Συλλογισμός
Syllogismos

History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Appunti di didattica della matematica
(a cura di G.T. Bagni)

Capitolo 4
Il contratto didattico

4.1. CONTRATTO E CLAUSOLE

4.1.1. Un contratto mai firmato

Il rapporto tra l'insegnante e l'allievo, quel ricco e delicato complesso di interazioni, di comportamenti che deve (o che dovrebbe) avere quale prodotto finale l'apprendimento, è costituito da atteggiamenti, da richieste, da risposte, da un insieme di fasi e di momenti che si influenzano vicendevolmente e che sembrano ripetersi giorno dopo giorno, mese dopo mese.

Spesso, nella nostra attività di insegnanti, ci è capitato di basare il nostro rapporto con gli allievi su regole non scritte, su convenzioni implicite che vengono accettate continuamente e spontaneamente sia dal docente che dal discente. Anzi, talvolta sembra quasi che queste (mai dichiarate) norme di comportamento siano perfettamente conosciute da entrambe le parti in gioco, come se costituissero una sorta di contratto la cui validità sia indiscutibilmente nota e chiara per tutti. Un contratto mai firmato, ma non per questo meno importante, tale da influenzare, anche in termini decisivi, l'insegnamento e l'apprendimento.

Un esempio per introdurre la questione: l'insegnante di matematica è solito dedicare la prima ora del martedì ad alcune interrogazioni; dunque ogni martedì egli entra in classe, chiama (uno dopo l'altro) quattro studenti e propone a ciascuno di essi un esercizio. Lo studente chiamato lascia il proprio banco, si avvicina alla lavagna e cerca di risolvere l'esercizio proposto. Se l'esercizio sarà risolto correttamente, ovvero se lo studente riuscirà a determinare il risultato finale esatto, l'insegnante annoterà una valutazione positiva (ovvero un numero non minore di 6) sul proprio registro; nel caso di fallimento, invece, l'insegnante scriverà sul registro un numero minore di 6. Tutto chiaro, tutto previsto. L'insegnante non perderà tempo a spiegare, ogni martedì, il funzionamento della prova, le "regole del gioco" (o del "contratto"). Lo studente chiamato, una volta che si troverà di fronte alla lavagna alle prese con un'equazione, non chiederà all'insegnante informazioni sul da farsi: egli sa bene che c'è una x e che di quella x egli dovrà trovare il valore incognito, dopo avere scritto (ordinatamente, in modo comprensibile) tutta una serie di passaggi esplicativi. Solo così il fatidico numerino, su quel temibile registro, sarà non minore di 6; e dunque solo così egli si incamminerà verso l'agognata promozione, infallibilmente. Tutto secondo copione. Tutto secondo "contratto".

Già nel 1973 J. Filloux ipotizzò la presenza di un *contratto pedagogico* tale da collegare e da influenzare reciprocamente i comportamenti dell'insegnante e dell'allievo (Filloux, 1973). Nel 1986 G. Brousseau perfezionò questa idea, inizialmente incentrata sulla dimensione sociale, e la arricchì con la considerazione degli aspetti cognitivi: nacque così il *contratto didattico*.

Il contratto didattico secondo Brousseau è «l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante» (Brousseau, 1986).

Come potremo ampiamente constatare, il contratto didattico influenza molti comportamenti dell'allievo, e di ciò l'insegnante non può non tenere conto. Già nell'esempio precedente abbiamo accennato ad implicite attese, da parte degli studenti, basate sulla *ripetizione delle modalità* (D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 100-101): *ogni* martedì interrogazione, *ogni* volta quattro interrogati, *ogni* interrogato un'equazione da risolvere etc.

Ma c'è di più. Proseguiamo con un esempio che riprenderemo spesso in seguito: l'uso spesso maldestro di un linguaggio apparentemente rigoroso (oppure soltanto altisonante) da parte dell'allievo può essere determinato dal tentativo, magari non sempre del tutto consapevole, di imitare il linguaggio impiegato dall'insegnante nelle spiegazioni o di utilizzare, in qualche modo, la terminologia presente nel libro di testo: così facendo, l'allievo potrebbe forse illudersi di ottenere l'approvazione dell'insegnante e dunque di raggiungere una valutazione positiva, o comunque generosa. Nascono in questo modo strani miscugli di termini, di formule, di parole senza senso: ed è importante sottolineare che queste sventurate accozzaglie pseudo-linguistiche sono spesso *del tutto* prive di significato, sia dal punto di vista formale che da quello sostanziale. Ovvero, esse non possono essere in alcun modo utili all'apprendimento: forse il nostro studente, se potesse sentirsi libero di esprimersi in termini informali, sarebbe in grado di orientarsi nell'argomento proposto, di "capirci qualcosa"... [1].

