LA MATEMATICA GRECA

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Corso di laurea in *Scienze della Formazione Primaria*
Corso di *Elementi di Geometria*

La scuola Pitagorica

E' indegno del nome di uomo chi ignora
il fatto che la diagonale di un quadrato
è incommensurabile con il suo lato.
Platone (429-347 a.C.)

Il primo organico tentativo di dare una fondazione alla matematica (ed all’intera conoscenza scientifica) fu probabilmente quello della scuola pitagorica il cui assunto di partenza era che:
alla base di tutto è il numero intero.
La scuola pitagorica era una setta mistico-religiosa che si sviluppò in Grecia e in Italia (Crotone) tra il 570 ed il 500 a.C. attorno ad un mitico personaggio chiamato Pitagora. Le idee di tale scuola sono di fondamentale importanza per la storia della cultura occidentale perché da esse inizierà quel processo che trasformerà la scienza pre-ellenica, che consisteva in una disarticolata raccolta di risultati dettati dall'esperienza, in una scienza razionale.

La scuola Pitagorica

Dei pitagorici parla Aristotele al modo seguente, dove si deve tenere conto che allora per "numero" si intendeva "numero intero positivo"

Tra i primi filosofi, ..., furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per i primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri... Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero (Aristotele, Metafisica).

"Nessuna menzogna accolgono in sé la natura del numero e l'armonia: non è cosa loro la menzogna. La menzogna e l'invidia partecipano della natura dell'illimitato, dell'inintelligibile e dell'irrazionale. Nel numero non penetra menzogna, perché la menzogna è avversa e nemica della natura, così come la verità è connaturata e propria alla specie dei numeri . . . "
"… Nulla sarebbe comprensibile, né le cose in sé né le loro relazioni, se non ci fossero il numero e la sua sostanza."
"Tutte le cose che si conoscono hanno numero: senza il numero non sarebbe possibile pensare né conoscere alcunché." (Filolao)

La scuola Pitagorica

La scoperta di una scala armonica che viene detta, appunto, scala pitagorica.

Il convincimento circa la struttura granulare e discreta delle figure geometriche e, più in generale, del mondo fisico

Con Pitagora ha inizio un processo di idealizzazione e razionalizzazione di tutte le forme di conoscenza che dominerà perfino la nostra cultura religiosa

La scala Pitagorica

Consideriamo delle corde tese di varia lunghezza ed esaminiamo i suoni che vengono emessi pizzicandone due contemporaneamente. Ci si accorge che a volte si hanno effetti gradevoli ed a volte sgradevoli. E' possibile studiare quale
sia il rapporto tra le lunghezze delle due corde ed il fenomeno della "gradevolezza" o, per essere più specifici, della "consonanza".

Ora la prima scoperta che viene da fare è che se una corda è il doppio dell'altra si ha una fortissima consonanza. In questo caso noi diciamo che i due suoni differiscono per una ottava.

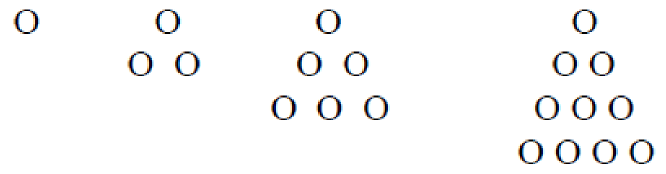
Se indichiamo con A la lunghezza della prima corda e con B quella della seconda allora $B = (1/2)A$ o, se si vuole, $A : B = 2 : 1$

Un altro suono gradevole si ottiene facendo vibrare, insieme ad A una corda la cui lunghezza C sia i due terzi di A cioè
$C = (2/3)A$.
Ne segue che $A : C = 3 : 2$

Infine ci si accorge che un suono gradevole si ottiene dai suoni prodotti dalle corde C e B che risultano essere nel rapporto $C{:}B = 4{:}3$. Abbiamo quindi che le tre consonanze principali, (che prendono il nome di ottava quinta e quarta), corrispondono ai rapporti 2:1; 3:2 e 4:3.

