Capitolo 1

Introduzione storica

In questo capitolo diamo alcune coordinate storiche con qualche commento per comprendere il contesto matematico nel quale nascono i primi tentativi di esplicitare il concetto di funzione e, più in generale, in cui nasce l'analisi.

Ci interesserà fare una distinzione tra il concetto di funzione come lo conosciamo oggi e le idee intuitive ad esso legate, al fine di non confonderli nel seguito del testo.

Dopodichè saremo pronti a descrivere il panorama matematico a cavallo tra il diciassettesimo ed il diciottesimo secolo e ad introdurre le prime definizioni di funzione.

Riteniamo importante questa distinzione per evitare il pregiudizio spesso presente del leggere la storia della matematica con le lenti della matematica odierna ed in particolare con la logica della teoria degli insiemi. Cercheremo da questo punto di vista di sottolineare l'importanza di staccarsi da questo pregiudizio per comprendere più a fondo l'evoluzione reale dei concetti e non quella deformata da una loro interpretazione "insiemistica".

Organizziamo il capitolo come segue:

- Nella prima sezione tratteremo dell'idea del concetto di funzione in relazione alle idee intuitive di base che ne hanno segnato l'evoluzione ben prima di una sua definizione esplicita. Cerchiamo di proporre un punto di vista diverso da quello indotto dalla teoria degli insiemi.

- Nella seconda sezione facciamo un elenco di alcune tappe storiche che hanno segnato le concezioni legate alle idee intuitive di funzione: osserveremo la presenza di queste idee in tutta la storia della matematica. Vedremo inoltre il modo in cui il calcolo infinitesimale fornisce uno strumento potentissimo per la trattazione di problemi e applicazioni fino ad allora considerati indipendenti.

- Nella terza sezione proviamo a dare uno sguardo più approfondito sul secolo diciottesimo e sulla situazione storico/matematica che ha portato alle prime definizioni del concetto di funzione.

- Nella quarta sezione vediamo i primi tentativi di definizione del concetto di funzione dovuti a Leibniz e Bernoulli.

1.1 Che cosa intendiamo oggi per funzione.

Nel primo libro degli *Elements de mathematique* di Bourbaki dedicato alle strutture fondamentali dell'Analisi, viene così definito il termine "funzione":

> «Siano E e F due insiemi distinti o no. Una relazione tra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale in y, o relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia $x \in E$, esiste un elemento y di F ed uno solo, che stia nella relazione considerata con x. Si dà il nome di funzione all'operazione che associa così ad ogni elemnto $x \in E$ l'elemento y di F che si trova nella relazione data con x; si dice che y è il valore della funzione per l'elemento x e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata. Due relazioni funzionali equivalenti determinano la stessa funzione.»

Le definizioni più recenti, come per esempio quelle di Dieudonnè del 1969 (in [4]) o di Kolmogorov e Fomine del 1974 (in [5]), non si discostano nella sostanza da quella data da Bourbaki: le funzioni vengono generalmente intese come sottoinsiemi degli elementi di un prodotto cartesiano. Anche il punto di vista assunto dagli autori dei libri di testo per le scuole superiori e per i corsi universitari odierni non è troppo dissimile, in genere, da quello presentato [1].

L'ampia diffusione della definizione del concetto di funzione nell'ambito della teoria degli insiemi non ci deve far pensare che il dibattito sul chiarimento di tale concetto sia concluso. Se da un lato, infatti, la definizione bourbakista ha l'indubbio merito, almeno in ambito didattico, di essere un valido compromesso tra le esigenze di contenuto e la semplicità di presentazione, dall'altro la pratica matematica ha messo in luce come tale definizione non sia del tutto soddisfacente, rendendo necessarie ulteriori generalizzazioni della definizione di funzione, anche in sistemi assiomatici diversi da quello della teoria degli insiemi [2].

Questo fatto mostra così che il processo di chiarimento del concetto di funzione sia tuttora in corso, e che la domanda su che cosa significhi oggi il termine "funzione" non ha una risposta univova. I motivi per cui risulta difficile la riduzione ad un'unica definizione formale dei concetti intuitivi a cui il termine "funzione" si collega sono da ricercare nella varietà della natura di questi concetti. Sfogliando, ad esempio, un qualunque libro di storia della matematica possiamo rintracciare la presenza delle seguenti idee "intuitive" di come si è inteso ciò che oggi chiamiamo "funzione" [3]:

- Una funzione è una *formula* di x.
- La variabile y è una funzione della variabile x quando è data una *regola* che ad ogni valore di x produce un corrispondente valore di y.

[1] Si veda per esempio [6] e i riferimenti alla bibliografia.

