EUCLIDE (I PARTE)

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Corso di laurea in *Scienze della Formazione Primaria*
Corso di *Elementi di Geometria*

Euclide

Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico.

Albert Einstein, *Come io vedo il mondo*, 1954, La questione del metodo", p. 46

Euclide

- Il suo libro più famoso, ***Elementi***, è uno dei testi più importanti e influenti della Storia delle Matematiche e ha costituito la base per l'insegnamento della geometria nel mondo occidentale per più di 2000 anni. Gli ***Elementi*** hanno contribuito fortemente a porre uno standard di rigore e di struttura logica.
- Poco è noto sulla vita di **Euclide**. Secondo Proclo (410-485 d.C.), l'autore di un prezioso "**Commento sul I° Libro degli *Elementi* di Euclide**", egli fu uno degli ultimi allievi della scuola platonica e visse (durante il regno di Tolomeo I Sotere, 306-283 a.C.), in Alessandria d'Egitto, sede di una celebre scuola scientifica raccolta attorno alla **Biblioteca**, dove si raggiunse il culmine dello sviluppo teorico greco-ellenistico.
- Pappo di Alessandria (circa 320 d.C.), l'autore di una poderosa "**Collezione matematica**", afferma che Apollonio di Perga (262-190 a.C.) studiò a lungo in Alessandria sotto gli allievi di **Euclide**. Così tutte le fonti portano a stabilire che **Euclide** fiorì in Alessandria attorno al 300 a.C. e vi stabilì una scuola matematica.

Euclide

- Fin dall'antichità, l'opera euclidea ebbe tanto successo da soppiantare tutti gli altri testi di geometria precedenti.
- I libri (oggi si chiamerebbero capitoli) che formano gli ***Elementi***, sono **tredici** e contengono in tutto **467 teoremi**.
- Alcune edizioni antiche degli ***Elementi*** contengono anche due libri in più, il ***XIV*** ed il ***XV***, ma è stato appurato che il libro ***XIV*** si deve ad Ipsicle (circa 150 a.C.), mentre il ***XV*** fu sostanzialmente composto nel VI secolo d.C.

Euclide

Può apparire singolare il fatto che proprio Euclide, la cui opera principale, gli *Elementi*, sia stata nella storia, dopo la Bibbia, la più letta, la più diffusa e la più tradotta di tutti i testi antichi, sia invece come persona il più sconosciuto.

Di notizie attendibili su di lui vi è solo un passo di Proclo Diadoco (V sec. D.) da cui apprendiamo che egli dovette vivere ad Alessandria al tempo di Tolomeo I35; molti elementi inoltre fanno pensare che dovette essere uno dei primi scienziati
chiamati dal re per operare ed insegnare nel Museo.

Lo stesso Proclo prosegue il passo di cui sopra affermando che:
“Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli Elementi la costruzione delle figure chiamate platoniche.”

Euclide

Secondo Proclo, gli ***Elementi*** di Euclide sono un testo scolastico che riunisce tutti quei concetti e teoremi che costituiscono il fondamento della matematica greca. È il solo pervenutoci di libri similari (Ippocrate da Chio etc.). L'elenco seguente dà il contenuto dei tredici libri:

Il **Libro I** contiene, le definizioni, i postulati e le nozioni comuni, le proprietà elementari dei triangoli e alcune delle principali costruzioni geometriche: la *bisettrice*, il *punto medio*, la *perpendicolare*, etc.

Il **Libro II** contiene la cosiddetta "**algebra geometrica**", la trattazione cioè di problemi che oggi risolviamo con equazioni di primo e secondo grado.

Il **Libro III** è interamente dedicato al cerchio.

Il **Libro IV** è dedicato ai poligoni regolari iscrittibili e circoscrittibili a un cerchio.

I Libri V e VI sono rispettivamente dedicati alla teoria delle proporzioni (il V) ed alla similitudine (il VI).

Euclide

I Libri VII, VIIII e IX sono i cosiddetti “**libri aritmetici**”, dedicati alla trattazione delle proprietà dei numeri naturali [**notevole la IX,20 che dimostra l’infinità dei numeri primi**].

Il **Libro X**, il più lungo degli ***Elementi*** (**115 Proposizioni!**), tratta delle irrazionalità che noi esprimiamo con radicali quadratici (anche sovrapposti). Notevole la **X,1** che afferma l’esistenza di grandezze piccole a piacere.

.
Il Libro XI è dedicato alla trattazione della geometria solida elementare.

Il Libro XII è dedicato alla misura di superfici e volumi [**metodo di esaustione**].

Il **Libro XIII**, infine, tratta dei poliedri ed è introdotto da sei Proposizioni riguardanti la cosiddetta ***sezione aurea*** di un segmento.

Euclide

Libro	Libri precedenti o Proposizioni da cui dipende
I	- (indipendente)
II	- **I**
III	- **I**; II,5-6
IV	- **I**; II,11; III
V	- (indipendente)
VI	- **I**; III,27-31; V
VII	- (indipendente)
VIII	- V, def.ni; VII
IX	- II,3-4; VII; VIII
X	- **I,44 e 47**; II; III,31; V; VI; VII,4, 11 e 26; IX, 1, 24 e 26
XI	- **I**; III,31; IV,1; V; VI
XII	- **I**; III; IV,6 e 7; V; VI; X,1; XI
XIII	- **I**; II,4; III; IV; V; VI; X; XI

È dunque evidente, a parte la complessità del Libro X, il più difficile dell'opera, la forte influenza che il **Libro I** esercita su tutta la struttura geometrica degli ***Elementi***: da esso dipendono infatti i Libri **II**, **III**, **IV**, **VI**, **XI**, **XII**, **XIII** e **parzialmente il X**.

Euclide

Il Libro comprende le ***definizioni* preliminari**, i ***postulati***, gli ***assiomi*** o ***nozioni comuni***, e **48 teoremi**.

Le definizioni mirano a descrivere un ente geometrico.

Così, quando Euclide definisce il punto con la celebre definizione: ***Punto è ciò che non ha parti***, vuole soltanto descrivere l'ente geometrico ***punto***, con una nomenclatura soddisfacente, affinché lo si possa individuare facilmente.

