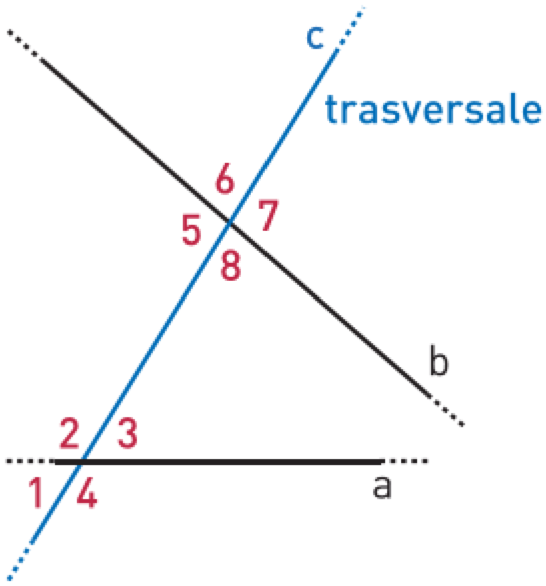
EUCLIDE (II PARTE)

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Corso di laurea in *Scienze della Formazione Primaria*
Corso di *Elementi di Geometria*

Rette tagliate da una trasversale

Se due rette *a* e *b* sono tagliate da una terza retta *c* detta **trasversale**, si formano coppie di angoli alterni, coniugati e corrispondenti.

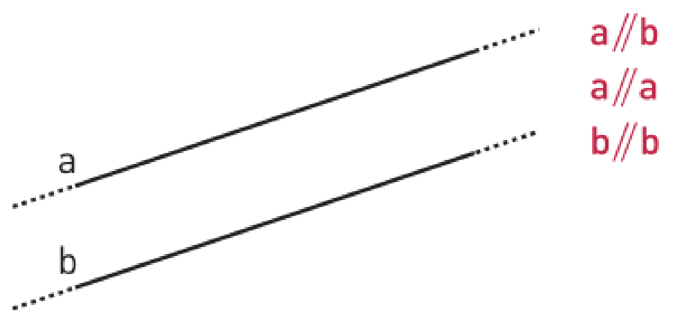


- **alterni**, se sono da parti opposte rispetto a c; 3 e 5 sono alterni interni, 1 e 7 alterni esterni;
- **coniugati**, se sono da una stessa parte rispetto a *c*, entrambi esterni o interni; 2 e 5 sono coniugati interni, 4 e 7 sono coniugati esterni;
- **corrispondenti**, se hanno posizione analoga rispetto ad *a* e *c* e rispetto *a b* e c; 2 e 6 sono corrispondenti.

Rette parallele

DEFINIZIONE

Due **rette** sono **parallele** se non hanno punti in comune oppure se coincidono.
Per indicare che *a* e *b* sono parallele scriviamo ***a* // *b***.



TEOREMA

Condizioni sufficienti per il parallelismo

Se due rette distinte tagliate da una trasversale formano

- angoli alterni (interni o esterni) congruenti *oppure*
- angoli corrispondenti congruenti *oppure*
- angoli coniugati (interni o esterni) supplementari,

allora le rette sono parallele.

Rette parallele

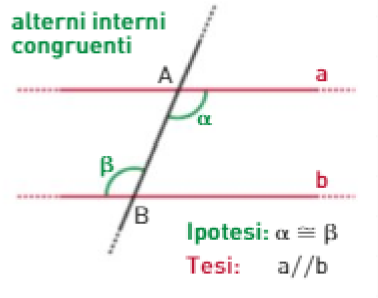
TEOREMA

Condizioni sufficienti per il parallelismo

Se due rette distinte tagliate da una trasversale formano

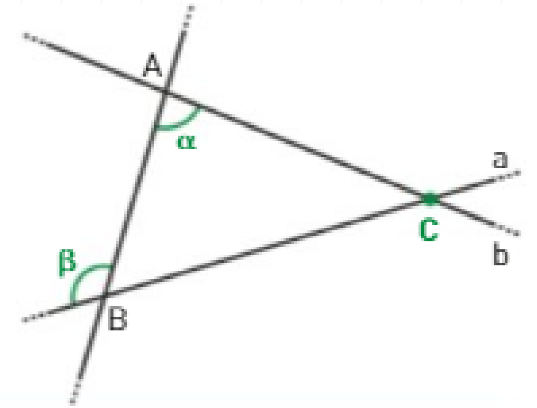
- angoli alterni (interni o esterni) congruenti *oppure*
- angoli corrispondenti congruenti *oppure*
- angoli coniugati (interni o esterni) supplementari,

allora le rette sono parallele.



