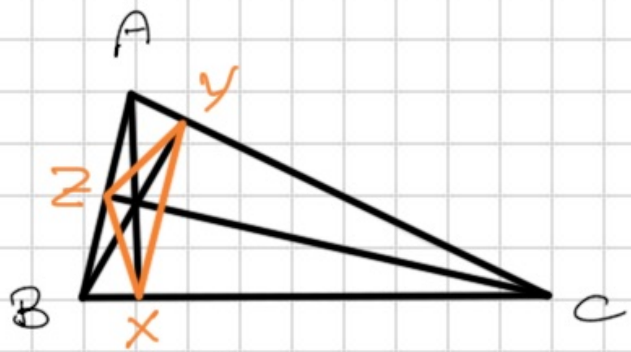
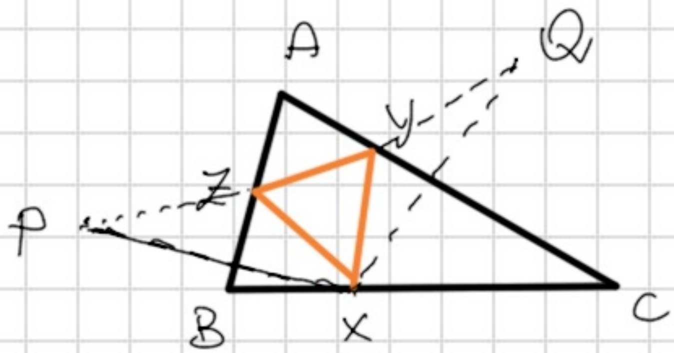
Lezione del 12-11-2024

Tra tutti i triangoli inscritti in un dato triangolo acutangolo ABC, quello di perimetro minimo è il triangolo ortico



Hp ABC triangolo acutangolo

Th $XY + ZY + XZ$ minima
XYZ triangolo ortico



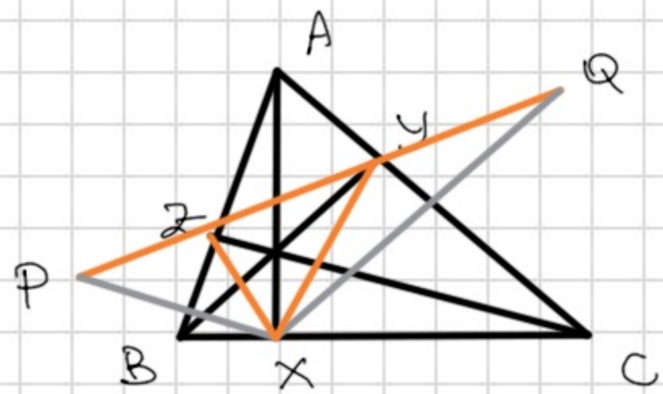
Fisso un punto X su BC e traccio il triangolo XYZ inscritto in ABC.
Siano P e Q rispettivamente i simmetrici di X rispetto ai lati AB e BC.
Per le proprietà della simmetria assiale* accade

PZ $\cong$ XZ e QY $\cong$ XY quindi il perimetro del triangolo XYZ può essere scritto come

$$XZ + ZY + XY = PZ + ZY + QY$$

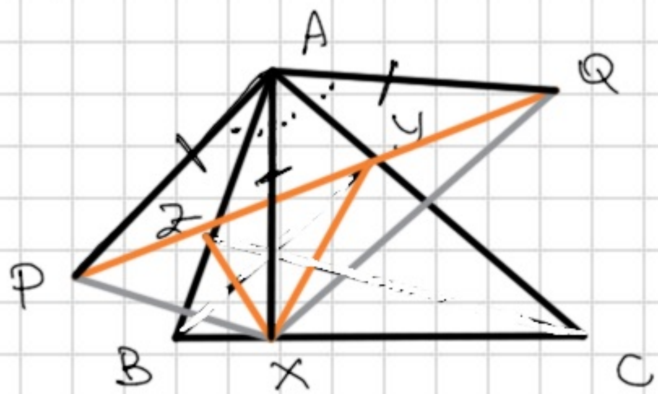
Il perimetro di XYZ sarà minimo quando i punti P Z Y e Q sono allineati

* Se il punto P è il simmetrico di X rispetto ad AB, allora il lato AB è asse del segmento PX e quindi altezza del triangolo XPZ e anche mediana della base e pertanto XPZ è isoscele



Pertanto tra tutti i triangoli inscritti in ABC e aventi un vertice fisso X quello di perimetro minimo si otterrà prendendo i simmetrici P e Q di X rispetto ad AB e ad AC tracciando rispettivamente il segmento PQ e considerando i punti di intersezione Z e Y con AB e AC.

Dobbiamo verificare che al variare di X sul lato BC quale dei triangoli inscritti XYZ ha il perimetro minimo.