[2] In [6], C. Marchini fa un elenco di alcune generalizzazioni del concetto di funzione nella storia matematica recente: si pensi ad esempio alla teoria delle categorie, le distribuzioni, o il concetto di funzione ricorsiva. Ai fini della tesi che vogliamo sostenere, è importante sottolineare che tali generalizzazioni non sono dettate da un gusto di astrazione o di estensione dei termini dell'analisi ma sono spesso dettate da esigenze concrete relative a problemi interni ed esterni alla matematica (vedi [3], p.20).

[3] L'elenco che riportiamo è tratta da [7]. I termini in corsivo nell'elenco si rifanno ai concetti intuitivi che vogliamo sottolineare: quello di formula, regola di corrispondenza, grafico, dipendenza, tavola di valori, oggetto sintattico.

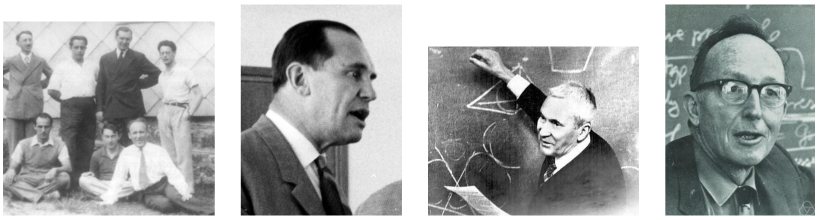


Figura 1.1. Da destra verso sinistra: il gruppo Bourbaki, Jean Dieudonne, Andrej Nikolaevič Kolmogorov e Saunders Mac Lane.

- Una funzione è una *curva nel piano* (x, y) tale che ogni linea verticale intersechi la curva in un solo punto.
- La quantità y è funzione della quantità x quando y *dipende* da x.
- Una funzione è determinata da una *tavola di valori* che associa ad ogni valore assunto da x un valore assunto da y.
- Una funzione f di un insieme in un altro insieme è un *simbolo* f tale che ogni volta che il termine x sta per un elemento di X allora il simbolo fx sta per un elemento di Y che è il valore della funzione in x.

Ancor oggi alcuni studi mostrano che tali concezioni differenti del concetto di funzione sono rintracciabili, in maniera più o meno velata, anche nei libri di testo adottati nelle scuole secondarie [4].

In quest'ottica, la formulazione del concetto di funzione in termini di teoria degli insiemi, nel tentativo di chiarire singolarmente i termini di applicazione, relazione, corrispondenza, grafico, perde il bagaglio di idee di base che hanno guidato le concezioni del concetto di funzione nella storia.

E' in questo senso quindi che non possiamo considerare la definizione bourbakista come il riferimento assoluto da tenere a mente per un'analisi critica delle concezioni del concetto di funzione nella storia della matematica.

Per queste ragioni, prima di parlare di storia del concetto di funzione, è necessario liberarsi dal punto di vista che presuppone la teoria degli insiemi, evitando di leggere la storia deformata dalle lenti dell'impianto della matematica odierna, sforzandosi di seguire lo sviluppo reale delle concezioni. [5].

[4] Per qualche riferimento vedi la bibliografia di [6]. In particolare il testo in [8]

[5] A questo proposito Bottazzini scrive:

> «Se si vuole cercare di comprendere la dimanica dello sviluppo reale della matematica, è essenziale sottolineare la specificità dei contesti e delle motivazioni, i mutamenti di punti di vista, le contraddizioni, le generalizzazioni e le giustapposizioni delle teorie» ([3], p. 12)

E ancora si esprime riguardo al rischio del mantenere un punto di vista "bourbakista":

> «[Un punto di vista assai diffuso] è quello di intendere lo sviluppo della matematica come una sorta di "commedia degli errori" che ha finalmente emendato sé stessa trovando un esito definitivo e rigoroso solo nei tempi più recenti. L'esempio più noto [...] è forse costituito [...] dagli Elementi di storia della matematica di Bourbaki (1960) [...]. Qui il divenire della matematica è visto come attraverso un imbuto: tutto lo sviluppo precedente deve passare attraverso il collo stretto delle "strutture" bourbakiste.» ([3], p. 11)

In altre parole se la formulazione in termini insiemistici rappresenta una tappa fondamentale del dibattito sulla definizione concetto di funzione iniziato agli inizi del diciottesimo secolo, è indispensabile che il lettore non lo considerari come il punto di arrivo a cui tendere o il punto di vista dal quale "è lecito valutare" le altre concezioni e definizioni di funzione che si sono affermate nella storia.