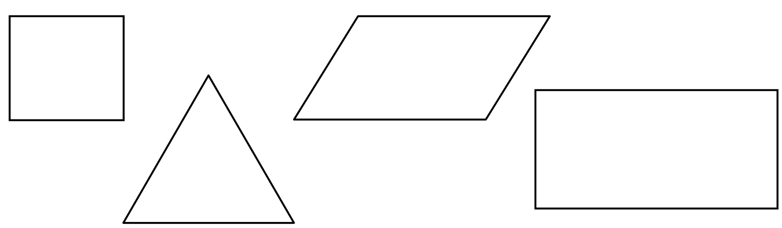
4.2.2. Un risultato per ogni esercizio

Come abbiamo sopra ricordato, spesso le prove di valutazione (sia scritte che orali) sono basate su richieste del tipo: *determina il risultato del problema seguente.* Il risultato da trovare può essere un numero, una formula, un diagramma cartesiano etc. L'esito della prova dipende dunque dalla correttezza di questo risultato: se "il risultato è giusto", allora "il compito è andato bene".

In questo e nel prossimo paragrafo potremo constatare che il risultato finale è un protagonista di primo piano del contratto didattico.

Per introdurre la questione, abbandoniamo per qualche attimo la scuola secondaria superiore e presentiamo brevemente il seguente "test dell'esagono" (D'Amore & Sandri, 1993), recentemente proposto in una classe II media (allievi di 12-13 anni). Ecco la scheda distribuita:

Fai una crocetta sull'esagono regolare



Moltissimi allievi (nonostante sapessero benissimo che cos'è un esagono regolare!) hanno interpretato come assolutamente coercitiva la richiesta ed hanno dato

[1] Con ciò non intendiamo ovviamente negare l'importanza dell'uso di un linguaggio corretto e rigoroso, anche dal punto di vista formale! Si tratta di equilibrare le esigenze: da un lato la comprensione del concetto, dall'altro la sua espressione formalmente corretta. Torneremo su questo argomento nel capitolo 5.

comunque una risposta al test: hanno cioè indicato varie figure, in particolare quelle che più "assomigliano" all'esagono (spesso il triangolo equilatero e il parallelogramma).

Come possiamo interpretare questi risultati, apparentemente sconcertanti?

Seguiamo le considerazioni di B. D'Amore e di P. Sandri: una semplice *analisi tecnica* porterebbe inevitabilmente a concludere che gli allievi *non sanno che cos'è l'esagono regolare*. Eppure la grande maggioranza dei ragazzi, successivamente interpellata, è stata in grado di dare una definizione di esagono regolare, e spesso anche di tracciarne un disegno corretto.

La sola analisi tecnica, dunque, si rivela nettamente insufficiente, addirittura fuorviante. È necessaria un'*analisi didattica* tale da mettere in luce il ruolo decisivo del contratto didattico: esso infatti spinge l'allievo a dare *comunque* una risposta al problema proposto. Nella mente degli studenti è radicata l'implicazione (auspicabile, per quanto riguarda l'esito finale!):

io indico la risposta esatta
quindi
l'insegnante valuta positivamente il mio elaborato

evidentemente abbinata alla temibile:

io non indico la risposta esatta
(cioè: scrivo la risposta sbagliata
oppure non svolgo l'esercizio)
quindi
l'insegnante valuta negativamente il mio elaborato

Da qui nasce l'imperativo categorico: *primo, risolvere (sempre e comunque) l'esercizio!* Ma quegli allievi, chiaramente, non sono abituati ad affrontare esercizi e problemi impossibili: il contratto didattico, indotto dalla precedente esperienza scolastica dello studente, prevede che ogni prova proposta abbia una (spesso: una sola!) soluzione (Baruk, 1985; D'Amore, 1993a e 1993b).

Si potrebbe obiettare che tutto ciò può verificarsi con apprezzabile frequenza nella scuola media inferiore, ma che nella scuola superiore, dove gli allievi incontrano fin dai primi anni esercizi impossibili (si pensi a certe semplici equazioni algebriche) la situazione sarà ben diversa. Purtroppo le verifiche sperimentali ridimensionano immediatamente questo iniziale ottimismo.

Prendiamo infatti in considerazione una recente ricerca (Bagni, 1997a), basata sul seguente test di goniometria proposto ad allievi di tre classi IV liceo scientifico (studenti di 17-18 anni):

Determinare i valori di x appartenente a **R** *per i quali risulta:*

a)	$\mathrm{sen}x = -1/2$	b)	$\cos x = 1/2$
c)	$\mathrm{sen}x = 1/3$	d)	$\mathrm{tg}x = 2$
e)	$\mathrm{sen}x = \mathrm{pi}/3$	f)	$\cos x = \mathrm{pi}/2$
g)	$\mathrm{sen}x = \sqrt{3}$	h)	$\cos x = -\sqrt{3}/3$