Collego A con X con P e Q. Considero i triangoli APX e AQX. Si tratta di triangoli isosceli perché P e Q sono i simmetrici di X rispetto ai lati e quindi possiamo scrivere la relazione

$$AP \cong AX \cong AQ$$

Inoltre, il lato AB appartiene alla bisettrice dell'angolo $P\hat{A}X$ e allo stesso modo AC appartiene alla bisettrice di $Q\hat{A}X$

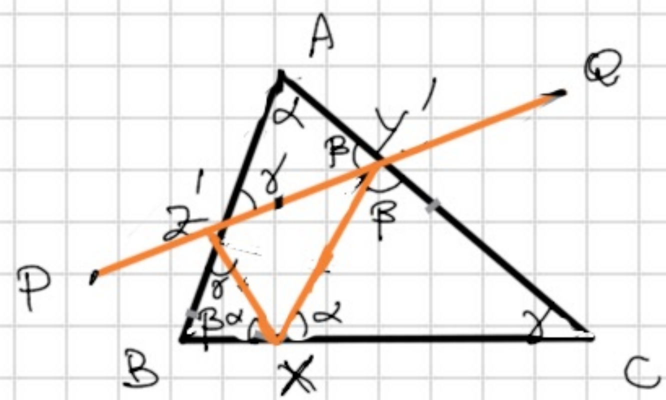
Indipendentemente dalla scelta di X, il triangolo APQ sarà isoscele su base PQ e l'angolo $P\hat{A}Q$ sarà costante al variare di X su BC e sempre uguale al doppio dell'angolo $B\hat{A}C$.

Nel triangolo APQ, la base ha la stessa lunghezza del perimetro del triangolo XYZ da minimizzare.

Essendo l'angolo al vertice A di ampiezza fissata, la lunghezza della base sarà minima quando la lunghezza degli altri due lati sarà minima.

La lunghezza di AP e AQ è uguale a quella di AX dunque la lunghezza di PQ è minima quando è minima la lunghezza di AX, ovvero quando AX è perpendicolare al lato BC. Pertanto il triangolo inscritto in ABC di perimetro minimo è quello che si ottiene prendendo X come piede dell'altezza condotta da A su BC.

Vediamo che XYZ è ortico, cioè che anche Z e Y sono i piedi delle altre due altezze



Sia $XY'Z'$ un triangolo ortico di ABC.
Per le proprietà del triangolo ortico sappiamo che

$B\hat{X}Z' = \alpha \quad B\hat{Z}'X \cong A\hat{Z}'Y' \cong \gamma$

$\Rightarrow \quad X\hat{Z}'Y' \cong 180 - 2\gamma$

Essendo P simmetrico di X rispetto ad AB risulta

$= \quad -$

$P\hat{Z}'X' + X\hat{Z}'Y' \cong 2\gamma + 180° - 2\gamma = 180°$

Quindi i punti P, Z', Y' sono allineati.

Analogamente

$C\hat{X}Y' \cong \alpha \quad , \quad C\hat{Y}'Z' \cong X\hat{Y}'Z' \cong \beta$

$\Rightarrow \quad Z'\hat{Y}'X \cong 180 - 2\beta$

Essendo Q il simmetrico di X rispetto ad AC risulta

$$Q\hat{Y}'X + X\hat{Y}'Z' \cong 2\beta + 180 - 2\beta = 180$$

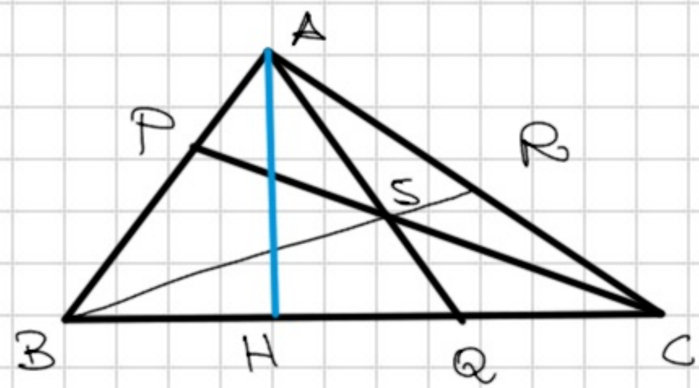
Anche Z', Y' e Q sono allineati

Per transitività sono allineati anche P e Q.
e quindi $\underline{XYZ}$ è proprio il triangolo ortico di ABC.

Il teorema di CEVA

Dato il triangolo ABC, tre segmenti ceviani AQ, CP e BR sono concorrenti se e solo se vale la seguente relazione

$$\boxed{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1}$$

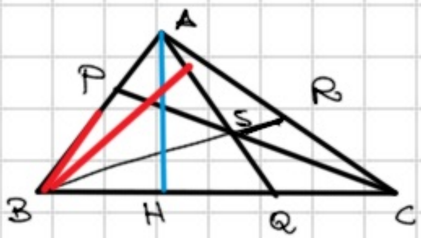


Dim: NB Dati 2 triangoli con altezze congruenti, le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi.