Le definizioni sono in tutto **23**, e l'ultima è quella di rette parallele, sulla quale ritorneremo.

Dopo le definizioni, Euclide elenca **5 postulati** e **5 assiomi** (o nozioni comuni).

Euclide

I *postulati*

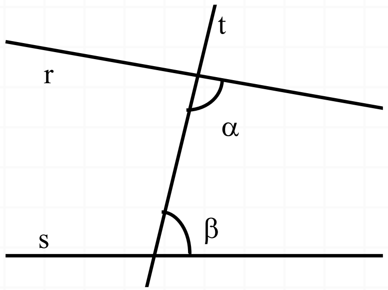
P_1 Che si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi

P_2 Che si possa prolungare indefinitamente una linea retta

P_3 Che si possa descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi

P_4 Che tutti gli angoli retti siano uguali

P_5 Che se una retta (t), intersecando due altre rette (r,s), forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti



Euclide

Gli assiomi

1. Cose uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro

2. Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, le totalità sono uguali

3. Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali

4. Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;

5. Il tutto è maggiore della parte

Euclide

1. ***Proposizioni costruttive***:

I,1: *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.*

I,2: *Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.*

I,3: *Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

I,23: *Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo dato.*

Euclide

2. I criteri di uguaglianza (congruenza) dei triangoli (I, 4-8-26) *e le proposizioni che servono immediatamente alla loro dimostrazione* (I, 7-24-25).

3. Le proprietà delle perpendicolari (I, 11-12) e *le relazioni fra gli angoli formati da due rette incidenti* (I, 13-14-15).

- **I,15: Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali.**

4. Le relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo (I, 5-6-16-17-18-19).

- **I,16-17: In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti. In ogni triangolo, la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.**

5. La teoria delle parallele (I,27-28-29-30-31).Dopo la transitività del parallelismo (I,31), si perviene all'importante «teorema dei due retti» (I,32), cui si riattaccano le proprietà elementari dei parallelogrammi (I,33-45), la costruzione del quadrato (I,46), il Th. di Pitagora (I,47) e il suo inverso (I,48)

I criteri di congruenza

I criterio di congruenza

« *Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l’angolo compreso rispettivamente congruenti* »

Questo criterio va preso come postulato. Euclide ne dà una dimostrazione, effettuata tramite il trasporto di segmenti e di angoli (I, 4). Questo metodo, tuttavia, non è valido, come è stato mostrato dalla matematica moderna, quindi l'intera dimostrazione viene invalidata, come ha fatto notare David Hilbert. Questo criterio costituisce l'assioma III.6 degli assiomi di Hilbert. Esso non può essere generalizzato nella forma *due triangoli sono congruenti se hanno un angolo, uno dei lati ad esso adiacenti e il lato ad esso opposto ordinatamente congruenti*, come si fa nel *secondo criterio*. Viene chiamato anche *Criterio LAL* (Lato-Angolo-Lato)

I criteri di congruenza

II criterio di congruenza

« *Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli a esso adiacenti rispettivamente congruenti* »

Se si ammette valido il quinto postulato di Euclide, si può dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale ad un angolo piatto; per questo motivo, se si conoscono due angoli di un triangolo è sempre possibile determinarne il terzo, e quindi il criterio è generalizzabile in: *Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti*.
Il secondo criterio (nella sua formulazione originale) è però dimostrabile senza far uso del quinto postulato di Euclide. Per questo i libri di testo sono soliti riportare entrambe le formulazioni, e spesso la seconda (quella che fa uso del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo) viene detta *secondo criterio generalizzato*.
Viene chiamato anche *Criterio ALA* (Angolo-Lato-Angolo).

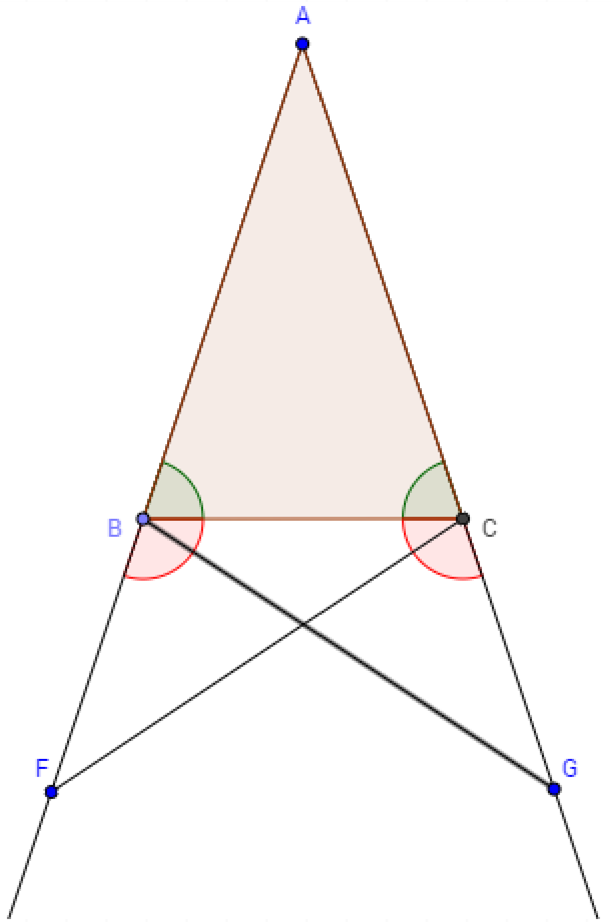
I criteri di congruenza

« *Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti* »

In *Elementi I, 8* Euclide dà una dimostrazione di questo teorema utilizzando il movimento rigido.
Come avviene per la proposizione I, 4 (primo criterio di congruenza), la dimostrazione euclidea non è valida, ma la matematica moderna si avvale di un'altra dimostrazione per la quale questo criterio non va considerato postulato.
Viene chiamato anche *Criterio LLL* (Lato-Lato-Lato).

Il pons asinorum

Proposizione I.5 (teorema del pons asinorum)
Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro



Sia *ABC* un triangolo isoscele che ha il lato *AB* uguale al lato *AC* (Def.1-20), e si prolunghi avanti in linea retta con *AB* e *AC* le rette *BD* e *CE* (Post.2): dico che l'angolo *ABC*è uguale all'angolo *ACB*, l'angolo *CBA* è uguale all'angolo *BCE*.