Ricordiamo che le funzioni goniometriche vengono spesso introdotte facendo iniziale riferimento ai valori che esse assumono in corrispondenza di angoli di uso relativamente comune. I valori assunti da sen$x$, cos$x$, … sono calcolabili mediante elementari considerazioni geometriche quando alla x vengano attribuiti valori come 0, pi/6, pi/4, pi/3, pi/2, …, pi, …; si ottiene così la nota tabella:

x	0	pi/6	pi/4	pi/3	pi/2	2pi/3	3pi/4	...
sen$x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	...
cos$x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	-$\sqrt{2}/2$	...

tg$x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	(no)	$-\sqrt{3}$	-1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Esaminiamo ora il test (tempo accordato: 30 minuti; non è stato consentito agli allievi l'uso di tavole goniometriche né della calcolatrice scientifica). Esso è stato concepito affiancando ai due quesiti 'tradizionali' (a), (b), due quesiti possibili, ma con i risultati non compresi tra i valori di x "di uso comune" (c), (d); inoltre, due quesiti (e), (f) sono impossibili, ma con valori (di sen$x$ e di cos$x$) che richiamano le misure in radianti di angoli "di uso comune" (pi/3, pi/2); gli ultimi due quesiti (g), (h), il primo impossibile, il secondo possibile, propongono invece valori (di sen$x$, cos$x$) che sono inclusi nella 'tabella' riferita agli angoli "di uso comune", ma relativamente ad altre funzioni goniometriche (ovvero: tg$x$, cotg$x$).

Ebbene, per quanto riguarda le risposte ai quesiti (e), (f), il contratto didattico ha portato alcuni allievi (ricordiamolo: della quarta classe della scuola secondaria superiore!) a ricercare *comunque* le soluzioni; e le "soluzioni" che più spontaneamente si sono presentate alla loro mente sono proprio quelle che vedono associati, nel caso della funzione seno, i due valori pi/3 e $\sqrt{3}/2$ e, nel caso della funzione coseno, i due valori pi/2 e 0. Abbiamo così, ad esempio, gli errori seguenti:

sen$x$ = pi/3 quindi $x = \sqrt{3}/2$
cos$x$ = pi/2 quindi $x = 0$

Per quanto riguarda le risposte ai quesiti (g), (h), nelle risposte di alcuni allievi si è manifestato chiaramente il riferimento alla funzione tangente: anche in questo caso, alcuni studenti, non trovando i valori proposti tra quelli corrispondenti ai valori di x di uso più frequente (per le funzioni seno e coseno, nella tabella sopra ricordata), siano stati indotti a cercare un'altra corrispondenza nella quale siano coinvolti i valori proposti.

Troviamo allora errori come:

sen$x = \sqrt{3}$ quindi x = pi/3
sen$x = \sqrt{3}$ quindi x = pi/3+$k$pi

Quanto ora rilevato ci obbliga a concludere che quell'implicita, irrefrenabile esigenza che porta l'allievo a cercare sempre e comunque un risultato per ogni esercizio proposto *non* si esaurisce davvero nell'ambito della scuola media inferiore.

4.2.3. Passaggi e risultato finale

L'importanza attribuita dagli allievi della scuola secondaria superiore al risultato finale di un problema o di un esercizio è confermata dai risultati di una recente ricerca (Bagni, 1997b).

Agli studenti di due classi III liceo scientifico (allievi di 16-17 anni) e di due classi IV liceo scientifico (allievi di 17-18 anni) è stato proposto un test nel quale comparivano le risoluzioni delle seguenti equazioni:

Risoluzione 1) $x^2 = -1$

$x = \sqrt{-1}$ vel $x = -\sqrt{-1}$

Risoluzione 2) $x^3-15x-4 = 0$

Sia: $x = a-b$ (prima posizione).
Sostituiamo nel testo:

$(a-b)^3-15(a-b)-4 = 0$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-15(a-b)-4 = 0$
$a^3-3ab(a-b)-15(a-b)-b^3-4 = 0$
$a^3-(a-b)(3ab+15)-b^3-4 = 0$

Se richiediamo che sia: $3ab+15 = 0$, ovvero se poniamo:

$ab = -5$ cioè: $b = -5/a$ (seconda posizione):

a^3-(-5/a)^3-4 = 0
a^6-4a^3+125 = 0

Ponendo $a^3 = t$:

t^2-4t+125 = 0
$t = 2+\sqrt{4-125} = 2+11\sqrt{-1}$ o
$t = 2-\sqrt{4-125} = 2-11\sqrt{-1}$

Consideriamo il primo valore di t; otteniamo per a:

$a = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$

Sviluppiamo ora il cubo seguente:

$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3+3\cdot\ 2^2\cdot\ \sqrt{-1}+3\cdot\ 2\cdot\ (\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3 =$
$= 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1}$

Dunque per a possiamo scrivere:

$a = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{-1}\right)^3} = 2+\sqrt{-1}$

Ricordando la seconda posizione e razionalizzando:

$b = -5/a = -\frac{5}{2+\sqrt{-1}} = -\frac{5\left(2-\sqrt{-1}\right)}{\left(2+\sqrt{-1}\right)\left(2-\sqrt{-1}\right)} =$
$= -2+\sqrt{-1}$

Ricordando la prima posizione, una soluzione è:

$x = a-b = (2+\sqrt{-1}) - (-2+\sqrt{-1}) = 4$

Verifichiamola sostituendo direttamente nel testo;
il primo membro risulta:

$4^3-15\cdot\ 4-4 = 0$

ed è uguale al secondo. La soluzione $x = 4$ è verificata.