Un valido esercizio al fine di liberarsi da questo pregiudizio spesso insito nel nostro modo di leggere la storia potrebbe essere quello di rintracciare le idee intuitive sopra elencate nelle definizioni e nelle spiegazioni dei propri libri di testo, o anche nelle concezioni che presenteremo nel seguito della relazione a partire dal prossimo paragrafo. Ci si convincerà in breve tempo che le varie proposte di definizione del concetto di funzione non sono una sorta di percorso lineare fatto di successivi miglioramenti, precisazioni e generalizzazioni, finalizzate alla costituzione di una moderna definizione, ma piuttosto traduzioni più o meno formali di idee che nascono, si perdono, si intrecciano e si confondono, e che traggono origine da attività ed intaressi, matematici e non, differenti.

1.2 Tracce nella storia della matematica

Per comprendere appieno le novità introdotte dal lavoro degli analisti del XVII e XVIII secolo è necessario ripercorrere alcune tappe ravvisabili nella storia della matematica dei secoli precedenti. Vogliamo in particolare raccogliere un elenco di alcuni fatti e personaggi che ci permetta di capire quali siano stati i passaggi che hanno portato all'introduzione esplicita del concetto di funzione.

Per far questo sottolineiamo alcune tappe (senza alcuna pretesa di esaustività) in cui si presentano nella storia delle concezioni alcune idee che saranno fondamentali per lo sviluppo dell'analisi e della matematica in genere nel periodo che va dal diciottesimo al diciannovesimo secolo [6].

- In Mesopotamia sono state ritrovate tavolette risalenti al periodo che va dal XVII sec.a.C. al VII sec.a.C. che raccolgono tavole di moltiplicazione, tavole di reciproci e tavole di quatrati, cubi, radici quadrate, cubiche, redatte nella notazione sessaggesimale cuneiforme. Allo stesso periodo risalgono tavolette con tabelle contenenti potenze successive di un numero, tavole di "funzioni" esponenziali e logaritmiche. [7] (per approfondimenti

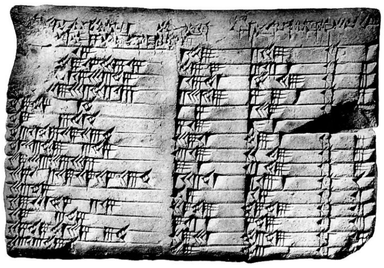
[6] Si possono riconoscere dietro a questi avvenimenti storico-matematici alcune delle idee intuitive legate al concetto di funzione elencate al paragrafo precedente. Sarebbe un esercizio utile cercare di approfondire questo tentativo di introduzione storica all'analisi matematica al fine di avere un'idea chiara delle motivazioni per cui tale branca della matematica è nata e sotto quali spinte. Ripeteremo questa opinione più volte nel testo, se non altro perché ha rappresentato la maggiore difficoltà della redazione di quest'ultimo.

[7] In questo senso si è soliti assegnare la prima intuizione del concetto di funzione alla civiltà babilonese. Qualcuno addirittura parla di "istinto verso la funzionalità":

> «Non sarebbe troppo generoso accreditare agli antichi babilonesi un'istinto verso la funzionalità; poichè una funzione è stata successivamente definita come una tavola di valori o una corrispondenza.» (E.T. Bell, 1945)

Questa opinione non ci sembra condivisibile: di fatti, se è vero che gli antichi babilonesi avevano a che fare con ciò che oggi chiameremo "funzione", non possiamo concludere che loro pensassero la questione in questi termini. Se fosse vero altrimenti potremmo concludere che lo stesso concetto di funzione era noto implicitamente anche all'agricoltore che comprende che la quantità di messe raccolta dipende dalla ampiezza del suo campo. Conclusione che ci pare tanto poetica quanto assurda.

vedi [2], cap.3, par.4 e successivi) .



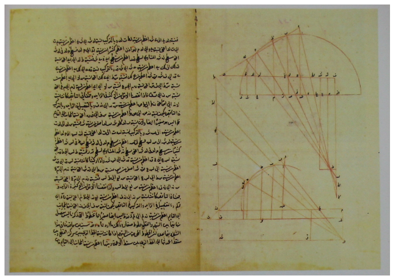


Figura 1.2. Da destra verso sinistra: tavoletta babilonese datata tra il 1900 a.C. e il 1600 a.C. che contiene un elenco di terne pitagoriche per i triangoli rettangoli. Manoscritto arabo delle *Coniche* di Apollonio. .

- Nel IV sec.a.C. la civiltà greca inizia ad avere a che fare con grandezze incommensurabili. La necessitè di poter confrontare tali grandezze con grandezze commensurabili ha portato al conseguente sviluppo della teoria delle proporzioni in Eudosso e, successivamente, in Euclide (per approfondimenti vedi [2], cap.6, par.6-7). La definizione V del libro quinto degli *Elementi* riassume bene questo sviluppo: compare in maniera implicita l'idea di corrispondenza espressa dall'uso della costruzione "ordinatamente... insieme..." [8] , ed in questo modo compaiono alcune delle idee che saranno utilizzate due millenni dopo per risolvere il problema della caratterizzazione dei numeri reali e quindi del continuo.