Si prenda un punto arbitrario F su BD e si sottragga dalla maggiore AE una retta AG uguale alla minore AF (Prop.1-3), e si congiungano le rette FC e GB (Post.1).

Dimostrazione:

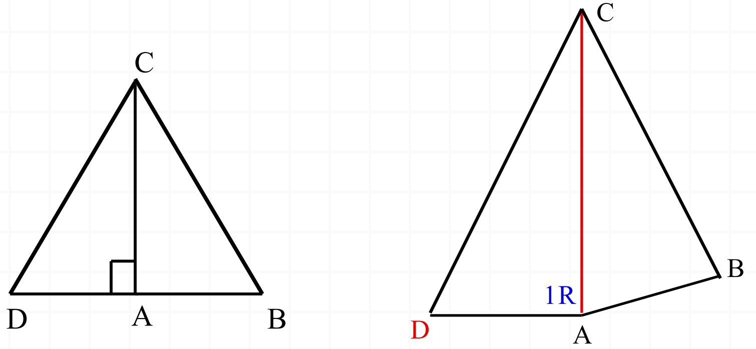
Poiché AF è uguale a AG, e AB è uguale a AC, i due lati FA e AC sono quindi uguali rispettivamente ai due lati GA e AB, e comprendono l'angolo FAG in comune. La base FC è quindi uguale alla base GB, il triangolo AFC è uguale al triangolo AGB, e i restanti angoli sono uguali rispettivamente ai restanti angoli, cioè quelli opposti ai lati uguali, cioè, l'angolo ACF è uguale all'angolo ABG, e l'angolo AFC è uguale all'angolo AGB (Prop.1-4).

E poiché AF totale è uguale a AG totale, e in questi AB è uguale a AC, il restante BF è quindi uguale al restante CG (NC3). Ma FC è stato dimostrato uguale a GB, i due lati BF e FC sono quindi uguali rispettivamente ai due lati CG e GB, e l'angolo BFC è uguale all'angolo CGB, mentre la BC è in comune tra loro. Il triangolo BFC è quindi uguale al triangolo CGB, e i restanti angoli sono uguali rispettivamente ai restanti angoli, cioè quelli opposti ai lati uguali (Prop.1-4). L'angolo FBC è quindi uguale all'angolo GCB, e l'angolo BCF è uguale all'angolo CBG.

Poiché dunque l'angolo ABG totale è stato dimostrato uguale all'angolo ACF, e in questo l'angolo CBG è uguale all'angolo BCF, il restante angolo ABC è uguale al restante angolo ACB, ed essi sono angoli alla base del triangolo ABC (CN3). Ma l'angolo FBC è stato pure dimostrato uguale all'angolo GCB, e sono angoli sotto la base

Euclide

Teorema I.48: ***Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l'angolo contenuto dai due lati rimanenti è retto***



L’ipotesi è che $BC^2 = AB^2 + AC^2$, e si tratta di dimostrare che l’angolo BAC è retto.

Dal punto A del lato AC si tiri la AD ⊥re ad AC [I.11]. Su AD si prenda il punto D tale che AD = AB [I.3]. Si congiunga D con C. Dal momento che il triangolo ADC è rettangolo, la I.47 dà:

$$AD^2 + AC^2 = DC^2.$$

Poiché AB = AD, dalla ipotesi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ segue:

$$AD^2 + AC^2 = BC^2.$$

Si hanno allora le due relazioni:

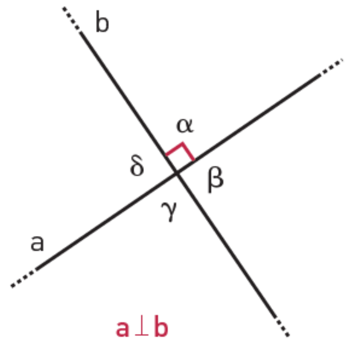
$$AD^2 + AC^2 = BC^2$$
$$AD^2 + AC^2 = DC^2$$

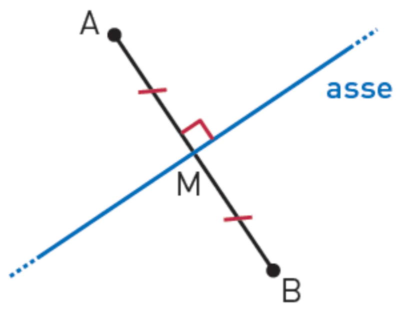
Da esse segue: $BC^2 = DC^2$ e quindi BC = DC.

Ma allora i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio [I.8], per cui l'angolo CAB è congruente all’angolo DAC. Ma l’angolo DAC è retto per costruzione, dunque anche l’angolo CAB è retto.

Rette perpendicolari

Due **rette** incidenti sono **perpendicolari** (o **ortogonali**) se incontrandosi formano quattro angoli retti. Per indicare che le rette *a* e *b* sono perpendicolari, scriviamo $\boldsymbol{a \perp b}$.





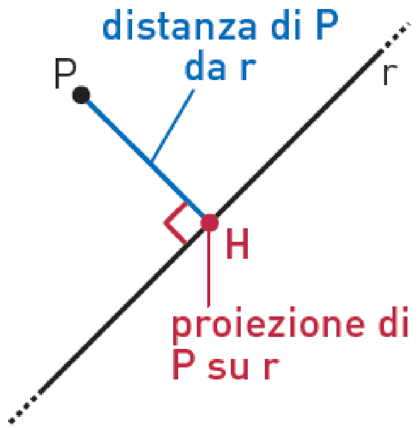
<u>Teorema di esistenza e unicità della perpendicolare</u>

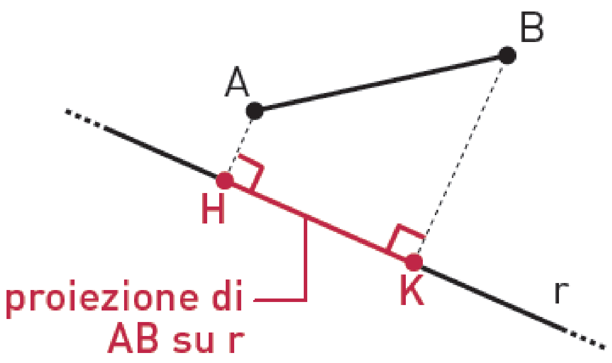
La retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data *esiste* sempre ed è *unica*.