Agli allievi sono stati concessi complessivamente 30 minuti per annotare le proprie osservazioni, tenendo presente che in tutte le classi, al momento del test, erano state trattate le risoluzioni di equazioni di secondo grado e di equazioni trinomie riconducibili ad equazioni di secondo grado mediante opportune posizioni (del tipo $x^n = t$), ma *non* erano stati introdotti i numeri immaginari.

Che cosa hanno rilevato gli allievi? Ebbene, la quasi totalità (92%) si è mostrata consapevole della non appartenenza di $\sqrt{-1}$ a **R**; essendo abituati a risolvere equazioni a coefficienti reali nell'ambito del ben noto insieme **R** (ed in particolare essendo abituati a richiedere la realtà delle soluzioni trovate), essi hanno reputato senz'altro impossibile un'equazione il cui *risultato* non sia dato da un numero reale.

La presenza di una quantità immaginaria *in un passaggio* della risoluzione, invece, sembra costituire per non pochi allievi (54%) una difficoltà superabile: alcuni di essi hanno ritenuto infatti, in questo caso, di poter considerare $\sqrt{-1}$ alla stregua di un simbolo numerico accettabile, senza analizzarne il significato. E questi sono gli stessi allievi che, in precedenza, hanno ritenuto di non poter considerare $\sqrt{-1}$ come soluzione effettiva di un'equazione di secondo grado! Tuttavia il fatto che questo simbolo numerico non compaia *nel risultato* dell'equazione rende la sua presenza provvisoria, strumentale, dunque accettabile[2].

Dunque la considerazione riservata al risultato è ben diversa dalla considerazione riservata ai passaggi intermedi del procedimento: il contratto didattico, tradizionalmente, riserva notevole importanza alla determinazione dell'esatto risultato finale (Rogers, 1997). Tale importanza sembra far sì che nella stessa espressione formale del risultato dell'esercizio (in questo caso la scrittura della soluzione dell'equazione) venga ad essere assai pesante l'influenza

---

[2] È interessante un riferimento storico: questo atteggiamento appare infatti analogo a quello di alcuni algebristi del XVI secolo, tra i quali Cardano e Bombelli, i quali ebbero «l'ardire (pur ricorrendo a una certa cautela verbale) di fare calcoli formali su espressioni contenenti radici quadrate di numeri negativi» (Bourbaki, 1963, p. 91).

delle regole fissate dall'insegnante (la proibizione di estrarre la radice quadrata di un numero negativo!). Nei passaggi intermedi della risoluzione, invece, l'efficacia di regole e di proibizioni potrebbe apparire meno coercitiva: una buona parte degli allievi si sente autorizzata a considerare non illecita la presenza di espressioni numeriche insolite, naturalmente non senza avere controllato l'irrinunciabile correttezza del risultato finale[3].

4.2.4. La giustificazione formale

Abbiamo potuto constatare che, nell'ambito del contratto didattico, la concezione della scuola influenza evidentemente il comportamento dell'allievo, ad esempio nei confronti del risultato finale: lo studente sa che è importante raggiungere il "risultato giusto" (cosa che automaticamente porterà al voto positivo e alla promozione) e cerca comunque di fare ciò, anche quando l'esercizio in questione non ammette un (o: un solo) "risultato giusto".

Altrettanto interessante è l'atteggiamento di alcuni allievi relativamente alla concezione della stessa matematica. Spesso infatti alla materia "matematica" sono associate immagini di calcoli, di figure geometriche tracciate secondo regole ben precise, di formule, di simboli speciali: un elaborato di matematica, anche ad una prima, superficiale occhiata, si presenta in modo ben diverso da una prova scritta relativa ad una materia letteraria (il "tema", la versione di latino etc.)!

Esaminiamo un'altra recente ricerca (Bagni, 1996). Essa è basata sulla risoluzione (nell'ambito dei numeri reali) di

---

[3] Il lettore è invitato ad esaminare anche la ricerca riportata in: Bagni, 1997c. Essa conferma ancora una volta che il contratto didattico influenza nettamente il comportamento degli allievi: la consolidata abitudine ad escludere il ricorso alle quantità immaginarie porta molti studenti (che peraltro hanno ben conosciuto e trattato nei propri studi il corpo complesso) a bloccarsi immediatamente di fronte al primo manifestarsi di un numero complesso con la parte immaginaria non nulla nella determinazione del dominio di una funzione assegnata. Tutto ciò avviene, in diversi casi, anche a costo di provocare un'incoerenza tra due risposte date.

alcune disequazioni irrazionali, introdotte facendo iniziale riferimento alle disequazioni irrazionali quadratiche. La risoluzione di tali disequazioni è resa possibile da alcune regole che gli allievi spesso memorizzano ed applicano con abilità; ma non sempre, come vedremo, tale applicazione pratica è accompagnata dall'opportuna consapevolezza.