- Nel III sec.a.C. Apolonnio nel libro quinto delle sue Coniche affronta problemi di minimi e di massimi che in realtà sono problemi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche. I metodi di Apollonio sono ritenuti anticipatori di quelli della geometria analitica di Cartesio: egli introduce relazioni tra lunghezze di elementi di curve tramite l'utilizzo di coordinate ed equazioni espresse verbalmente. In realtà per gli antichi non era sufficiente soddisfare una certa relazione tra grandezze per ottenere una curva, bensì sentivano la necessità di rappresentarla come sezione di un solido o come risultato di un moto [9] (per approfondimenti vedi [2], cap.9, par.16).

- Nei secoli III a.C. Ipparco compila per primo quella che oggi sarebbe chiamata una tavola trigonometrica, tabulando i valori corrispondenti dell'arco e della corda associata per una serie completa di ampiezze di angoli. In seguito Tolomeo compila nuove tavole di valori ed utilizza relazioni equivalenti alle formule di somma, differenza e bisezione per seno e coseno (per approfondimenti vedi [2], cap.10, par.6).

[8]DAgli *Elementi* di Euclide. Definizione V del libro V:

> «si dice che le grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, se equimultipli della prima e della terza rispetto agli equimultipli della seconda e della quarta, sono ordinatamente, o insieme maggiori, o insieme eguali, o insieme minori.»

[9]In questo senso si iniziano ad intravedere due idee fondamentali per i secoli successivi: il possibile legame tra algebra e geometria e la necessità di intendere gli oggetti della matematica come oggetti del mondo reale.

La trigonometria nasce da necessità di calcolo pratiche esterne alla matematica pura: per esempio, gli studi di Tolomeo e di Ipparco sono nell'ambito della geometria celeste e dell'ottica. In questo senso non è da intendersi applicazione di un qualche concetto di funzione non ancora esplicitato ma presente in Tolomeo e negli altri matematici di quel periodo.

- Facendo un salto temporale di oltre un millennio, attorno al 1350 d.C. Oresme estende la teoria delle proporzioni di Bradwardine che a sua volta si richiamava a quella di Euclide. Include potenze ad esponente frazionario e formula le regole che oggi diciamo "del prodotto di potenze aventi la stessa base" e della "potenza di potenza".

  Un'altra idea di Oresme fu la rappresentazione di grafica di un teorema sul valor medio di una quantità il cui tasso di variazione è costante. Questo disegno rappresenta la prima intuizione di quello che oggi chiameremo "grafico di funzione". La rappresentazione grafica delle funzioni, nota come "latitudine delle forme", rimase argomento molto studiato per tutto il periodo che va da Oresme a Galileo. Oresme in realtà era interessato soprattutto alle aree sottese dalle curve più che alla rappresentazione grafica di queste. In questo senso i suoi metodi di somma di aree di rettangoli lo portarono a calcolare anche diverse somme di serie infinite, tra cui la prima dimostrazione che la serie armonica è divergente (per approfondimenti vedi [2], cap.14, par.15 e 16).

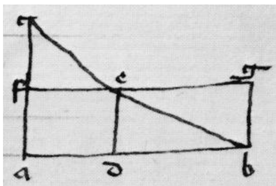


Figura 1.3. Prima rappresentazione grafica di una "funzione" da parte di Oresme.

- Nel XVI secolo compaiono, oltre alle formule di somma, differenza e bisezione, anche le formule di prostaferesi e di Werner. Vieté assieme a molti altri matematici dello stesso periodo redige tavole di valori di ottima precisione per seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente. Le definizioni di queste funzioni non sono quelle moderne di rapporto, ed il concetto di funzione non è esplicitato. Ad ogni modo l'elevato grado di precisione delle tavole di valori e la conoscenza di formule di calcolo raffinate sono un primo motivo per un interesse crescente della trigonometria indipendente dalle applicazioni [10].

[10] Boyer afferma in [2] che:

> «[Vietè] considera la trigonometria come una disciplina a sé stante della matematica ed [...] opera senza fare riferimento diretto alle mezze corde di un cerchio». Ed aggiunge: «identità trigonometriche comparvero un po' d'ovunque in Europa [...]: ciò ebbe come risultato una meno accentuata insistenza sugli aspetti di calcolo delle soluzioni di problemi relativi a triangoli, ed un intaresse più accentuato sulle relazioni funzionali analitiche.»