Quindi l'**asse** di un segmento, definito come *la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio*, esiste sempre ed è unico.

Proiezioni ortogonali e distanza

- Dati un punto P e una retta r, il punto di intersezione tra r e la perpendicolare condotta da P a r è detto **proiezione ortogonale** di P su r, o **piede della perpendicolare** o più semplicemente **proiezione**.
- La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento con estremi il punto e la sua proiezione sulla retta.
- La **proiezione ortogonale di un segmento** AB su una retta r è il segmento formato dalle proiezioni ortogonali di tutti i punti di AB su r.



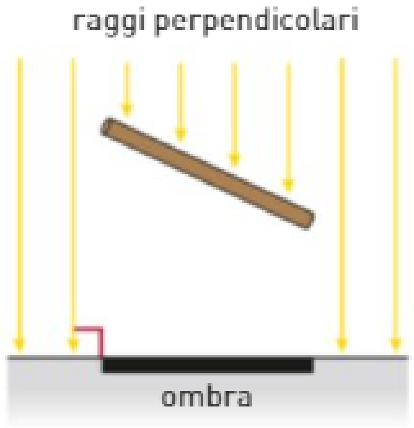


Proiezioni ortogonali e distanza

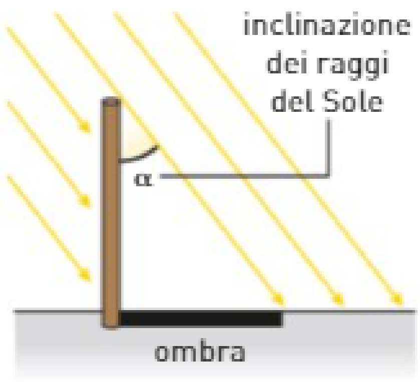
ESEMPIO

► L'ombra è una proiezione ortogonale?

Il giorno del solstizio d'estate, al tropico del Cancro, i raggi del Sole arrivano perpendicolari alla superficie terrestre. In questo caso l'ombra di un bastone è esattamente la sua proiezione ortogonale sul suolo. Quindi non vediamo l'ombra solo se il bastone è perpendicolare al terreno.

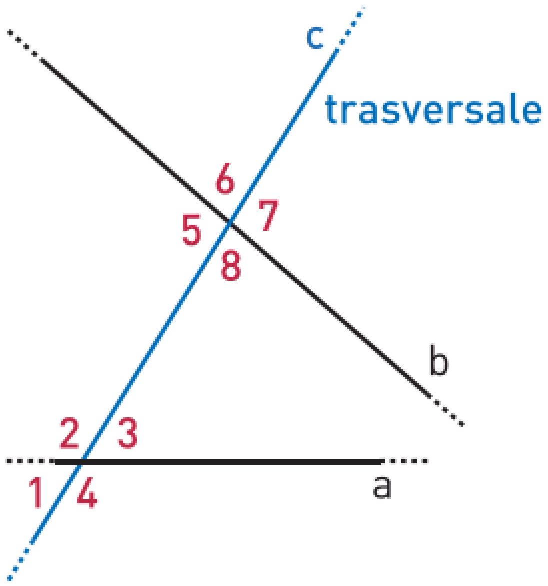


In tutti gli altri luoghi e momenti dell'anno l'ombra è una proiezione del bastone, ma non ortogonale. Per determinare l'inclinazione dei raggi solari è sufficiente posizionare il bastone in modo che sia perpendicolare al suolo e misurare l'angolo al vertice del triangolo rettangolo individuato dal bastone e dalla sua ombra.



Rette tagliate da una trasversale

Se due rette *a* e *b* sono tagliate da una terza retta *c* detta **trasversale**, si formano coppie di angoli alterni, coniugati e corrispondenti.

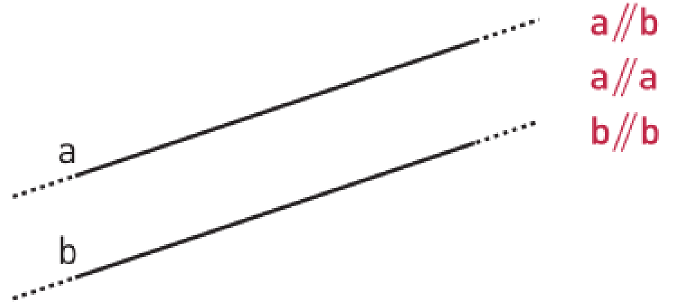


- **alterni**, se sono da parti opposte rispetto a c; 3 e 5 sono alterni interni, 1 e 7 alterni esterni;
- **coniugati**, se sono da una stessa parte rispetto a *c*, entrambi esterni o interni; 2 e 5 sono coniugati interni, 4 e 7 sono coniugati esterni;
- **corrispondenti**, se hanno posizione analoga rispetto ad *a* e *c* e rispetto *a b* e c; 2 e 6 sono corrispondenti.

Rette parallele

DEFINIZIONE

Due **rette** sono **parallele** se non hanno punti in comune oppure se coincidono.
Per indicare che *a* e *b* sono parallele scriviamo ***a // b***.