In particolare, notissime sono le regole sintetizzate da:

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} <= \mathrm{B}(x) \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ \mathrm{B}(x) \geq 0 \\ \mathrm{A}(x) \leq [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} >= \mathrm{B}(x) \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ \mathrm{B}(x) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathrm{B}(x) \geq 0 \\ \mathrm{A}(x) \geq [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}$$

La risoluzione di una *qualsiasi* disequazione irrazionale quadratica, spesso, viene identificata con l'applicazione di queste regole. Non sempre, però, tale applicazione è strettamente necessaria; consideriamo, ad esempio, la disequazione:

$$\sqrt{x}+2 \leq 0$$

Essa non è risolta da alcun reale x: ma per giungere a questa conclusione *non* è certo necessario basarsi sulla prima delle formule sopra ricordate! Anzi, la diretta applicazione di tali formule porta alla risoluzione (corretta):

$$\sqrt{x}+2 \leq 0 \quad \text{da cui} \quad \sqrt{x} \leq -2$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ -2 \geq 0 \\ x \leq (-2)^2 \end{cases}$$

per cui il sistema non è verificato da alcun reale x.

Ma tutto ciò è evidentemente causa di una sostanziale complicazione del procedimento risolutivo: molto più semplice sarebbe notare che $\sqrt{x}$ non può assumere valori negativi e che dunque la somma $\sqrt{x}+2$ non può risultare negativa o nulla.

Tuttavia la consolidata abitudine all'impiego di formule per risolvere esercizi e problemi porta talvolta l'allievo a privilegiare un approccio meccanico; molti studenti sembrano infatti basare il proprio atteggiamento sulla seguente considerazione: per la risoluzione di un ben determinato genere di esercizi (le disequazioni irrazionali quadratiche), l'insegnante ha fornito una o più regole, una o più formule, dunque *ogni* esercizio di quel genere (*ogni* disequazione irrazionale quadratica) *deve* essere affrontato e risolto applicando tali regole e tali formule. B. D'Amore e P. Sandri hanno chiamato "e. g. f." (esigenza della giustificazione formale) una clausola del contratto didattico molto simile a quella qui evidenziata, la cui presenza è riscontrabile già a partire dalle scuole elementari: a loro avviso la clausola diventa sempre più vincolante con il passare degli anni, al crescere del livello scolastico di appartenenza (D'Amore & Sandri, 1997).

I risultati delle verifiche sperimentali hanno confermato quanto ora osservato: nonostante l'evidente semplicità, alcuni esercizi sono stati ugualmente affrontati (nel 58% dei casi) e risolti, talvolta correttamente (nel 35% dei casi), applicando le tecniche "tradizionali"; ad esempio:

$\sqrt{x} \geq 0$ da cui $\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \geq 0 \\ x \geq 0^2 \end{cases}$

da cui $x >= 0$

Riscontri sperimentali come questi possono essere interpretati in più modi: ad esempio, nella sezione seguente vedremo come una notevole (e per molti versi eccessiva) padronanza di una tecnica da parte degli allievi, ottenuta facendo ripetere molte volte esercizi simili, può portare a "effetti collaterali" indesiderati.

4.2. L'EFFETTO *EINSTELLUNG*

4.2.1. Ripetiamo lo stesso esercizio: ma… serve?

Spesso, per consolidare l'abilità degli allievi nell'applicazione di un procedimento, si ritiene utile far ripetere molte volte lo stesso esercizio, ovvero esercizi molto simili, tali da presentare le stesse difficoltà e da essere risolti mediante lo stesso metodo.

Tutto ciò è effettivamente utile? La questione è piuttosto delicata. Da un lato, sembra che la risposta non possa che essere positiva: l'esperienza scolastica quotidiana sembra suggerire senza alcun dubbio che l'abilità richiede allenamento. Dunque se desideriamo che i nostri allievi raggiungano un'apprezzabile padronanza nella risoluzione, ad esempio, delle disequazioni irrazionali, appare indispensabile che essi risolvano, una dopo l'altra, numerose disequazioni di quel tipo: solo così potranno raggiungere una buona familiarità con le varie situazioni, con le molte difficoltà differenti che si possono presentare nel corso della risoluzione di quell'esercizio.