Nello stesso periodo Napier, Briggs, ed indipendentemente Burgi, introducono l'idea di logaritmo e ne redigono le prime tavole di valori. I logaritmi non sono intesi in rapporto al calcolo esponenziale che sarà introdotto circa un secolo più tardi, ma semplicemente come strumento pratico per la semplificazione dei calcoli di prodotti e quozienti, soprattutto in ambito trigonometrico [11] (per approfondimenti vedi [2], cap.16, par.7 - 10).

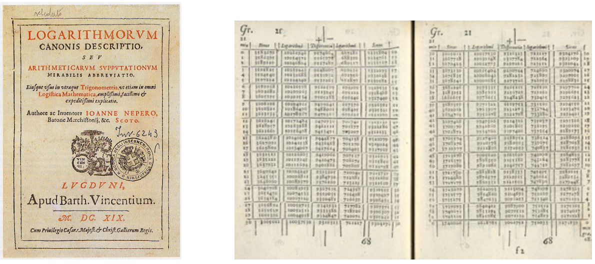


Figura 1.4. Da sinistra verso destra: Frontespizio e tavole dei logaritmi da *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614). .

- Il XVII secolo rappresenta un periodo di grandissimo fermento in matematica. Le contingenze storiche e culturali fanno sì che molti dei matematici più illustri cerchino di trarre, in qualche modo, le somme degli sviluppi recenti in ambito matematico: in questo senso si inizia a cambiare prospettiva guardando alle questioni ed ai problemi in un ottica più generale, introducendo un modo più astratto di affrontarli.

  Agli inizi del XVII secolo [12] si manifestano quelle che saranno le origini del calcolo infinitesimale. Mentre Galileo riflette sul concetto di infinito, il suo discepolo Bonaventura Cavalieri pubblica riguardo al suo "metodo degli indivisibili" per il calcolo delle aree e Torricelli, per la prima volta nella storia, traccia il grafico di una funzione logaritmica calcolandone l'area sottesa. In questo stesso periodo compaiono formule equivalenti alla formula di integrazione di potenze ad esponenti interi e di funzioni trigonometriche dovute a matematici quali Fermat, Gregory San Vincent, Roberval. Più in generale sembra che il problema del calcolo delle aree sia stato affrontato con successo prima del problema del calcolo delle tangenti [13].

  D'altra parte Cartesio mette in dialogo gli strumenti dell'algebra con quelli della geometria consentendo così di creare relazioni quantitative tra "formule e figure". Il suo contributo è fondamentale in vista della scoperta da parte di Fermat del principio fondamentale della geometria analitica:

  > «Ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva.» (Fermat, 1636)

[11] Un'idea delle applicazioni e delle motivazioni concrete che hanno portato all'invenzione dei logaritmi la si può trovare anche in [9] cap.5, par.9.
[12] Rimandiamo a [9] per una riflessione sulle motivazioni storiche, oppure, per uno sguardo più breve, al paragrafo successivo di questo testo.
[13] da [2] pag.411.

Fermat introduce per primo l'idea di rapporto incrementale come strumento per il calcolo di massimi e minimi a curve algebriche (Per approfondimenti vedi [2], cap.18) .

Figura 1.5. Da sinistra verso destra: Galilei, Torricelli, Cartesio e Fermat.

- Il problema del calcolo delle aree era intimamente connesso (come già visto parlando di Oresme) al problema del calcolo di somme e prodotti infiniti: per tutto il secolo XVII molti matematici, come per esempio Wallis e Mengoli, si preoccuparno del calcolo di tali somme e prodotti. Non solo ma compaiono formule equivalenti all'integrazione di potenze con esponenti frazionari oltre che interi.

  Tali risultati vengono raccolti in pubblicazioni dedicate specificatamente al calcolo infinitesimale: tra queste è rilevante l'opera di Gregory [14] il quale anticipò di quasi mezzo secolo gran parte dei risultati che sarebbero stati pubblicati da Newton nella forma analitica che ne segnerà iol successo: conosceva la formula del binomio, la formula di integrazione di diverse funzioni, la formula di espansione in serie di Taylor (che sarà pubblicata circa 40 anni dopo).

  In questo periodo Mercatore esibisce la prima espansione in serie del logaritmo integrando $\frac{1}{1-x}$. Mentre in Inghilterra Barrow si rende conto della natura inversa del problema del calcolo delle tangenti e dell'integrazione. Siamo arrivati alla soglia della nuova analisi che nascerà con l'apporto di Newton e Leibniz. (Per approfondimenti vedi [2], cap. 18)

Figura 1.6. Da sinistra verso destra: Galilei, Torricelli, Cartesio e Fermat.

