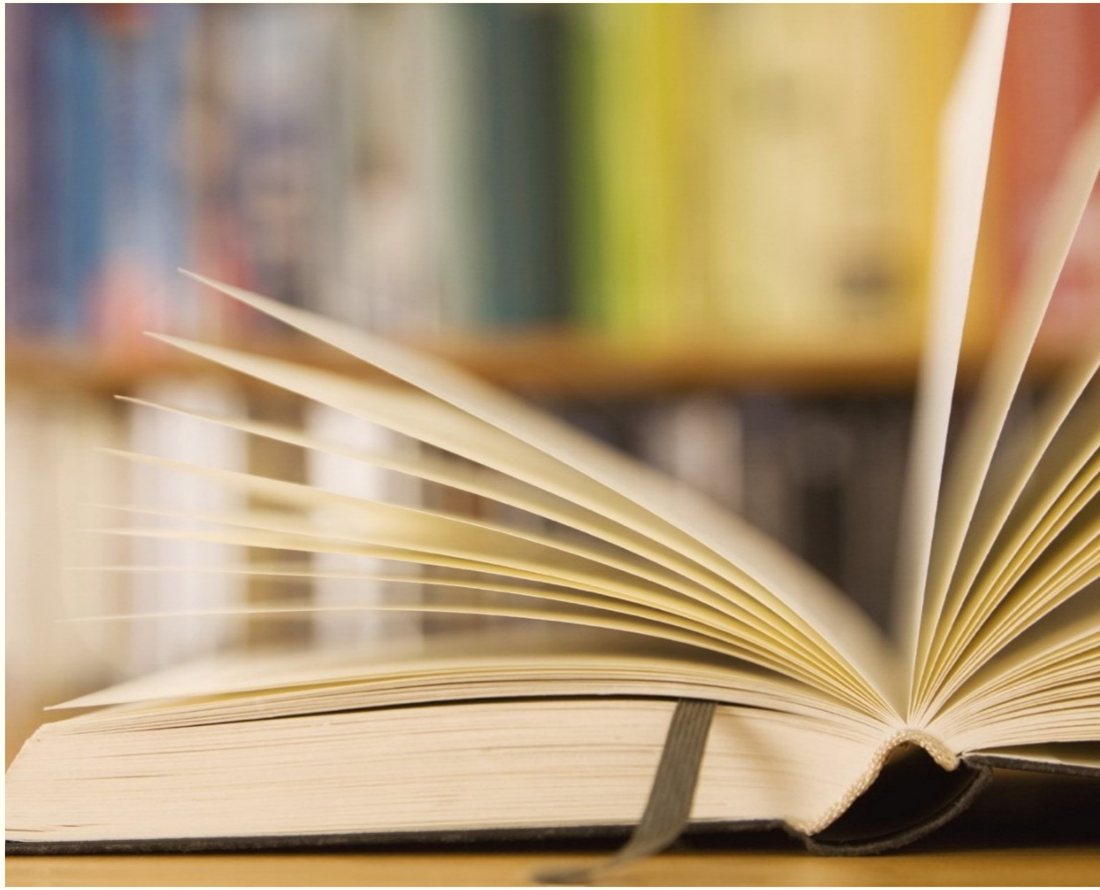
LA DIMOSTRAZIONE

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Corso di laurea in *Scienze della Formazione Primaria*
Corso di *Elementi di Geometria*



In quali contesti si parla di dimostrazione?

"La dimostrazione è presente ovunque in matematica; ne è la caratteristica essenziale, nel bene e nel male. Non c'è matematica senza dimostrazione. E vero che la matematica non si esaurisce in dimostrazioni e neanche può ridursi a esse la comprensione della matematica. C'è l'euristica per la risoluzione dei problemi, c'è la tecnica di calcolo in senso lato, e c'è l'aspetto della modellizzazione. Ma la dimostrazione segna in genere il passaggio alla matematica vera e propria da una fase propedeutica di acquisizione di abilità e nozioni che si dicono matematiche ma che sono solo il prolungamento della padronanza fisica dell'ambiente esterno e che servono a un controllo più efficiente dello stesso" (Lolli)

In quali contesti si parla di dimostrazione?

"La dimostrazione è un atto sociale che si realizza in un microcosmo di interlocutori che condividono una stessa razionalità" (E. Barbìn)

Argomentare e **dimostrare** sono due processi compresenti nel fare matematica e si distinguono per struttura logica del discorso e processi cognitivi messi in azione, messi in atto dai differenti obiettivi che li generano e producono differenze significative perché mettono il soggetto su due piani molto vicini ma sostanzialmente diversi.