" Tutte le cose che si conoscono hanno un numero"

La geometria non si considerava distinta dall'aritmetica e, in un certo senso, l'aritmetica assumeva una forma geometrica. Dei numeri infatti si dava una rappresentazione geometrica o, se si vuole, fisica, tramite una opportuna configurazione di punti-sassolino



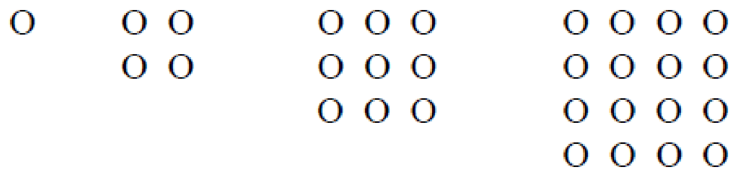
Ogni triangolo si ottiene dal precedente aggiungendo un fila di sassolini. Pertanto se $t(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo triangolo abbiamo che la funzione t è definibile tramite le equazioni

$$t(1) = 1 : t(n) = t(n-1) + n.$$

Ne segue che sono triangolari tutti i numeri della serie $1, 3, 6, 10, \dots$ di termine generale n, cioè tutti i numeri del tipo $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

" Tutte le cose che si conoscono hanno un numero"

Si chiamavano invece quadrati i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in quadrato



Ogni quadrato si ottiene dal precedente aggiungendo due lati (con un sassolino in comune). Ne segue che, se $q(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo quadrato, la funzione q si definisce tramite le equazioni

$$q(1) = 1 : q(n) = q(n-1) + 2n - 1.$$

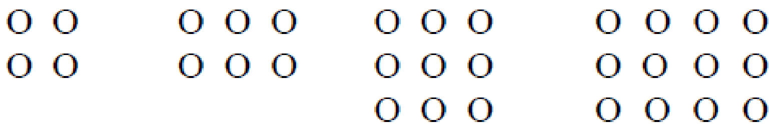
Pertanto i quadrati perfetti si ottengono come elementi della serie

$$1, 1+3, 1+3+5, \dots, 1+3+\dots+2n-1,$$

cioè la serie di termine generale $2n-1$.

" Tutte le cose che si conoscono hanno un numero"

Si chiamavano rettangolari i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in un rettangolo (che non si riduca ad una striscia di sassolini)



I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Ogni figura geometrica può essere misurata da un numero naturale. Infatti basta contare il numero dei sassolini-punto che ne fanno parte.
Purtroppo vedremo che questo non è sempre possibile. Per prima cosa vediamo che cosa significa misurare un segmento.

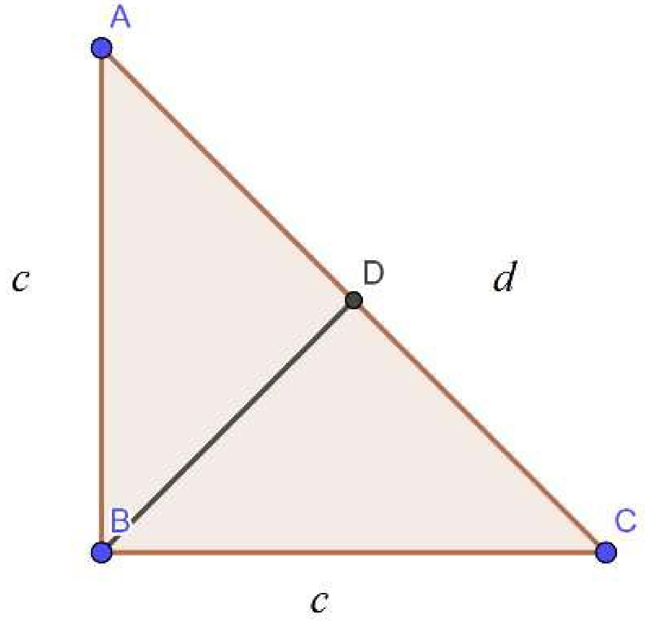
In altre parole, dovendo misurare un segmento a e l'unità di misura è un segmento u, allora dico che la misura di a è n se "riportando" n volte u lungo il segmento a riesco a raggiungere esattamente la fine del segmento a.

Definizione 2.1.
Diciamo che un segmento a è un n-multiplo di un segmento u se a si può dividere in n segmenti congrui a b. Se assumiamo u come segmento unitario, allora diciamo che la misura di a rispetto all'unità di misura u è n.

Definizione 2.2.
Diciamo che i segmenti $a1, \ldots, an$ sono commensurabili se esiste un segmento u tale che ogni ai ha una misura intera rispetto all'unità di misura u.
Altrimenti diciamo che sono incommensurabili.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Teorema 2.3.
Dato un triangolo rettangolo isoscele, qualunque sia l'unita di misura scelta, cateto e diagonale non possono avere entrambi misura intera.