- Nella seconda metà del diciassettesimo secolo Newton e Leibniz inventano indipendentemente il calcolo infinitesimale moderno presentando il metodo delle flussioni e del calcolo differenziale rispettivamente. Parallelamente Newton scopre la formula del binomio ed le sue riflessioni sull'operare con

[14] Matematico illustre che ha lavorato e pubblicato molti lavori importanti anche a Padova. Per Boyer: «[Se Gregory] avesse espresso i risultati delle proprie ricerche in forma analiica, avrebbe forse anicipato Newton nell'invenzione del calcolo infinitesimale» ([2], pag.444).

espansioni in serie lo portano a scoprire "che l'analisi basata su serie infinite aveva la stessacoerenza interna, ed era regolata dalle stesse leggi generali, dell'algebra che operava con quantità finite. Serie infinite non dovevano più essere considerate soltanto come tecniche di approssimazione, ma costituivano forme alternative delle funzioni che esse rappresentavano" ([2], pag.453). (Per approfondimenti vedi [2], cap. 19).

Successivamente Jean I Bernulli introducono il calcolo esponenziale.

Figura 1.7. Da sinistra verso destra: Newton, Leibniz e Bernoulli.

Questa lunga storia che abbiamo appena abboazzato (e che varrebbe la pena approfondire, completandola con le tappe intermedie non citate e le motivazioni storiche, sia interne che esterne, dello sviluppo della matematica), vuole far intravedere quale sia stato il percorso storico che porta alla nascita del calcolo infinitesimale ed alla successiva nascita dell'analisi intesa come disciplina indipendente che si occupa di processi infiniti.

Non vogliamo soffermarci ulteriormente sulle tappe storiche che hanno portato alla nascita dell'analisi nel diciottesimo secolo, ma vogliamo sottolineare alcuni aspetti che risultano evidenti dall'elenco precedente e che costituiscono la premessa fondamentale per la compresione dello sviluppo del concetto di funzione inteso come oggetto principe dello studio in analisi:

a. il concetto di funzione, inteso come lo intendiamo oggi, benché non esplicitato è comparso nella storia con sfumature di significato differenti che costituiscono il bagaglio concettuale intuitivo a cui tale concetto si riferisce.

Tali idee sono disperse nelle tavole di valori dei logaritmi e delle funzioni trigonometriche, nei simboli dell'algebra, nelle formule della fisica, nella concezione di curve come sezioni o moti... etc etc.

Il calcolo infinitesimale si pone come strumento di indagine per ognuno di questi campi, un approdo per ciascuno di questi problemi.

b. i problemi che hanno portato all'introduzione dei vari concetti che oggi colleghiamo a quello di funzione sono in gran parte di carattere applicativo. Il fatto che le applicazioni abbiano da sempre guidato gli interessi dei matematici, pur con la necessità continua di sistemare e formalizzare in maniera organica i contenuti delle proprie conquiste, sarà una tensione presente anche nel seguito della storia.

1.3 Situazione nel secolo diciottesimo.

Nel secolo XVII, come abbiamo visto al paragrafo precedente, la matematica ha subito un grosso impulso er l'attività frenetica di personaggi quali Galileo, Cavalieri, Torricelli in Italia, o come Cartesio, Fermat, Roberval, Desargues, Pascal in Francia. I numerosi sviluppi portarno alla formazione di circoli di discussione ed una più fitta corrispondenza tra matematici. Fino ad allora infatti non esisteva alcuna organizzazione ufficiale che coordinava le attività dei matematici di professione, cosìcché a partire dal XVII secolo la matematica si sviluppoò più per una sua logica interna che non a seguito alle sollecitazioni di forze economiche, sociali o tecnologiche [15]

Fu in questo contesto culturale che videro la luce le prime Accademie: prima a Napoli nel 1590, poi a Roma nel 1603, in Francia il Cabinet du Puy ed in Inghilterra l'Invisible College. Si trattava della "cristallizzazione" dei gruppi di matematici in attività che erano in stretto rapporto. Tale organizzazione era in aprto contrasto con quella delle Università dell'epoca le quali aderivano allo spirito "scolastico" che perpetuava un atteggiamento conservatore nei confronti delle forme e dell'oggetto della conoscenza. Si ha pertanto che le Accademie costituiscono il soggetto che esprime il nuovo spirito di ricerca tipico del XVII secolo [16]

Più avanti nasceranno la Royal Society a Londra (1662) e l'Accademia delle Scienze a Parigi (1665). In questo periodo il ritmo di produzione di risultati in ambito matematico non si arrestò di certo arricchendosi dei contributi di nomi come quelli di Wallis, Gregory, Mengoli e Barrow (di cui abbiamo già fatto il nome).

Nelle Accademie l'attività didattica era quasi del tutto inesistente lasciando così grande libertà ai membri di dedicarsi ai loro interessi cosìcché agli inizi del XVIII secolo i centri più importanti per la matematica coincidevano con le sedi delle Accademie più prestigiose: quelle di Parigi, Berlino e San Pietroburgo.