TEOREMA

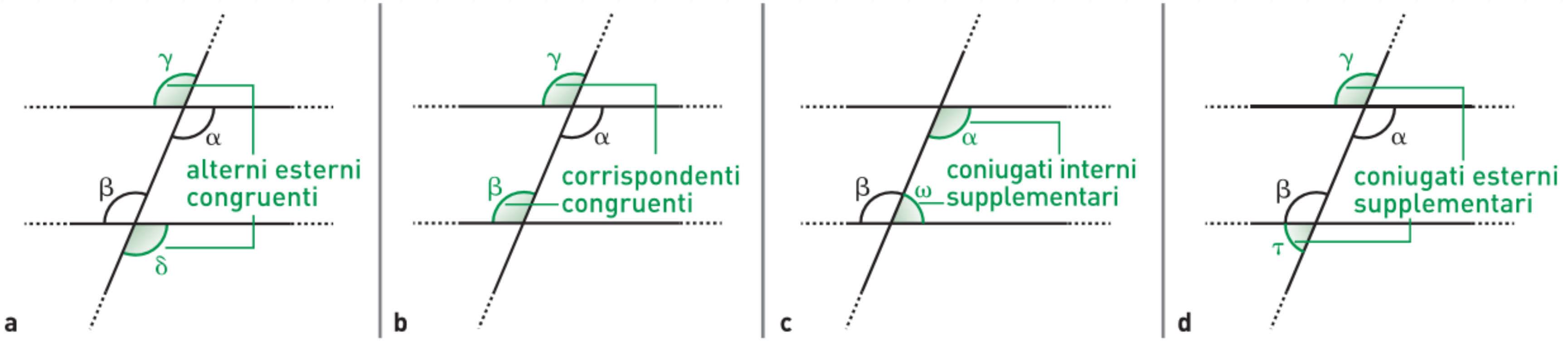
Condizioni sufficienti per il parallelismo

Se due rette distinte tagliate da una trasversale formano

- angoli alterni (interni o esterni) congruenti *oppure*
- angoli corrispondenti congruenti *oppure*
- angoli coniugati (interni o esterni) supplementari,

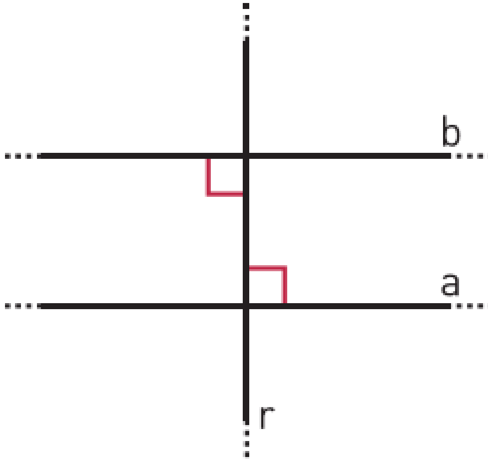
allora le rette sono parallele.

Rette parallele



Dal teorema ricaviamo la seguente proprietà: **se due rette *a* e *b* sono perpendicolari a una stessa retta *r*, allora sono tra loro parallele.**

Infatti, se *a* e *b* sono perpendicolari a *r*, formano con *r* quattro angoli retti ciascuna, quindi formano una coppia di angoli alterni interni congruenti e allora sono parallele per il criterio di parallelismo.



Rette parallele

Teorema di esistenza della parallela

Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, *esiste* sempre una retta passante per P e parallela a r.

Postulato di unicità della parallela (quinto postulato di Euclide)

Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, è unica la retta passante per P e parallela a r.

Condizioni necessarie per il parallelismo

Se due rette sono parallele, allora tagliate da una trasversale formano:

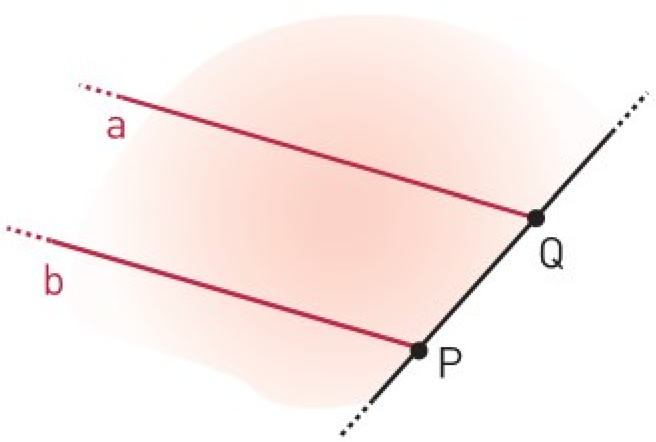
- angoli alterni congruenti *e*
- angoli corrispondenti congruenti *e*
- angoli coniugati supplementari.

Semirette concordi e discordi

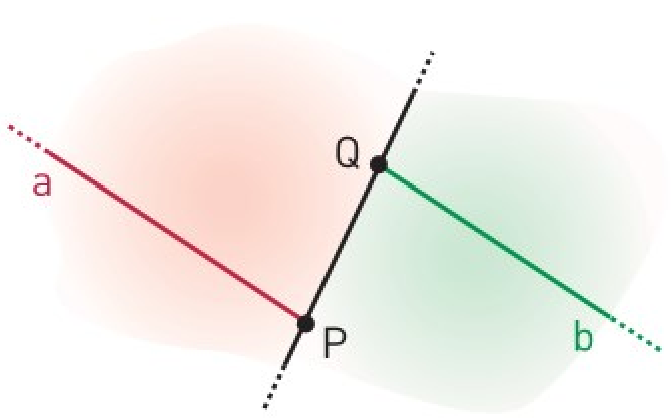
Date due semirette parallele di origini *P* e *Q*, consideriamo i semipiani formati dalla retta *PQ*. Le **semirette** sono:

- **concordi** se appartengono a uno stesso semipiano;
- **discordi** se appartengono a semipiani diversi.

