



# EUCLIDE (I PARTE)

Prof. Roberto Capone

A.A. 2024/25

Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria

Corso di Elementi di Geometria



# Euclide

*Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico.*

**Albert Einstein, Come io vedo il mondo, 1954, La questione del metodo”, p. 46**

# Euclide



- o Il suo libro più famoso, **Elementi**, è uno dei testi più importanti e influenti della Storia delle Matematiche e ha costituito la base per l'insegnamento della geometria nel mondo occidentale per più di 2000 anni. Gli **Elementi** hanno contribuito fortemente a porre uno standard di rigore e di struttura logica.
- o Poco è noto sulla vita di **Euclide**. Secondo Proclo (410-485 d.C.), l'autore di un prezioso "**Commento sul I° Libro degli Elementi di Euclide**", egli fu uno degli ultimi allievi della scuola platonica e visse (durante il regno di Tolomeo I Sotere, 306-283 a.C.), in Alessandria d'Egitto, sede di una celebre scuola scientifica raccolta attorno alla **Biblioteca**, dove si raggiunse il culmine dello sviluppo teorico greco-ellenistico.
- o Pappo di Alessandria (circa 320 d.C.), l'autore di una poderosa "**Collezione matematica**", afferma che Apollonio di Perga (262-190 a.C.) studiò a lungo in Alessandria sotto gli allievi di **Euclide**. Così tutte le fonti portano a stabilire che **Euclide** fiorì in Alessandria attorno al 300 a.C. e vi stabilì una scuola matematica.

# Euclide

- o Fin dall'antichità, l'opera euclidea ebbe tanto successo da soppiantare tutti gli altri testi di geometria precedenti.
- o I libri (oggi si chiamerebbero capitoli) che formano gli **Elementi**, sono **tredici** e contengono in tutto **467 teoremi**.
- o Alcune edizioni antiche degli **Elementi** contengono anche due libri in più, il **XIV** ed il **XV**, ma è stato appurato che il libro **XIV** si deve ad Ipsicle (circa 150 a.C.), mentre il **XV** fu sostanzialmente composto nel VI secolo d.C.



# Euclide

Può apparire singolare il fatto che proprio Euclide, la cui opera principale, gli *Elementi*, sia stata nella storia, dopo la Bibbia, la più letta, la più diffusa e la più tradotta di tutti i testi antichi, sia invece come persona il più sconosciuto.

Di notizie attendibili su di lui vi è solo un passo di Proclo Diadoco (V sec. D.) da cui apprendiamo che egli dovette vivere ad Alessandria al tempo di Tolomeo I<sup>35</sup>; molti elementi inoltre fanno pensare che dovette essere uno dei primi scienziati chiamati dal re per operare ed insegnare nel Museo.

Lo stesso Proclo prosegue il passo di cui sopra affermando che:  
*“Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli Elementi la costruzione delle figure chiamate platoniche.”*

# Euclide

Secondo Proclo, gli **Elementi** di Euclide sono un testo scolastico che riunisce tutti quei concetti e teoremi che costituiscono il fondamento della matematica greca. È il solo pervenutoci di libri simili (Ippocrate da Chio etc.). L'elenco seguente dà il contenuto dei tredici libri:

Il **Libro I** contiene, le definizioni, i postulati e le nozioni comuni, le proprietà elementari dei triangoli e alcune delle principali costruzioni geometriche: la *bisettrice*, il *punto medio*, la *perpendicolare*, etc.

Il **Libro II** contiene la cosiddetta "**algebra geometrica**", la trattazione cioè di problemi che oggi risolviamo con equazioni di primo e secondo grado.

Il **Libro III** è interamente dedicato al cerchio.

Il **Libro IV** è dedicato ai poligoni regolari iscrivibili e circoscrivibili a un cerchio.

I Libri **V** e **VI** sono rispettivamente dedicati alla teoria delle proporzioni (il V) ed alla similitudine (il VI).

# Euclide

I Libri VII, VIII e IX sono i cosiddetti “**libri aritmetici**”, dedicati alla trattazione delle proprietà dei numeri naturali [**notevole la IX,20 che dimostra l'infinità dei numeri primi**].

