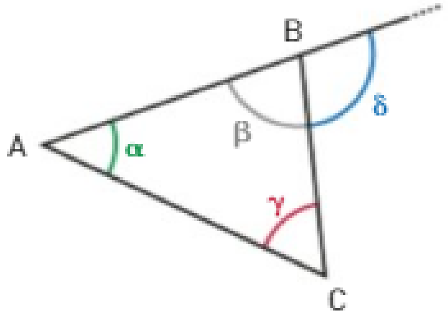
  $$\delta + \beta \cong \pi.$$

- Per il teorema dell'angolo esterno:

  $$\delta \cong \alpha + \gamma.$$

- Sostituendo nella prima relazione:

  $$\alpha + \gamma + \beta \cong \pi.$$



Tocca a te!

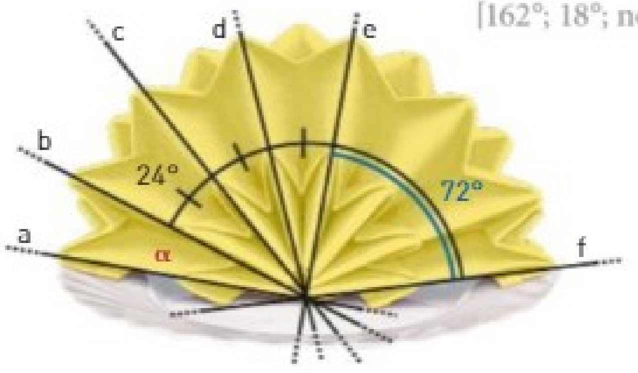
Dimostra che, se in un triangolo la bisettrice di un angolo interno è perpendicolare al lato opposto, allora il triangolo è isoscele

Sui lati a e b di un angolo di vertice O considera rispettivamente un punto A e un punto B. Traccia gli assi dei segmenti OA e OB che si incontrano nel punto P. Dimostra che $AP \cong BP$

Dimostra che, se il quadrilatero convesso ABCD è tale che il vertice A coincide con il punto di intersezione degli assi dei lati BC e CD, allora $\widehat{ABD} \cong \widehat{ADB}$.

INTORNO A NOI Utilizzando le informazioni in figura e sapendo che $a \perp e$, trova l'ampiezza dell'angolo di apertura del tovagliolo e l'ampiezza α di $\widehat{ab}$. Stabilisci inoltre se $d \perp f$.

[162°; 18°; no]



Nel triangolo isoscele ABC tracciamo la mediana AM relativa alla base BC e consideriamo il punto di intersezione Q tra il lato AB e l'asse del segmento BM. Dimostriamo che QM è parallela ad AC