a e b semirette concordi



a e b semirette discordi

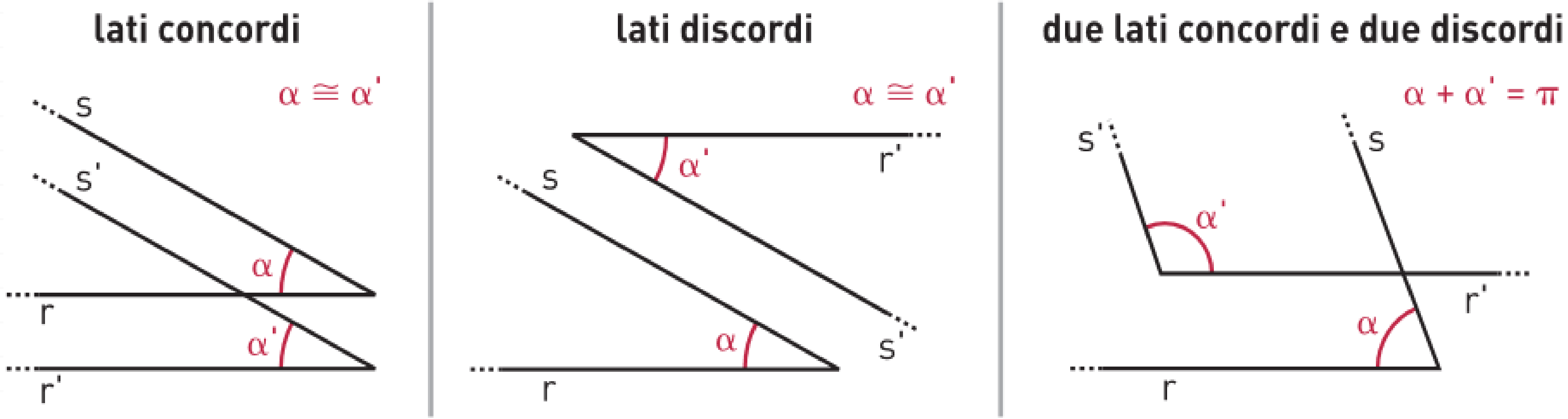


Angoli con lati paralleli

Teorema degli angoli con lati paralleli

Due angoli con i *lati paralleli e concordi* oppure *paralleli e discordi* sono congruenti.

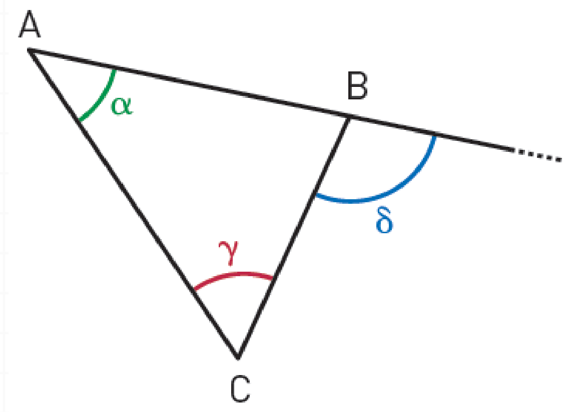
Due angoli con i *lati paralleli due concordi e due discordi* sono supplementari.



Proprietà degli angoli di un poligono

<u>Teorema dell'angolo esterno di un triangolo</u>

In un triangolo, ogni angolo esterno è congruente alla *somma degli angoli interni non adiacenti*.



Ipotesi: δ angolo esterno, α e γ angoli interni non adiacenti a δ.

Tesi: $\delta \cong \alpha + \gamma$

<u>Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo</u>

In un triangolo, la somma degli angoli interni è congruente a *un angolo piatto*.

Proprietà degli angoli di un poligono

Secondo criterio di congruenza (forma generale)

Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli *ordinatamente* congruenti.

Teorema della somma degli angoli interni di un poligono

La somma degli angoli interni α, β, γ… di un poligono convesso che ha n lati è $n - 2$ *angoli piatti*.

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots \cong (n - 2)\, \pi$$

Teorema della somma degli angoli esterni di un poligono

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è congruente a due angoli piatti.

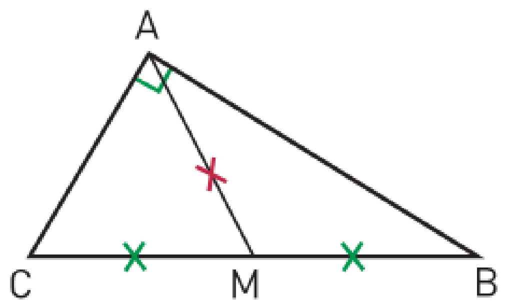
Mediana relativa all’ipotenusa

Usando i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, si può dimostrare il teorema seguente.

TEOREMA

Mediana relativa all’ipotenusa

In un triangolo rettangolo la *mediana* relativa all’ipotenusa è congruente a *metà ipotenusa*.



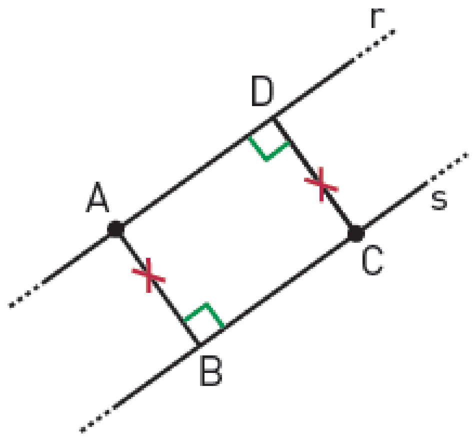
Ipotesi: ABC triangolo rettangolo con A angolo retto; $CM \cong MB$.

Tesi: $AM \cong \frac{1}{2} CB$.

Distanza tra due rette parallele

<u>**Teorema delle rette parallele e distanza di punti da rette**</u>

Se due rette *r* e *s* sono parallele, la distanza di un punto di *r* da *s* e la distanza di un punto di *s* da *r* sono congruenti.



Ipotesi: $r \parallel s$;
AB distanza di A da s;
CD distanza di C da r.

Tesi: $AB \cong CD$

La **distanza tra due rette parallele** è la distanza di un qualsiasi punto di una delle rette dall’altra.

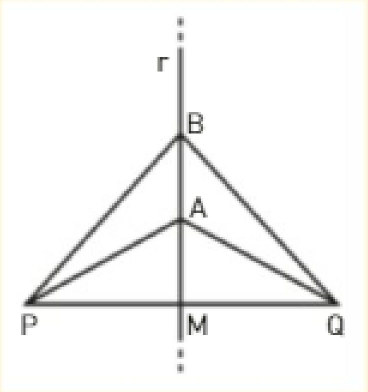
Dimostrare con le rette perpendicolari

I FONDAMENTALI

Dimostrare con le rette perpendicolari

PROVA TU fai un esercizio simile interattivo

Sull'asse del segmento PQ, dalla stessa parte rispetto a PQ, consideriamo i punti A e B. Dimostriamo che $PAB \cong BAQ$.



1 Scriviamo ipotesi e tesi e disegniamo la figura.

Ipotesi: r asse di PQ;
M intersezione di r e PQ.