Considero i triangoli ABQ e AQC

$$BQ : A_{ABQ} = QC : A_{AQC} \qquad \frac{BQ}{QC} = \frac{A_{ABQ}}{A_{AQC}}$$

Consideriamo ora i triangoli SBQ e SQC



$$\frac{BQ}{QC} = \frac{A_{SBQ}}{A_{SQC}} = \frac{A_{ABQ}}{A_{AQC}} = \frac{A_{ABQ} - A_{SBQ}}{A_{AQC} - A_{SQC}} = \frac{A_{ABS}}{A_{ASC}}$$

Analogamente nei triangoli CBR e ABR e CSR e ASR

$$\frac{CR}{RA} = \frac{A_{CBR}}{A_{ABR}} = \frac{A_{CSR}}{A_{ASR}} = \frac{A_{CBR} - A_{CSR}}{A_{ABR} - A_{ASR}} = \frac{A_{CBS}}{A_{ABS}}$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A_{APC}}{A_{PBC}} = \frac{A_{APS}}{A_{PBS}} = \frac{A_{APC} - A_{APS}}{A_{PBC} - A_{PBS}} = \frac{A_{ASC}}{A_{CBS}}$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{\cancel{A_{ASC}}}{\cancel{A_{CBS}}} \cdot \frac{\cancel{A_{ABS}}}{\cancel{A_{ASC}}} \cdot \frac{\cancel{A_{CBS}}}{\cancel{A_{ABS}}} = 1$$

La dimostrazione si fa per assurdo ...

Teorema di MENELAO

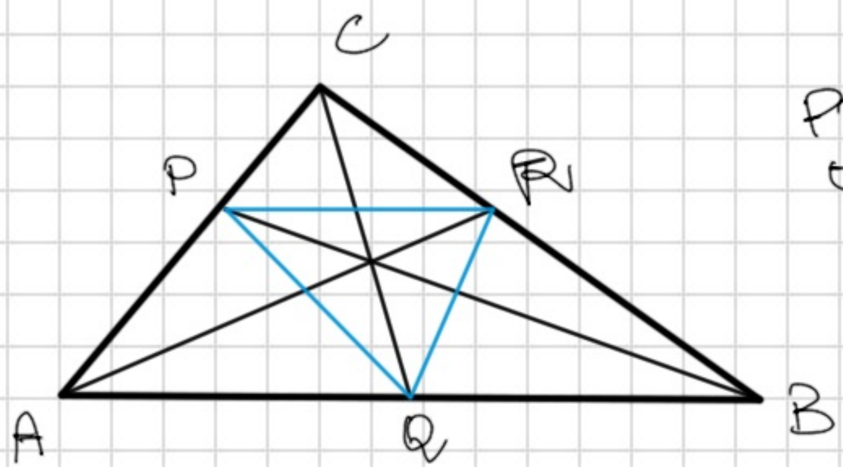
I punti P, Q, R appartenenti ai lati AB, BC e CA (o ai loro prolungamenti) di un triangolo ABC sono collineari se e solo se

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = -1$$

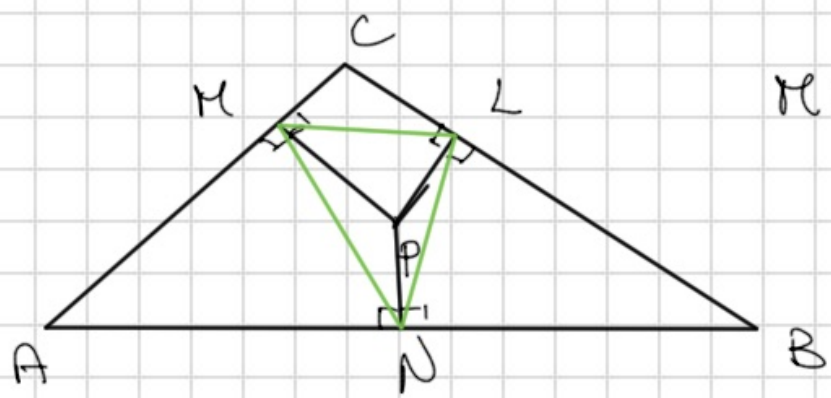
Si definisce Ceviana è un segmento che congiunge un vertice di un triangolo al suo lato opposto o al suo prolungamento

Il punto di incontro di 3 ceviane si chiama punto Ceviano

Un triangolo Ceviano è un triangolo i cui vertici coincidono con i punti di incontro fra le ceviane concorrenti e i lati opposti di uno stesso triangolo di riferimento



PRQ è un triangolo CEVIANO



MLN è un triangolo PEDALE