Il **Libro X**, il più lungo degli *Elementi* (**115 Proposizioni!**), tratta delle irrazionalità che noi esprimiamo con radicali quadratici (anche sovrapposti). Notevole la **X,1** che afferma l'esistenza di grandezze piccole a piacere.

.  
Il Libro XI è dedicato alla trattazione della geometria solida elementare.

Il Libro XII è dedicato alla misura di superfici e volumi [**metodo di esaustione**].

Il **Libro XIII**, infine, tratta dei poliedri ed è introdotto da sei Proposizioni riguardanti la cosiddetta **sezione aurea** di un segmento.

# Euclide

Libro	Libri precedenti o Proposizioni da cui dipende
<b>I</b>	- ( <b>indipendente</b> )
II	- <b>I</b>
III	- <b>I</b> ; II,5-6
IV	- <b>I</b> ; II,11; III
<b>V</b>	- ( <b>indipendente</b> )
VI	- <b>I</b> ; III,27-31; V
<b>VII</b>	- ( <b>indipendente</b> )
VIII	- V, def.ni; VII
IX	- II,3-4; VII; VIII
<b>X</b>	- <b>I,44 e 47</b> ; II; III,31; V; VI; VII,4, 11 e 26; IX, 1, 24 e 26
XI	- <b>I</b> ; III,31; IV,1; V; VI
XII	- <b>I</b> ; III; IV,6 e 7; V; VI; X,1; XI
XIII	- <b>I</b> ; II,4; III; IV; V; VI; X; XI

È dunque evidente, a parte la complessità del **Libro X**, il più difficile dell'opera, la forte influenza che il **Libro I** esercita su tutta la struttura geometrica degli **Elementi**: da esso dipendono infatti i Libri **II, III, IV, VI, XI, XII, XIII** e **parzialmente il X**.



# Euclide

Il Libro comprende le *definizioni preliminari*, i *postulati*, gli *assiomi* o *nozioni comuni*, e **48 teoremi**.

Le definizioni mirano a descrivere un ente geometrico.

Così, quando Euclide definisce il punto con la celebre definizione: *Punto è ciò che non ha parti*, vuole soltanto descrivere l'ente geometrico *punto*, con una nomenclatura soddisfacente, affinché lo si possa individuare facilmente.

Le definizioni sono in tutto **23**, e l'ultima è quella di rette parallele, sulla quale ritorneremo.

Dopo le definizioni, Euclide elenca **5 postulati** e **5 assiomi** (o nozioni comuni).

# Euclide

## I postulati

$P_1$  Che si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi

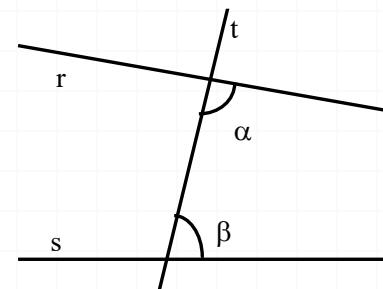
$P_2$  Che si possa prolungare indefinitamente una linea retta

$P_3$  Che si possa descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi

$P_4$  Che tutti gli angoli retti siano uguali



$P_5$  Che se una retta ( $t$ ), intersecando due altre rette ( $r, s$ ), forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti



## Gli assiomi

1. Cose uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro
2. Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, le totalità sono uguali
3. Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali
4. Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;
5. Il tutto è maggiore della parte

# Euclide

## 1. Proposizioni costruttive:

**I,1:** *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.*

**I,2:** *Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.*

**I,3:** *Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

**I,23:** *Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo dato.*

# Euclide

2. *I criteri di uguaglianza (congruenza) dei triangoli (I, 4-8-26) e le proposizioni che servono immediatamente alla loro dimostrazione (I, 7-24-25).*

3. *Le proprietà delle perpendicolari (I, 11-12) e le relazioni fra gli angoli formati da due rette incidenti (I, 13-14-15).*

- **I,15: Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali.**

4. *Le relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo (I, 5-6-16-17-18-19).*

- **I,16-17: In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni e opposti. In ogni triangolo, la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.**