Eppure la ripetizione dello stesso procedimento risolutivo non porta sempre e soltanto vantaggi. Riprendiamo in considerazione la ricerca presentata nel paragrafo precedente: abbiamo constatato che parecchi studenti, abili nella risoluzione di disequazioni irrazionali mediante alcune "regole" sintetizzate da formule ben note, finiscono per applicare tali formule anche quando ciò non risulta necessario. Anzi: essi applicano le formule studiate nonostante ciò comporti un'evidente complicazione del procedimento risolutivo!

Che cos'è accaduto? Forse l'abitudine ha giocato un brutto scherzo ai nostri studenti... Ma liquidare il fenomeno con un semplicistico "erano abituati a fare così" significa banalizzare la questione. È necessario esaminare la situazione più profondamente: sembra infatti che molti studenti siano stati quasi "imprigionati" dalla propria abilità nell'applicare un ben determinato metodo risolutivo, tanto da non voler cercare altri procedimenti, da rifiutare di esaminare autonomamente, con la sufficiente libertà, il problema proposto. Insomma, sembra che l'allievo pensi: si tratta di una disequazione irrazionale? Bene, ne ho già risolte molte altre applicando le mie formulette: tutto era andato bene allora, dunque riapplicherò le mie belle formulette e tutto andrà certamente bene anche adesso!

Nel prossimo paragrafo analizzeremo altri risultati sperimentali a proposito di comportamenti di questo genere.

4.2.2. L'effetto *Einstellung*

Situazioni simili a quelle descritte precedentemente vengono riassunte con il termine *effetto Einstellung* (parola che significa: sosta, interruzione); si tratta di un fenomeno presente nel comportamento degli studenti ad ogni livello scolastico, dalla scuola primaria (D'Amore, 1993a) alla scuola secondaria superiore ed oltre.

Molti ricercatori, in alcune opere classiche, si sono occupati dell'efficacia degli esercizi ripetuti. Le conclusioni sono piuttosto nette: la ripetizione di esercizi può essere utile per migliorare alcune abilità tecniche (fattore che non è da sottovalutare), ma *non* serve per migliorare i risultati degli studenti nel *problem solving*[4].

Esamineremo ora il comportamento degli studenti di alcune classi della scuola secondaria superiore (ci riferiremo ancora al liceo scientifico, in particolare all'ultima classe, con allievi di 18-19 anni). Consideriamo due problemi "classici" che i nostri allievi sono chiamati ad

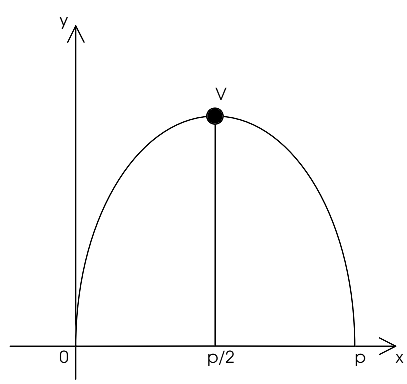
[4] Ricordiamo: Thorndike, 1913; Buswell, 1927 e 1930; Luchins, 1942; tra i lavori recenti: Gagné, 1973; Kleinmuntz, 1976; Davydov, 1979; Resnick & Ford, 1991; D'Amore, 1992 e 1993a; D'Amore & Frabboni, 1996. M.V. Potockij scrive: «Troppo spesso noi insegniamo a classificare i problemi e non insegniamo a risolverli. La frase seguente è ben nota: "Non siamo ancora capaci di risolvere questi problemi!"» (in: D'Amore, 1993a, pp. 99 -100). R.M. Gagné scrive: «Per quanto riguarda la ripetizione, sembra che... l'apprendimento sia del tutto indipendente dalla ripetizione» (Gagné, 1973).

affrontare nell'ultimo anno della scuola secondaria superiore: i problemi di massimo e di minimo e il calcolo dell'area di una parte di piano cartesiano.

Iniziamo dai problemi di massimo e di minimo. Il seguente test è stato proposto a 50 studenti di V liceo scientifico (allievi di 18-19 anni) che ben conoscevano la risoluzione di un problema di massimo/minimo mediante lo studio della derivata prima della funzione che deve essere massimizzata/minimizzata. Consideriamo il problema seguente:

Tra i rettangoli aventi il perimetro che misura $2p$ *(p reale positivo), trovare quello di area massima.*

Osserviamo che nella risoluzione si può considerare x la misura della base del rettangolo, essendo $0<=x<=p$; la misura dell'altezza è dunque: p-x. Ciò posto, l'area viene ad essere: $y = x(p-x)$. Rappresentiamo questa equazione nel piano cartesiano, sempre con $0<=x<=p$; otteniamo il diagramma seguente:



Il massimo di y si trova dunque in corrispondenza di $x = p/2$ (il punto da considerare è il vertice V della parabola): è molto importante sottolineare che in questo caso *non è necessario* considerare la derivata prima della funzione espressa da $y = x(p-x)$ per trovare il vertice della parabola e dunque per risolvere il problema assegnato.