In quali contesti si parla di dimostrazione?

"La dimostrazione è un atto sociale che si realizza in un microcosmo di interlocutori che condividono una stessa razionalità" (E. Barbìn)

L’argomentazione matematica è diversa dell’argomentazione retorica, comunemente usata nel linguaggio naturale.
Il suo obiettivo consiste nello stabilire la verità di un enunciato attraverso l’esibizione di argomenti convincenti (tenendo però conto della struttura teorica).
La dimostrazione, invece ha l’obiettivo di stabilire non solo, la verità di un enunciato, ma anche la sua deducibilità dai principi della teoria (cioè i motivi per cui è vero).

In quali contesti si parla di dimostrazione?

" …Con il termine argomentazione si intende la presentazione di varie tesi e la loro verifica o confutazione con semplici ragionamenti, con esempi immediati o con prove sperimentali. … " (C. Marchini, 2003)

A cosa serve dimostrare?

Funzioni della dimostrazione (De Villers, 1990)

validare

convincere

spiegare

sistematizzare (organizzare in un sistema teorico)

scoprire (o inventare, nuovi risultati)

comunicare (conoscenza matematica)

Esperimenti e dimostrazioni

Nella maggior parte delle discipline scientifiche (ad esempio fisica, chimica, biologia...) per stabilire la verità di un’affermazione si ricorre a misurazioni, esperimenti o simulazioni: se gli esperimenti, magari fatti più volte e da più persone, confermano l’affermazione questa viene accettata (almeno temporaneamente), altrimenti viene rifiutata.

Esempio: il principio di Archimede *Ogni corpo immerso parzialmente o completamente in un fluido riceve una spinta verticale dal basso verso l’alto, uguale per intensità al peso del volume del fluido spostato.*

In matematica (ma anche in informatica), questo “metodo scientifico” non funziona!

Esperimenti e dimostrazioni

In matematica, per stabilire la verità di un’affermazione (= teorema) si deve ricorrere a una dimostrazione.

Teorema: è l’affermazione (riguardante numeri, funzioni, enti geometrici, o altri oggetti matematici) che si vuole dimostrare. Di solito è della forma

“Se valgono certe ipotesi, allora anche la tesi del teorema è vera.”

Esempio: Se p e q sono numeri negativi, allora $p \cdot q$ è un numero positivo.

Dimostrazione: catena di ragionamenti che ci permette di concludere che la tesi del teorema deve essere vera partendo dall’assunzione che le ipotesi del teorema siano vere.

La dimostrazione in matematica: ipotesi, tesi, regole

Un teorema è un enunciato della forma

*Se valgono **P1** e **P2** e …**Pn**, allora vale anche **Q**.*

Le affermazioni **P1**, …, **Pn** sono dette **ipotesi** del teorema, mentre **Q** è detta **tesi** del teorema.

Un esempio di teorema è il seguente:

Teorema
Se n è un numero naturale dispari ed m è un numero naturale pari, allora n+m è dispari.

$$\text{Se } \underbrace{\text{n è un numero naturale dispari}}_{P_1} \text{ ed } \underbrace{\text{m è un numero naturale pari}}_{P_2}\text{, allora}$$

$$\underbrace{\text{n} + \text{m è dispari}}_{Q}.$$

La dimostrazione in matematica: ipotesi, tesi, regole

La dimostrazione diretta è la strategia più semplice e naturale per stabilire un teorema del tipo

$$P_1, \ldots, P_n \models Q.$$

che si legge "Q è conseguenza logica di $P_1, \ldots, P_n$"

La dimostrazione diretta assume di trovarsi in un qualunque contesto in cui siano verificate le ipotesi $P_1, \ldots, P_n$ e sulla base di semplici e rigorosi ragionamenti stabilisce che in tale contesto anche la tesi Q è verificata

Esempi di induzione e di deduzione

I ragionamenti deduttivi sono ragionamenti in cui le premesse (se vere) garantiscono la verità della conclusione. La conclusione di un ragionamento deduttivo corretto non può eventualmente essere falsa, assumendo che le sue premesse siano vere. Questo è ciò che significa etichettare un ragionamento come “valido” in logica. La forma o la struttura di un ragionamento deduttivo è l’aspetto fondamentale da considerare.