5. *La teoria delle parallele (I,27-28-29-30-31).Dopo la transitività del parallelismo (I,31), si perviene all'importante «teorema dei due retti» (I,32), cui si riattaccano le proprietà elementari dei parallelogrammi (I,33-45), la costruzione del quadrato (I,46), il Th. di Pitagora (I,47) e il suo inverso (I,48)*

# I criteri di congruenza

## I criterio di congruenza

*« Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente congruenti »*

Questo criterio va preso come postulato. Euclide ne dà una dimostrazione, effettuata tramite il trasporto di segmenti e di angoli (I, 4). Questo metodo, tuttavia, non è valido, come è stato mostrato dalla matematica moderna, quindi l'intera dimostrazione viene invalidata, come ha fatto notare David Hilbert. Questo criterio costituisce l'assioma III.6 degli assiomi di Hilbert. Esso non può essere generalizzato nella forma *due triangoli sono congruenti se hanno un angolo, uno dei lati ad esso adiacenti e il lato ad esso opposto ordinatamente congruenti*, come si fa nel secondo criterio. Viene chiamato anche *Criterio LAL* (Lato-Angolo-Lato)

# I criteri di congruenza

## II criterio di congruenza

« *Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli a esso adiacenti rispettivamente congruenti* »

Se si ammette valido il quinto postulato di Euclide, si può dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale ad un angolo piatto; per questo motivo, se si conoscono due angoli di un triangolo è sempre possibile determinarne il terzo, e quindi il criterio è generalizzabile in: *Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti.*

Il secondo criterio (nella sua formulazione originale) è però dimostrabile senza far uso del quinto postulato di Euclide. Per questo i libri di testo sono soliti riportare entrambe le formulazioni, e spesso la seconda (quella che fa uso del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo) viene detta *secondo criterio generalizzato*.

Viene chiamato anche *Criterio ALA* (Angolo-Lato-Angolo).

# I criteri di congruenza

« *Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti* »

In *Elementi I*, 8 Euclide dà una dimostrazione di questo teorema utilizzando il movimento rigido.

Come avviene per la proposizione I, 4 (primo criterio di congruenza), la dimostrazione euclidea non è valida, ma la matematica moderna si avvale di un'altra dimostrazione per la quale questo criterio non va considerato postulato.

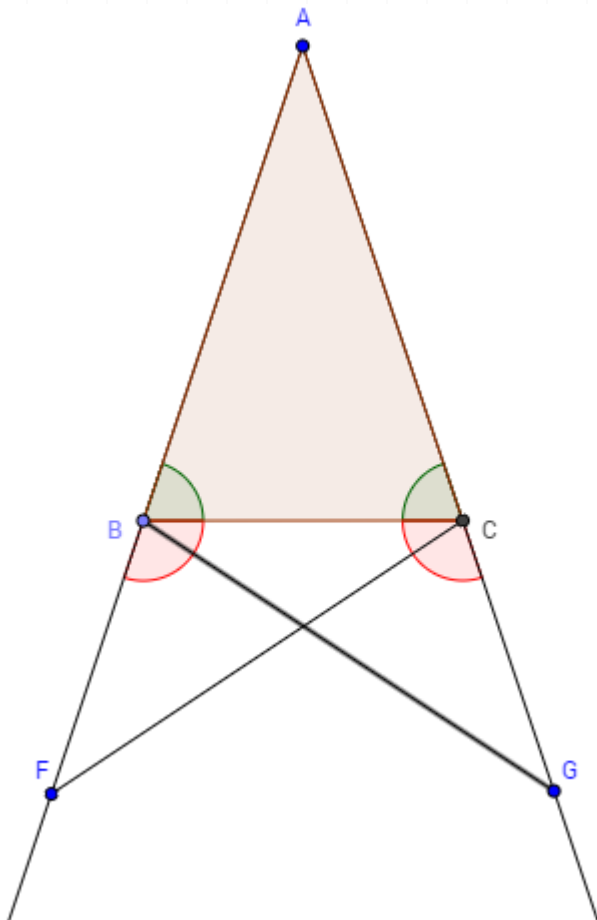
Viene chiamato anche *Criterio LLL* (Lato-Lato-Lato).