Concludiamo che il rettangolo di area massima ha la base e l'altezza che misurano entrambe $p/2$: tale rettangolo è dunque un quadrato[5].

Ebbene, quasi tutti gli studenti hanno tentato di risolvere il semplice problema ora presentato mediante lo studio della derivata prima (41 su 50, 78%) e lamaggior parte di essi ha trovato il punto esatto (39 su 50, 76%). Soltanto 8 studenti (16%) hanno osservato che il punto richiesto avrebbe potuto essere determinato anche senza il ricorso allo studio della derivata.

Quale significato dare a questo comportamento? È possibile che qualche allievo abbia interpretato il problema come un implicito invito dell'insegnante ad applicare un ben determinato procedimento risolutivo (derivazione ed annullamento della derivata prima). Ma gli studenti possono anche essere stati condizionati dalla propria abilità nella risoluzione di un problema di massimo mediante il procedimento sopra ricordato: perché, dunque, cambiare? Perché cercare altre strade, magari (solo) apparentemente più semplici?

Qualcuno potrebbe obiettare che la scelta dei due diversi metodi risolutivi (*con* e *senza* la derivazione), nel caso ora esaminato, non comporta gravi percentuali di fallimento: numeri alla mano, su 50 studenti, 41 hanno applicato la derivazione e, di questi, ben 39 hanno risolto correttamente l'esercizio, hanno trovato il "risultato giusto". Nessun guaio, dunque: molti allievi hanno impiegato un procedimento matematicamente più "elevato", ovvero hanno scelto di ricorrere all'Analisi, cosa effettivamente

---

[5] Questo problema può essere risolto anche senza il ricorso alla geometria analitica. Poniamo: *misura della base* = +δ; *misura dell'altezza* = −δ, con −<δ<. Dunque il valore dell'area è: $A(\delta)$ = ed è massimo, A = , quando: $\delta = 0$. La base e l'altezza hanno la stessa misura: il rettangolo è un quadrato.

evitabile; ma, a giudicare dai risultati finali, questa scelta sembra essersi rivelata (molto spesso) vincente.

Esaminiamo allora un altro test, dedicato a questioni di integrazione, proposto a 55 studenti di V liceo scientifico che conoscevano gli integrali e, in particolare, gli integrali per sostituzione di variabile come $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Per calcolare tale integrale, gli allievi ponevano:

$\mathrm{arcsen}x = t$ significa che

$x = \mathrm{sen}t$ (con $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

$dx = \cos t dt$

Quindi (risulta: $\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t} = \cos t$, con: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ e: $\cos t > 0$):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-sen^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int 2\cos 2t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen 2t + c =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}sent\sqrt{1-sen^2 t} + c$$

con c costante reale. Da ciò, essendo $t = \mathrm{arcsen}x$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}arcsenx + \frac{1}{2}sen(arcsenx)\sqrt{1-sen^2(arcsenx)} + c =$$

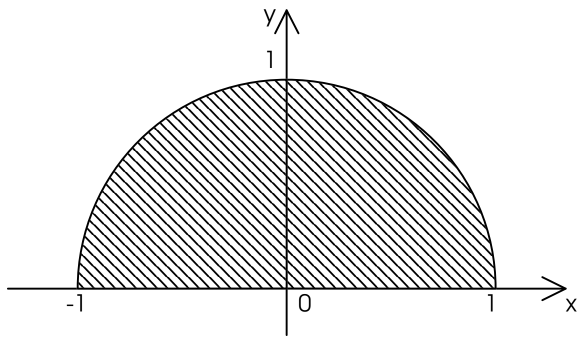
$$= \frac{1}{2}arcsenx + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

Un'integrazione non proprio... immediata. Si noti che possiamo scrivere:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}arcsenx+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

e questo è il valore dell'area del semicerchio, nel piano cartesiano, rappresentato da:

$$\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$



Naturalmente non è indispensabile impiegare tale integrale per calcolare l'area di un semicerchio!

Agli allievi è stato proposto il seguente test:

> Calcolare A_a, A_b e A_c aree delle parti di piano cartesiano rappresentate da:
>
> a) $\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$
>
> b) $\begin{cases} 0 \le y \le xe^{x^2} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$
>
> c) $\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Quasi tutti gli studenti (49 su 55, 89%) hanno calcolato i valori A_a, A_b mediante l'integrazione (e la maggior parte di essi ha determinato i valori esatti; in particolare: 78% per

A_a; 63% per A_b). Ma molti studenti (31 su 55, 56%) hanno calcolato anche A_c (o hanno solo tentato di calcolare tale valore: 25 su 55, 45%; soltanto 6 studenti hanno ottenuto il valore esatto mediante tale metodo!) con l'integrale:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} arcsenx + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto quest'ultimo metodo che, come sopra notato, è tecnicamente complicato ha dunque causato un notevole numero di fallimenti. In questo caso, l'effetto *Einstellung* ha determinato una situazione didatticamente controproducente[6].