Tesi: $PAB \cong BAQ$.

2 Dimostriamo che i triangoli APM e AMQ sono congruenti.

- $PM \cong MQ$ perché r è l'asse di PQ, quindi lo incontra nel punto medio M;
- $P\widehat{M}A \cong A\widehat{M}Q$ perché angoli retti formati dall'asse r e PQ;
- AM in comune.

Sapere che una retta r è **asse** di un segmento PQ fornisce due ipotesi:
1. r è perpendicolare a PQ;
2. r passa per il punto medio di PQ.

Dunque i triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza. In particolare $PA \cong AQ$.
In modo analogo dimostriamo che i triangoli BPM e BMQ sono congruenti. In particolare $PB \cong BQ$.

3 Dimostriamo la tesi.

I triangoli PAB e BAQ hanno:

- $PA \cong AQ$ per la dimostrazione precedente;
- $PB \cong BQ$ per la dimostrazione precedente;
- AB in comune.

Dunque sono congruenti per il terzo criterio di congruenza.

Dimostrare con le rette perpendicolari

9 Dimostra che, se in un triangolo la bisettrice di un angolo interno è perpendicolare al lato opposto, allora il triangolo è isoscele.

10 VERIFICA CON GEOGEBRA Disegna un angolo $A\widehat{O}B$ e la sua bisettrice t. Da un punto P appartenente a t, conduci una retta a essa perpendicolare, che incontra i lati dell'angolo nei punti C e D. Verifica con GeoGebra che P è il punto medio di CD e poi dimostralo.

11 Considera l'angolo $P\widehat{O}Q$, con $PO \cong OQ$.

a. Dimostra che la bisettrice s di $P\widehat{O}Q$ è asse di PQ.

b. Preso R su s tale che $OQ \cong QR$, dimostra che il quadrilatero $OPRQ$ ha tutti i lati congruenti.

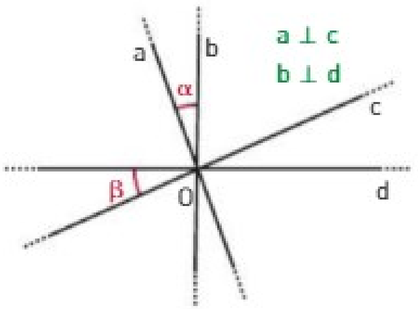
12 In un quadrilatero convesso $ABCD$ dimostra che se $BA \cong BC$ e $DC \cong DA$, allora DB è asse della diagonale AC.

13 Sui lati a e b di un angolo di vertice O considera rispettivamente un punto A e un punto B. Traccia gli assi dei segmenti OA e OB che si incontrano nel punto P. Dimostra che $AP \cong BP$.

14 Dimostra che, se il quadrilatero convesso $ABCD$ è tale che il vertice A coincide con il punto di intersezione degli assi dei lati BC e CD, allora $A\widehat{B}D \cong A\widehat{D}B$.

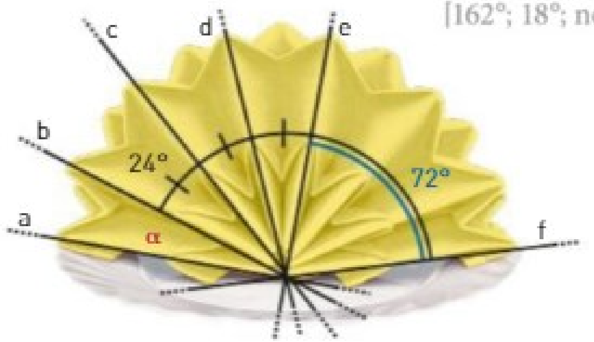
OCCHIO AI DATI L'ipotesi che il quadrilatero sia convesso è necessaria? Motiva la risposta.

19 Utilizzando le informazioni in figura, dimostra che $\alpha \cong \beta$ e che le loro bisettrici sono perpendicolari.



20 INTORNO A NOI Utilizzando le informazioni in figura e sapendo che $a \perp e$, trova l'ampiezza dell'angolo di apertura del tovagliolo e l'ampiezza α di $\widehat{ab}$. Stabilisci inoltre se $d \perp f$.

[162°; 18°; no]



Dimostrare con le rette perpendicolari

27 Da parti opposte rispetto al segmento PQ, traccia $AP \cong QB$, in modo che $A\widehat{P}Q \cong P\widehat{Q}B$. Dimostra che $AP \parallel QB$ e $AQ \parallel PB$.

28 Dato un segmento AB, traccia l'asse del segmento e due semirette di origine A che formano con AB angoli congruenti. Detti C e D i punti di intersezione delle semirette con l'asse, dimostra che CB è parallela ad AD.

29 Disegna un segmento ST e le perpendicolari al segmento, s e t, che passano rispettivamente per S e per T. Da parti opposte rispetto a ST, considera P su s e Q su t, in modo che $PS \cong QT$. Dimostra che $SQ \parallel PT$.

30 Nel triangolo ABC, isoscele sulla base AB, traccia le bisettrici AE e BD degli angoli alla base e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che il triangolo DEP è isoscele e che $DE \parallel AB$.

31 VERIFICA CON GEOGEBRA Sulla bisettrice dell'angolo $X\widehat{O}Y$ considera un punto A e su OY un punto B tale che $OB \cong BA$.

Dimostrare con le rette perpendicolari

40 Da un punto D del lato AC del triangolo ABC traccia le parallele ai lati CB e AB che li intersecano rispettivamente nei punti E e F. Dimostra che $D\widehat{E}B \cong D\widehat{F}B$.

41 Dai vertici B e C del triangolo ABC traccia le parallele ai lati opposti e indica con P il loro punto di intersezione.

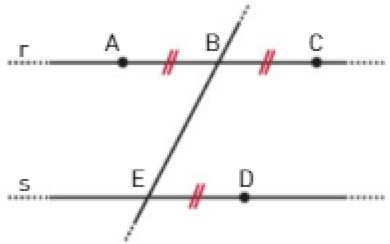
a. Dimostra che $ABC \cong BCP$.

b. Considerati su AC un punto Q e su BP un punto R tali che $QC \cong BR$, dimostra che BQ è parallelo a RC.