# Il pons asinorum

Proposizione I.5 (teorema del pons asinorum)

Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro



Sia  $ABC$  un triangolo isoscele che ha il lato  $AB$  uguale al lato  $AC$  (Def.1-20), e si prolunghi avanti in linea retta con  $AB$  e  $AC$  le rette  $BD$  e  $CE$  (Post.2): dico che l'angolo  $ABC$  è uguale all'angolo  $ACB$ , l'angolo  $CBA$  è uguale all'angolo  $BCE$ .

Si prenda un punto arbitrario  $F$  su  $BD$  e si sottragga dalla maggiore  $AE$  una retta  $AG$  uguale alla minore  $AF$  (Prop.1-3), e si congiungano le rette  $FC$  e  $GB$  (Post.1).

## Dimostrazione:

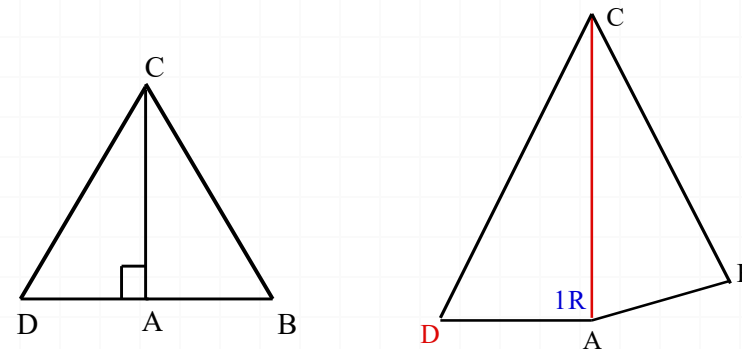
Poiché  $AF$  è uguale a  $AG$ , e  $AB$  è uguale a  $AC$ , i due lati  $FA$  e  $AC$  sono quindi uguali rispettivamente ai due lati  $GA$  e  $AB$ , e comprendono l'angolo  $FAG$  in comune. La base  $FC$  è quindi uguale alla base  $GB$ , il triangolo  $AFC$  è uguale al triangolo  $AGB$ , e i restanti angoli sono uguali rispettivamente ai restanti angoli, cioè quelli opposti ai lati uguali, cioè, l'angolo  $ACF$  è uguale all'angolo  $ABG$ , e l'angolo  $AFC$  è uguale all'angolo  $AGB$  (Prop.1-4).

E poiché  $AF$  totale è uguale a  $AG$  totale, e in questi  $AB$  è uguale a  $AC$ , il restante  $BF$  è quindi uguale al restante  $CG$  (NC3). Ma  $FC$  è stato dimostrato uguale a  $GB$ , i due lati  $BF$  e  $FC$  sono quindi uguali rispettivamente ai due lati  $CG$  e  $GB$ , e l'angolo  $BFC$  è uguale all'angolo  $CGB$ , mentre la  $BC$  è in comune tra loro. Il triangolo  $BFC$  è quindi uguale al triangolo  $CGB$ , e i restanti angoli sono uguali rispettivamente ai restanti angoli, cioè quelli opposti ai lati uguali (Prop.1-4). L'angolo  $FBC$  è quindi uguale all'angolo  $GCB$ , e l'angolo  $BCF$  è uguale all'angolo  $CBG$ .

Poiché dunque l'angolo  $ABG$  totale è stato dimostrato uguale all'angolo  $ACF$ , e in questo l'angolo  $CBG$  è uguale all'angolo  $BCF$ , il restante angolo  $ABC$  è uguale al restante angolo  $ACB$ , ed essi sono angoli alla base del triangolo  $ABC$  (CN3). Ma l'angolo  $FBC$  è stato pure dimostrato uguale all'angolo  $GCB$ , e sono angoli sotto la base

# Euclide

**Teorema I.48:** *Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l'angolo contenuto dai due lati rimanenti è retto*



L'ipotesi è che  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , e si tratta di dimostrare che l'angolo BAC è retto.