Concludiamo: non possiamo pretendere che i nostri allievi raggiungano livelli ottimali di abilità nella risoluzione di un ben determinato esercizio affrontando soltanto un esempio di tale esercizio. Non basta, ovviamente. Ma la ripetizione esagerata, ossessiva, acritica non è positiva, può addirittura essere dannosa: è necessario anche proporre variazioni, casi particolari, esempi nuovi e interessanti (magari semplici, o comunque suscettibili di risoluzioni elementari) che possano stimolare la creatività dell'allievo. Solo così potremo aggirare le trappole dell'effetto *Einstellung*.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 4

Bagni, G.T. (1996), Disequazioni irrazionali quadratiche: apprendimento e "contratto didattico": *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B, 2, 167-176 (Bagni, G.T., 1996, Irrational inequations: learning

[6] Un'allieva, intervistata dopo il test, ha detto: «Non ho pensato che si trattava di un semicerchio. So che l'area si trova integrando e ho subito integrato». Tale commento è evidentemente riferibile all'effetto *Einstellung*: l'area di una parte di piano cartesiano «si trova integrando», ovvero si calcola mediante un procedimento nell'applicazione del quale gli studenti si sentono piuttosto sicuri. Dunque non è necessario soffermarsi a considerare le caratteristiche del singolo problema: *si deve integrare*, e basta.

and didactical contract: Gagatsis, A. & Rogers, L., a cura di, *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus ICP-95-G-2011/11, 133-140, Thessaloniki).

Bagni, G.T. (1997a), Trigonometric functions: learning and *didactical contract*: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 3-10, Thessaloniki (è in via di pubblicazione in italiano: Bagni, G.T., 1997, Le funzioni goniometriche: apprendimento e *contratto didattico* nella scuola secondaria superiore: *Bollettino dei Docenti di Matematica del Canton Ticino*).

Bagni, G.T. (1997b), "Ma un passaggio non è il risultato...". L'introduzione dei numeri immaginari nella scuola superiore: *La matematica e la sua didattica*, 2, 187-201.

Bagni, G.T. (1997c), Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e *contratto didattico* nella scuola superiore: *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.

Bara, B. (1990), *Scienza cognitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.

Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione* , La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).

Baruk, S. (1985), *L'âge du capitain*, Seuil, Paris.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Buswell, G.T. (1927), *Summary of arithmetical investigations*, University of Chicago Press, Chicago.

Buswell, G.T. (1930), A critical survey of previous research in arithmetics: Whipple, G.M. (ed.), *The twenty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education: Report of the Society's committee on arithmetic*, Publishing of Public School, Bloomington.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.
D'Amore, B. (1992), L'insegnamento della matematica offende le intelligenze?: *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*, Pitagora, Bologna.
D'Amore, B. (1993a), *Problemi*, Angeli, Milano.
D'Amore, B. (1993b), Il problema del pastore, *La vita scolastica*, 2, 14-16.
D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.
D'Amore, B. & Sandri, P. (1993), Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili: *La matematica e la sua didattica*, 3, 348-353.
Davydov, V.V. (1979), *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento*, Giunti-Barbèra, Firenze (prima edizione: Moskow 1972).
De La Garanderie, A. (1980), *Les profils pédagogiques*, Le Centurion, Paris.
Duncker, K. (1969), *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti-Barbera, Firenze (prima edizione: 1935).
Filloux, J. (1973), Positions de l'einsegnant et de l'einsegné: *Fantasme et formation*, Dunod, Paris.
Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell'apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).
Giordan, A. & De Vecchi, G. (1987), *Les origines du savoir*, Delachaux et Niestlé, Genève.
Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.

Kahneman, D.; Slovis, P. & Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainity, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.
Kleinmuntz, B. (1976), *Problem solving. Ricerche, modelli, teoria*, Armando, Roma.
Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).
Luchins, A.S. (1942), Mechanization in pronlem solving. The effect of Einstellung: *Psychol. Monogr.*, 54.
Meirieu, P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment?*, ESF, Paris.
Nesher, P. & Kilpatrick, J. (a cura di) (1990), *Cognition and mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.
Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
Polya, G. (1983), *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano (edizione originale: 1945).
Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1991), *Picologia della matematica ed apprendimento scolastico*, Sei, Torino (prima edizione: 1981).
Rogers, L. (1997), *Problem Solving ed "Indagini" nei corsi di matematica. Alcuni esempi dalle scuole britanniche*, Sulmona (in via di pubblicazione).
Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.
Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
Thorndike, E.L. (1913), *Educational psychology*, *II. Psychology of learning*, Teachers College, Columbia University, New York.

Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
Wertheimer, H. (1959), *Productive Thinking*, Harper & Row, New York.

Syllogismos.it
History and Epistemology for Mathematics Education
(Giorgio T. Bagni, Editor)