Ma l'attività scientifica non si può dire fosse interamente concentrata solo nella Accademie: nel periodo che ha visto i cosidetti "sovrani illuminati" al potere in tutta Europa durante l'Illuminismo, si diffuse nelle corti una sorta di "snobbismo intellettuale" (come lo chiama Struik in [9] cap.7, par.1) secondo cui era prestigioso circondarsi di menti illustri, dotti, scienziali. Non è così sorprendente vedere matematici quali Eulero, i Bernoulli, Lagrange girare per le corti d'Europa. In questo senso le Accademie divengono luogo privilegiato non solo per gli scienziati ma anche per le stesse corti che le utilizzano con fini pratici di miglioramento delle manufatture, dell'efficienza dell'esercito, della costruzione della flotta, delle tecniche di navigazione, la balistica ed la predizione dei moti celesti. Le applicazioni divengono stimolo fondamentale per il matematico del XVIII secolo.

La teoria gravitazionale di Newton costituisce lo strumento teorico per indagare i problemi relativi al calcolo della posizione degli astri, mentre il nuovo calcolo differenziale di Leibniz diviene patrimonio comune europeo, calamitando così sul calcolo infinitesimale e la meccanica gli interessi di gran parte dei matematici del tempo [17].

[15] Contenuti tratti da [2], cap.17, par.1.
[16] Contenuti tratti da [9], cap.6, par.5.
[17] Contenuti tratti da [9], cap.7, par.1.

Nonostante ciò alla vigilia del XVIII secolo vi sono ancora molte questioni da risolvere:

a. l'apparente frammentazione di molte parti della matematica che rientreranno in seguito nelle competenze degli "analisti".

b. le numerose critiche al metodo delle flussioni di Newton e quello del calcolo differenziale di Leibniz costituivano un problema di fondamentale importanza per giustificare gli sviluppi della matematica. Per avere un esempio riportiamo un estratto da *The Analyst* di George Berkley (1685 - 1753):

> «Che cosa sono queste flussioni? Le veocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarle spiriti di quantità sparite?» (The Analyst, 1734).

c. l'individuazione dell'oggetto proprio del calcolo infinitesimale e quindi la discussione sulla natura del concetto di funzione.

Saranno proprio i primi tentativi di Leiniz e Newton a rispondere a quest'ultimo punto a rendere possibile in seguito lo sviluppo di una nuova disciplina matematica che contenesse:

- i polinomi, la trigonometria, il calcolo esponenziale, la teoria dei logaritmi;
- la rappresentazione grafica e le espansioni in serie di queste funzioni;
- gli strumenti del calcolo infinitesimale;
- i problemi relativi al calcolo delle aree, delle tangenti, del calcolo di somme e prodotti infiniti.

Nel prossimo paragrafo commentiamo le prime definizioni del termine "funzione".

1.4 Origini del termine di funzione

Il termine di funzione si trova per la prima volta in Leibniz (qualcuno dice 1673 altri dicono 1694... bo!):

> «tutte le porzioni di linea retta, che si ottengono tracciando rette indefinite, che corrispondono al punto fisso e ai punti della curva»
> (G. Leibniz, *Nova Calculi differentialis*, 1694)

Intende cioè una qualunque quantità variabile da punto a punto di una curva (per esempio: la lunghezza della tangente, della normale, etc etc). Della curva veniva detto semplicemente che era fornita «da un'equazione». A Leibniz, oltre all'introduzione del termine funzione, si riconosce la paternità dei termini "costante", "variabile" e "parametro", nel senso moderno.

In seguito lo stesso Leibniz, nella sua *Historia* del 1714, intenderà più semplicemente per funzione una quantità che dipende da una variabile. Si avvicina così alla definizione che ne darà Johann I Bernoulli nel 1718:

> «Chiamo funzione di una grandezza variabile una quantità formate in una maniera qualsiasi da variabili e da costanti»

Questa definizione sarà quella più adottata negli anni successivi e "consacrata" all'uso da Eulero: si tratta di una definizione formale che avremmo modo di indagare più tardi nella versione di Eulero.

Si intravedono in queste prime definizioni piuttosto vaghe le stesse idee che avevamo visto alla prima sezione di questo capitolo: l'utilizzo delle parole "curva", "equazione", "dipende", "formate in maniera qualsiasi", la dice lunga su quanto l'intuizione guidasse tali definizioni.

Al di là delle definizioni in sé è bene sottolineare l'importanza che il concetto di funzione ha avuto in questo periodo storico. Così, pur non avendo mai usato il termine funzione, Newton sembra avere le idee ben chiare su quale sia l'oggetto del calcolo infinitesimale e quindi su cosa siano per lui le "funzioni".