Dal punto A del lato AC si tiri la  $AD \perp$ re ad AC [I.11]. Su AD si prenda il punto D tale che  $AD = AB$  [I.3]. Si congiunga D con C. Dal momento che il triangolo ADC è rettangolo, la I.47 dà:

$$AD^2 + AC^2 = DC^2.$$

Poiché  $AB = AD$ , dalla ipotesi  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  segue:

$$AD^2 + AC^2 = BC^2.$$

Si hanno allora le due relazioni:

$$AD^2 + AC^2 = BC^2$$

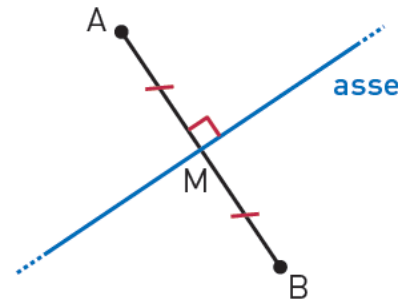
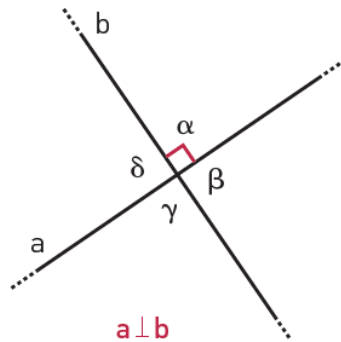
$$AD^2 + AC^2 = DC^2$$

Da esse segue:  $BC^2 = DC^2$  e quindi  $BC = DC$ .

Ma allora i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio [I.8], per cui l'angolo CAB è congruente all'angolo DAC. Ma l'angolo DAC è retto per costruzione, dunque anche l'angolo CAB è retto.

# Rette perpendicolari

Due **rette** incidenti sono **perpendicolari** (o **ortogonali**) se incontrandosi formano quattro angoli retti. Per indicare che le rette  $a$  e  $b$  sono perpendicolari, scriviamo  $a \perp b$ .



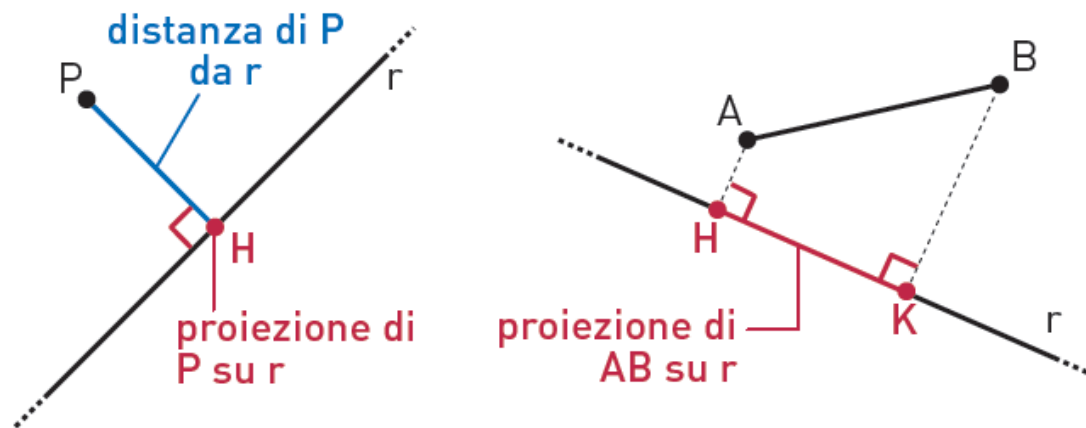
## Teorema di esistenza e unicità della perpendicolare

La retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data *esiste* sempre ed è *unica*.

Quindi l'*asse* di un segmento, definito come *la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio*, esiste sempre ed è unico.

# Proiezioni ortogonali e distanza

- Dati un punto  $P$  e una retta  $r$ , il punto di intersezione tra  $r$  e la perpendicolare condotta da  $P$  a  $r$  è detto **proiezione ortogonale** di  $P$  su  $r$ , o **piede della perpendicolare** o più semplicemente **proiezione**.
- La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento con estremi il punto e la sua proiezione sulla retta.
- La **proiezione ortogonale di un segmento  $AB$**  su una retta  $r$  è il segmento formato dalle proiezioni ortogonali di tutti i punti di  $AB$  su  $r$ .