42 Le rette r e s della figura sono parallele e inoltre $AB \cong BC \cong ED$. Dimostra che:

a. la retta AE è parallela a BD;

b. la retta CD è parallela a BE.



43 Considera una coppia di angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale. Dimostra che le bisettrici di tali angoli sono parallele.

46 La trasversale t taglia le rette parallele a e b nei punti A e B. Dimostra che il punto medio P di AB è anche il punto medio del segmento che ogni altra trasversale passante per P forma con a e b e che P è equidistante da a e b.

47 Traccia una retta r parallela alla base BC del triangolo isoscele ABC; r interseca i lati obliqui AB e AC rispettivamente nei punti F e G. Dimostra che i triangoli FCB e GBC sono congruenti.

48 Dato il triangolo isoscele ABC di base BC, dimostra che la retta passante per A e parallela a BC è bisettrice dell'angolo esterno di vertice A.

49 Considera un triangolo ABC, e la retta r parallela a BC e passante per A. Su r considera, nel semipiano definito dalla retta AB che contiene il triangolo, il punto D tale che $AD \cong CB$.
Preso un punto T su r, da parte opposta a D rispetto ad A, dimostra che $C\widehat{D}A \cong B\widehat{A}T$.

RISOLVI IN 3 PASSI

1. Osserva che $B\widehat{C}A \cong D\widehat{A}C$. Perché?
2. Dimostra che i triangoli ABC e ADC sono congruenti.
3. Usa il risultato precedente per dimostrare che $DC \parallel AB$ e concludi.

Dimostrare con le rette perpendicolari

104 **COMPLETA** sapendo che α e β sono gli angoli alla base di un triangolo isoscele, γ è l'angolo al vertice e δ è l'angolo esterno a β.

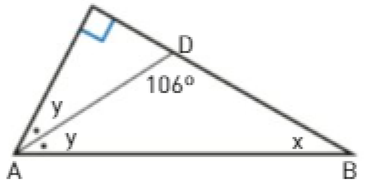
a. $\alpha \cong$ β

b. $\alpha + \gamma \cong$ δ

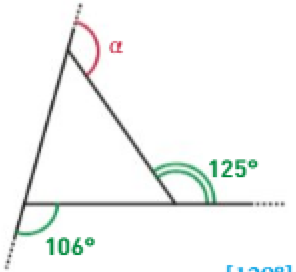
c. $\alpha + \beta + \gamma =$ $180°$

d. $\delta + \alpha =$ $180°$

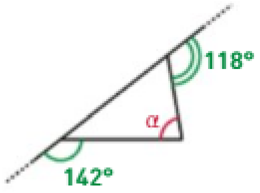
105 Trova x e y in figura. [$x = 58°$; $y = 16°$]



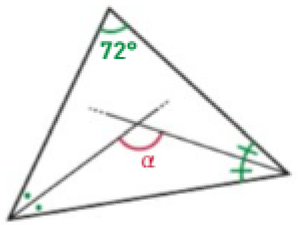
106 Nelle seguenti figure trova l'ampiezza di α.



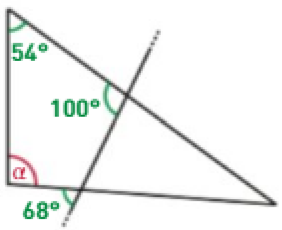
a [129°]



b [80°]



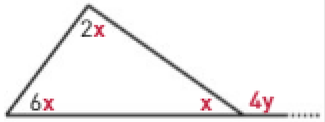
c [126°]



d [94°]

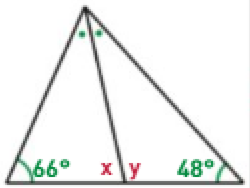
107 Nelle seguenti figure determina x e y.

[$x = 20°$; $y = 40°$]



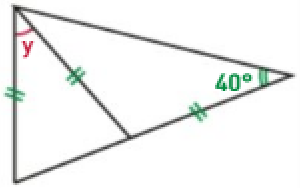
a

[$x = 81°$; $y = 99°$]



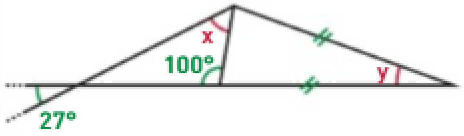
b

[$y = 20°$]



c

[$x = 53°$; $y = 20°$]



d

Dimostrare con le rette perpendicolari

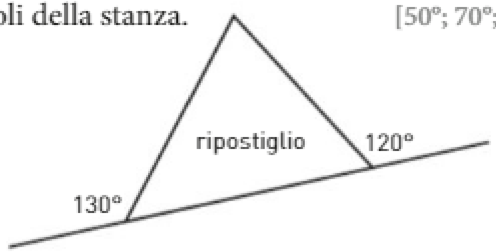
116 Nel triangolo isoscele ABC di base AB, l'angolo di vertice C è congruente alla metà di ciascuno degli angoli alla base. Se AD è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$, determina le misure degli angoli dei triangoli ACD e ABD.

UN PASSO IN PIÙ Dimostra che $AB \cong AD \cong CD$.
[36°; 108°; 72°]

117 Considera il triangolo rettangolo ABC. Fissa un punto P sull'ipotenusa AB, un punto Q sul cateto BC e un punto R sul cateto AC in modo che i triangoli PAR e PBQ siano isosceli di basi PR e PQ. Calcola l'ampiezza dell'angolo $R\widehat{P}Q$. [45°]

118 Nel triangolo ABC, $\widehat{C}$ è la metà di $\widehat{B}$. Prolunga il lato BC, dalla parte di C, di un segmento $CP \cong AC$. Esprimi in funzione di $\widehat{C}$ le ampiezze degli angoli dei triangoli ABC e CAP. Calcola l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}P$ se $\widehat{C} = 40°$. [80°]

110 **INTORNO A NOI** In figura è rappresentata la vista in pianta di un ripostiglio. Calcola tutti gli angoli della stanza. [50°; 70°; 60°]



111 Determina la misura degli angoli interni dei triangoli ABC e CDE in modo che siano verificate le ipotesi della figura.
[60°; 80°; 40°; 40°; 50°; 90°]