I ragionamenti induttivi sono ragionamenti con premesse che rendono probabile che la conclusione sia vera, ma non garantiscono in maniera assoluta la sua verità. I ragionamenti induttivi sono di gran lunga il più comune tipo di argomentazione che vediamo nella nostra vita quotidiana. Siamo in grado di valutare i ragionamenti induttivi da uno spettro che va da efficace (più forte) a inefficace (più debole). Il ragionamento più efficace (più forte) è quello in cui le premesse portano a una conclusione che è probabilmente vera, con un elevato grado di probabilità. È importante ricordare che i ragionamenti induttivi non possono mai garantire pienamente la verità della conclusione

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

Se da un’affermazione A segue una contraddizione, allora chiaramente Anon può esser corretta, cioè vale la negazione di A, che indichiamo con ¬A.
D’altra parte, se da ¬A segue una contraddizione, che cosa e lecito dedurre? `
In questo caso dovremmo limitarci a dire: se da ¬A segue una contraddizione, dobbiamo escludere ¬A; concludiamo quindi che vale la negazione di ¬A, cioè ¬¬A.
Ebbene, l’idea generale delle dimostrazioni per assurdo e che, una volta scartato ¬A, *tertium non datur*, dunque A.
Questo ragionamento e pienamente giustificato se si accetta che ¬¬A equivalga ad A.

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

Da un punto di vista storico, la dimostrazione per assurdo pare risalire a Zenone di Elea, lo stesso dei celebri paradossi (V sec. a.C.). Negli Elementi di Euclide molti teoremi sono dimostrati per assurdo.

Il ragionamento per assurdo (detto anche riduzione all’assurdo) pone indubbiamente difficolta didattiche, ma è accettato nella vita quotidiana, dove spesso si presenta nella forma di ragionamento per esclusione.
Un ragionamento per esclusione e del tipo: si presentano, a priori, solo tre possibilità; se due di esse non sono accettabili, allora dobbiamo ammettere per forza che valga la terza.
Si pensi alla frase *non puoi essere stato che tu*.

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

Un esempio spontaneo di ragionamento per assurdo si ritrova nel gioco del sudoku

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

La radice quadrata di 2, come altri radicali, è un numero irrazionale ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Si può dimostrare questa proposizione ricorrendo a una dimostrazione per assurdo. Si presuppone vero che √2 possa essere espressa da una frazione, affermazione contraria all’irrazionalità della radice quadrata di 2, e si mostra che questo presupposto porta a una contraddizione.

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

Affermare che √2 è irrazionale significa affermare che la radice quadrata di 2 non può espressa sotto forma di frazione m/n.
L'affermazione contraria della precedente presuppone che la radice quadrata di 2 può essere espressa da una frazione, ridotta i minimi termini, e che esistono due numeri naturali m e n, primi tra loro, tali che si possa scrivere la relazione seguente

$$\sqrt{2} = m/n$$

Elevando al quadrato i due termini dell'uguaglianza ottengo la seguente relazione.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Ovvero

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

Cioè

$$m^2 = 2n^2$$

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

Possiamo osservare, prima di proseguire, che un qualsiasi numero naturale moltiplicato per 2 produce un numero pari e che un numero naturale pari qualsiasi può essere rappresentato come prodotto di 2 per un altro numero naturale. Si ha inoltre che se il quadrato di un numero naturale qualsiasi è pari lo è anche la base della potenza.
Il numero m è, quindi, pari e può essere ottenuto a sua volta come prodotto di 2 per un altro numero naturale che indichiamo con k.
Sostituendo si ottengono le seguenti uguaglianze.

$$m = 2k \ \rightarrow \ (2k)^2 = 2n^2$$

Le proprietà delle eguaglianze nota ci permettono di dividere entrambi i membri per 2 ottenendo

$$\frac{4k^2}{2} = \frac{2n^2}{2} \ \rightarrow \ 2k^2 = n^2$$

Un esempio di dimostrazione per assurdo: √2 non è un numero razionale.

Ne consegue che anche n^2 è pari e lo è, quindi, anche n.

Avendo presupposto che la radice quadrata di 2 possa essere espressa da una frazione m/n, ridotta i minimi termini, con m e n numeri naturali primi tra loro, e che non possono, quindi, essere entrambi pari, si ha la contraddizione con l'ipotesi di partenza

Il radicale √2 non può essere, quindi, espresso come frazione o numero razionale. A √2 la storia assegna il primo incontro con l'irrazionalità e, in termini geometrici, rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti unitari.