Dim. Fissata un'unità di misura u, supponiamo per assurdo che esistano triangoli rettangoli isosceli con cateto ed ipotenusa di misura intere.
Sia d la lunghezza più piccola tra le lunghezze di tali triangoli ed indichiamo con ABC un triangolo la cui ipotenusa misuri d mentre supponiamo che i suoi cateti misurino c.

Indichiamo con D il punto medio dell'ipotenusa AC. E' evidente che l'area del triangolo ABC è il doppio dell'area del triangolo BDC e quindi $d^2 = 2c^2$ ovvero che d è un numero pari. Poiché BD è uguale a DC, questo comporta che il triangolo BDC ha lati interi. Questo è assurdo in quanto BCD ha una ipotenusa c minore di quella d di ABC.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Lo sapevate? Il quadrato costruito sull'ipotenusa
è il doppio di quello sui cateti . . . ma la qualità è
scadente e dopo un anno lo butti! È così! È capitato
a mia sorella! Fidatevi!
Vulvia (Corrado Guzzanti, Il caso Scrafoglia,2002).

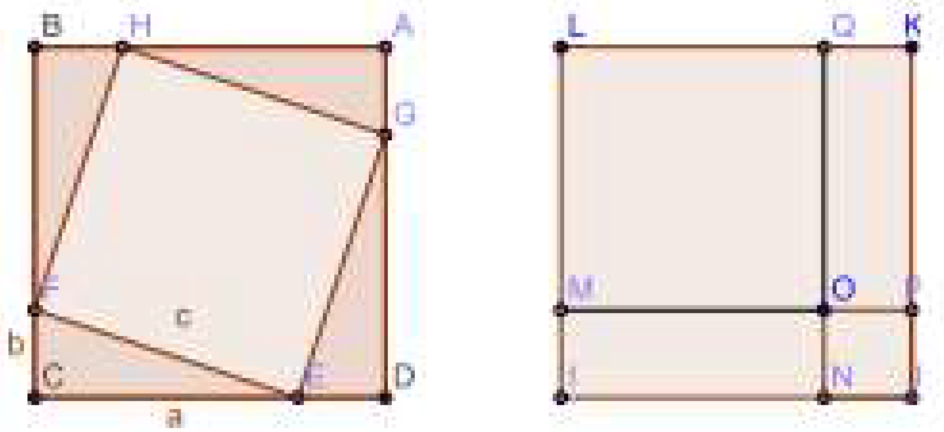
Dimostrazioni di esistenza di figure con lati non commensurabili sono rese più facili se si utilizza il teorema di Pitagora.

Teorema 3.1.
(Teorema di Pitagora) Dato un triangolo rettangolo, se si considera l’unione dei due quadrati costruiti sui cateti otteniamo una figura che ha la stessa estensione del quadrato costruito sull’ipotenusa.

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Dim.4

Indichiamo con T il triangolo rettangolo, supponiamo che i cateti misurino a e b e l'ipotenusa c. Costruiamo un quadrato Q con lati uguali ad a+b.



Detti A, B , C, D i vertici di Q, tracciamo sui lati i quattro punti H, F, E, G in modo che CE = DC = AH = BF = a mentre ED =GA = HB = FC = b. In tale modo si individuano quattro triangoli rettangoli uguali (avendo cateti uguali per costruzione). Inoltre, tali punti individuano un quadrilatero FEGH. Tale quadrilatero ha lati uguali in quanto coincidenti con le ipotenuse dei triangoli. Inoltre gli angoli sono retti. Ad esempio, l'angolo in E è retto in quanto è uguale ad un angolo piatto meno la somma dei due angoli non retti di T. D'altra parte la somma dei due angoli non retti di un triangolo rettangolo è un angolo retto. Pertanto FEGH è un quadrato, precisamente il quadrato costruito sull'ipotenusa..

I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili

Un triangolo che verifica il teorema di Pitagora è necessariamente rettangolo?

Teorema 3.2. (Teorema inverso di Pitagora)
Ogni triangolo i cui lati verificano il teorema di Pitagora è rettangolo.

Dim.
Sia ABC un triangolo tale che $AB^2 = AC^2 + BC^2$ e costruiamo un segmento BC perpendicolare ad AC e di lunghezza uguale a CB. Allora i due triangoli ACB e ACB hanno
il lato AC in comune ed i lati BC e CB uguali per costruzione. Inoltre, essendo ACB rettangolo in C, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + CB^2 = AB^2$.
Pertanto i due triangoli, avendo i tre lati uguali, sono uguali. Da ciò segue che l'angolo ACB è uguale all'angolo retto ACB ed è quindi retto.