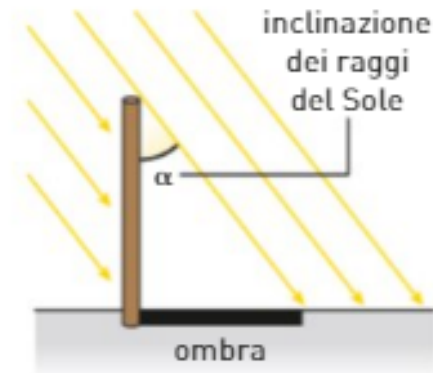
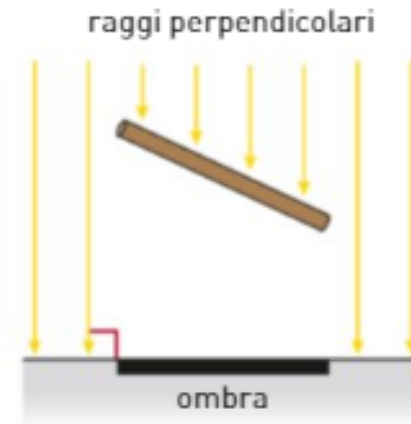
# Proiezioni ortogonali e distanza

## ESEMPIO

► L'ombra è una proiezione ortogonale?

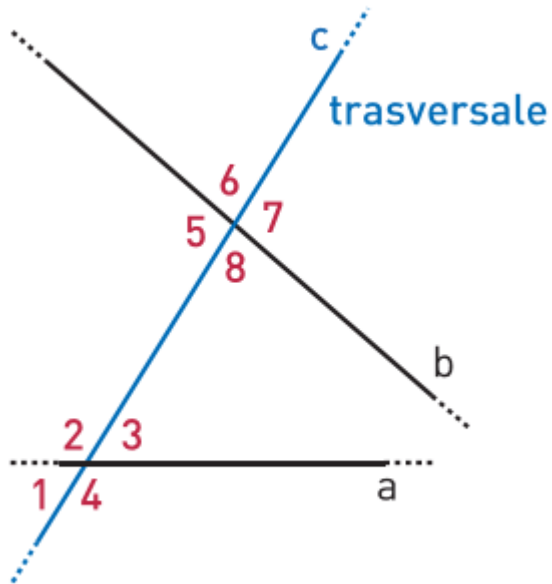
Il giorno del solstizio d'estate, al tropico del Cancro, i raggi del Sole arrivano perpendicolari alla superficie terrestre. In questo caso l'ombra di un bastone è esattamente la sua proiezione ortogonale sul suolo. Quindi non vediamo l'ombra solo se il bastone è perpendicolare al terreno.

In tutti gli altri luoghi e momenti dell'anno l'ombra è una proiezione del bastone, ma non ortogonale. Per determinare l'inclinazione dei raggi solari è sufficiente posizionare il bastone in modo che sia perpendicolare al suolo e misurare l'angolo al vertice del triangolo rettangolo individuato dal bastone e dalla sua ombra.



# Rette tagliate da una trasversale

Se due rette  $a$  e  $b$  sono tagliate da una terza retta  $c$  detta **trasversale**, si formano coppie di angoli alterni, coniugati e corrispondenti.

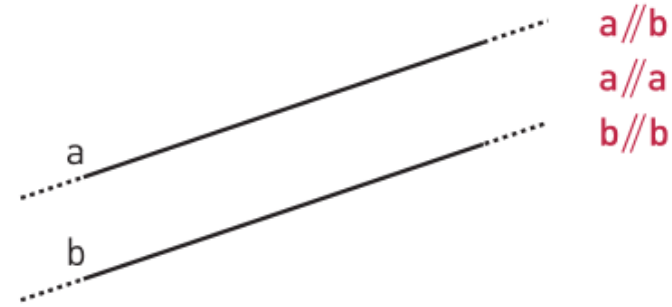


- **alterni**, se sono da parti opposte rispetto a  $c$ ; 3 e 5 sono alterni interni, 1 e 7 alterni esterni;
- **coniugati**, se sono da una stessa parte rispetto a  $c$ , entrambi esterni o interni; 2 e 5 sono coniugati interni, 4 e 7 sono coniugati esterni;
- **corrispondenti**, se hanno posizione analoga rispetto ad  $a$  e  $c$  e rispetto  $a$   $b$  e  $c$ ; 2 e 6 sono corrispondenti.