A partire dai suoi primi lavori sul calcolo infinitesimale, Newton introduce l'idea che il calcolo differenziale si occupi del concetto di "variazione". In particolare Newton è interessato a mettere al centro della sua ricerca il movimento dei corpi, e l'impostazione analitica deve essere adatta a trattare quantità variabili. In proposito afferma:

> «Io considero qui le quantità matematiche non come costituite da parti molto piccole, ma come descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e quindi generate, non dalla giustapposizione delle loro parti, ma dal moto continuo dei punti [. . .]. Questa genesi ha effettivamente luogo in natura e può essere vista quotidianamente nel moto dei corpi.» (Newton, *Tractatus de quadratura curvarum*, 1676)

Quest'idea non così esplicita nelle definizioni di Leibniz e Bernoulli è fondamentale poiché porta con se quel bagaglio di intuizione geometrica e fisica che farà da contraltare alle idee legate al formalismo di Leibniz e Bernoulli, ed inoltre sarà motore per lo sviluppo del concetto di funzione nel futuro.

Riassumendo potremmo dire che:

- L'esplicitazione del concetto di funzione diviene necessaria nel momento in cui gli strumenti del calcolo differenziale individuano le "grandezze variabili legate ad una curva" di Leibniz, o le "flussioni" di Newton come oggetto della loro ricerca. La definizione esplicita del concetto di funzione non è quindi solo una questione di nomenclatura ma il riconoscimento dell'oggetto del calcolo infinitesimale, e quindi, in definitiva, la presa di coscienza di un programma di ricerca. Questo segna già un primo cambiamento di prospettiva rispetto al passato: il concetto di funzione da strumento di indagine (dalle tavole Mesopotamiche, alle tavole trigonometriche piu' avanzate...) diviene oggetto stesso di indagine.

- La definizione formale di Bernoulli e l'idea così intuitiva di Newton rappresentano i due riferimenti della storia futura del concetto di funzione. Da una parte c'è la volontà di allontanarsi da una trattazione geometrica del calcolo infinitesimale cercando definizioni che si dirigano verso l'algebra piuttosto che verso la geometria. Dall'altra parte la necessità di parlare della natura, e quindi trovare un riscontro fisico nei risultati ottenuti mediante l'analisi matematica. Queste due tensioni muoveranno il seguito della storia.

Da qui ha inizio la storia dell'analisi matematica in senso moderno. Nel prossimo capitolo descriveremo l'opera del suo primo grande interprete: Eulero.

Capitolo 2

Eulero e l'analisi

Sarà Leonhard Euler a provare a dare una prima risposta a queste questioni. I trattati euleriani *Introductio in Analisin Infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-1779) rappresentano il punto di arrivo della speculazione analitica del periodo che va dal 1655, anno al quale risalgono le prime ricerche newtoniane sul metodo delle flussioni, fino alla metà del Settecento. Al contempo essi rappresentano il punto di partenza dell'analisi matematica moderna.

2.1 Biografia

[1] Leonhard Euler è nato a Basilea il 15 aprile 1707. Suo padre era un pastore protestante che sperava che il figlio entrasse nella carriera ecclesiastica. Il giovane Eulero studiò però sotto la guida di Jean (o Johann) Bernoulli e collaborò con i figli Daniel e Nicolaus Bernoulli [2] ottenendo, da una parte un'educazione di vasto respiro che comprendeva lo studio della teologia, della medicina, dell'astronomia, della fisica e delle lingue orientali, e dall'altra parte la scoperta della propria vocazione verso la matematica.

Figura 2.1. Leonhard Euler.

La vastità delle sue conoscenze gli permise a Eulero di seguire i fratelli Bernoulli in Russia come insegnante di medicina nell'Accademia di Pietroburgo istituita in quegl'anni da Caterina I di Russia. Nel frattempo Nicolaus Bernoulli era morto e quando Eulero nel 1730 occupa la cattedra di filosofia naturale Daniel Bernoulli era titolare della cattedra di Matematica dell'Accademia. Ma bisogna attendere soltanto tre anni perché Daniel accetti la cattedra a Basilea ed Eulero diventi a soli 26 anni il matematico più importante dell'Accademia.

[1] La biografia di Eulero è tratta in larga parte da [2].

[2] In questo testo non parleremo del fenomeno della famiglia Bernoulli, una delle famiglie più feconde di scienziati ed in particolare di matematici, di tutta la storia. Per quanto ci riguarda nomineremo solamente due componenti di questa famiglia: Johann Bernoulli e Daniel Bernoulli, ma è bene sapere almeno come curiosità che un cugino di Daniel, Nicholaus, occupò per un certo periodo di tempo la cattedra di matematica che un tempo era stata di Galileo a Padova (vedi [2], cap.20, par.7).