# Rette parallele

## DEFINIZIONE

Due **rette** sono **parallele** se non hanno punti in comune oppure se coincidono.  
Per indicare che  $a$  e  $b$  sono parallele scriviamo  $a // b$ .



## TEOREMA

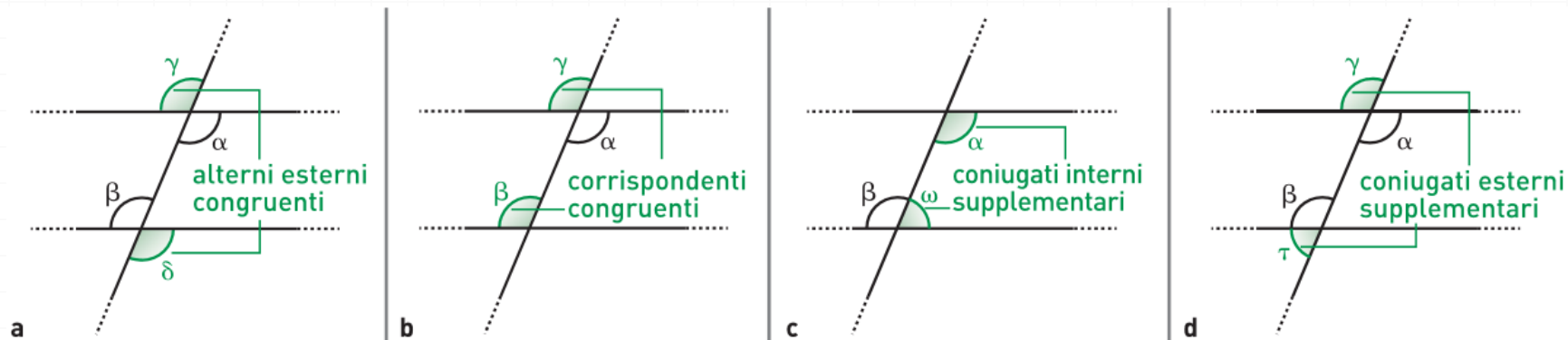
### Condizioni sufficienti per il parallelismo

Se due rette distinte tagliate da una trasversale formano

- angoli alterni (interni o esterni) congruenti *oppure*
  - angoli corrispondenti congruenti *oppure*
  - angoli coniugati (interni o esterni) supplementari,
- allora le rette sono parallele.

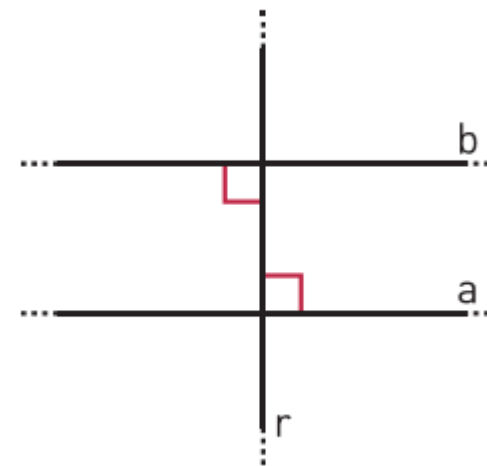


# Rette parallele



Dal teorema ricaviamo la seguente proprietà: **se due rette  $a$  e  $b$  sono perpendicolari a una stessa retta  $r$ , allora sono tra loro parallele.**

Infatti, se  $a$  e  $b$  sono perpendicolari a  $r$ , formano con  $r$  quattro angoli retti ciascuna, quindi formano una coppia di angoli alterni interni congruenti e allora sono parallele per il criterio di parallelismo.



# Rette parallele

## Teorema di esistenza della parallela

Dati una retta  $r$  e un punto  $P$  che non le appartiene, esiste sempre una retta passante per  $P$  e parallela a  $r$ .

## Postulato di unicità della parallela (quinto postulato di Euclide)

Dati una retta  $r$  e un punto  $P$  che non le appartiene, è unica la retta passante per  $P$  e parallela a  $r$ .

## Condizioni necessarie per il parallelismo

*Se due rette sono parallele, allora tagliate da una trasversale formano:*

- angoli alterni congruenti e
- angoli corrispondenti congruenti e
- angoli coniugati supplementari.