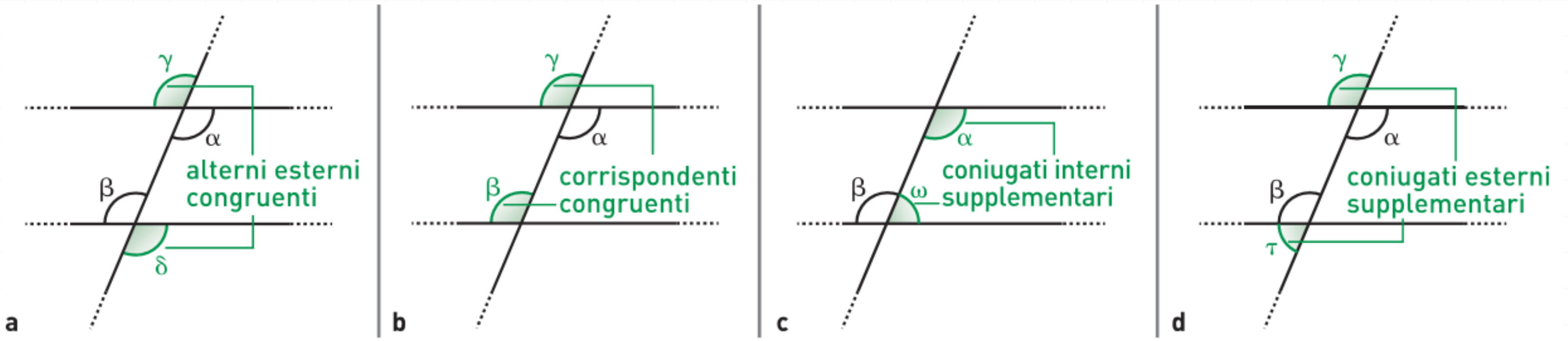
DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il caso in cui siano congruenti due angoli alterni interni: a , b.
Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che a non sia parallela a b (negazione della tesi). Allora a e b si incontrano in un punto C.
Poiché per ipotesi a , b , nel triangolo ABC l’angolo esterno b è congruente all’angolo interno a . Ma ciò contraddice il teorema per cui ogni angolo ester- no di un triangolo è maggiore di ogni angolo interno non adiacente. È dunque assurdo supporre che le rette si incontrino, quindi sono parallele.



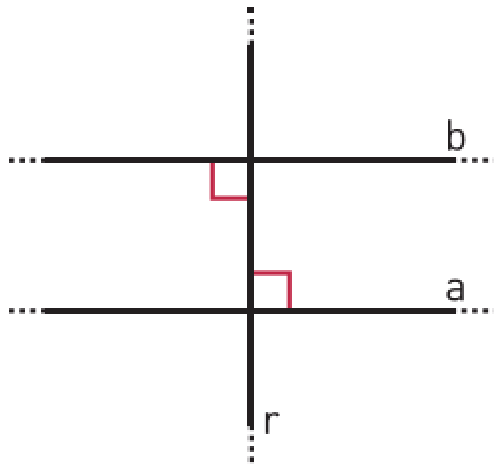
Rette parallele

Per dimostrare gli altri casi è possibile ricondursi a quello degli angoli alterni interni, osservando le seguenti figure, dove abbiamo evidenziato in verde le coppie di angoli congruenti per ipotesi. Nelle a e b si sfruttano coppie di angoli congruenti perché opposti al vertice. Nella figura c, si utilizza la congruenza di due angoli che siano supplementari dello stesso angolo. Nella figura d, si sfruttano sia angoli opposti al vertice, sia angoli supplementari dello stesso angolo.



Rette parallele

Dal teorema ricaviamo la seguente proprietà: **se due rette *a* e *b* sono perpendicolari a una stessa retta *r*, allora sono tra loro parallele.**
Infatti, se *a* e *b* sono perpendicolari a *r*, formano con *r* quattro angoli retti ciascuna, quindi formano una coppia di angoli alterni interni congruenti e allora sono parallele per il criterio di parallelismo.



Infatti, se a e b sono perpendicolari a r, formano con r quattro angoli retti ciascuna, quindi formano una coppia di angoli alterni interni congruenti e allora sono parallele per il criterio di parallelismo.

Rette parallele

Teorema di esistenza della parallela

Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, *esiste* sempre una retta passante per P e parallela a r.

Postulato di unicità della parallela (quinto postulato di Euclide)

Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, è unica la retta passante per P e parallela a r.

Rette parallele

Inverso del criterio di parallelismo

Condizioni necessarie per il parallelismo

Se due rette sono parallele, allora tagliate da una trasversale formano:

- angoli alterni congruenti *e*
- angoli corrispondenti congruenti *e*
- angoli coniugati supplementari.

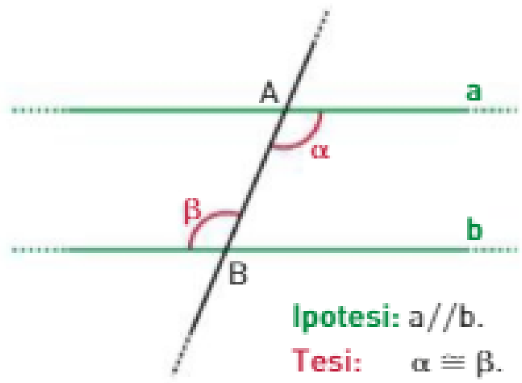
DIMOSTRAZIONE

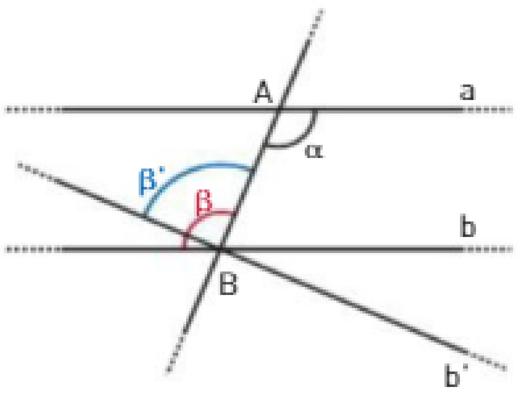
Rette parallele

Inverso del criterio di parallelismo

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che *gli angoli alterni interni sono congruenti.*
Scriviamo ipotesi e tesi come in figura e ragioniamo per assurdo.
Supponiamo che α non sia congruente a β (negazione della tesi). Precisamente, supponiamo $\alpha < \beta$. Per B conduciamo la retta b' tale che $\beta' \cong \alpha$.





Per il criterio di parallelismo b' è parallela ad a, quindi per B passano due parallele ad a. Ciò è assurdo, perché contraddice il postulato delle parallele.
Non è vero che α e β non sono congruenti, quindi $\alpha \cong \beta$.

Rette parallele

Matematica e realtà

ESEMPIO

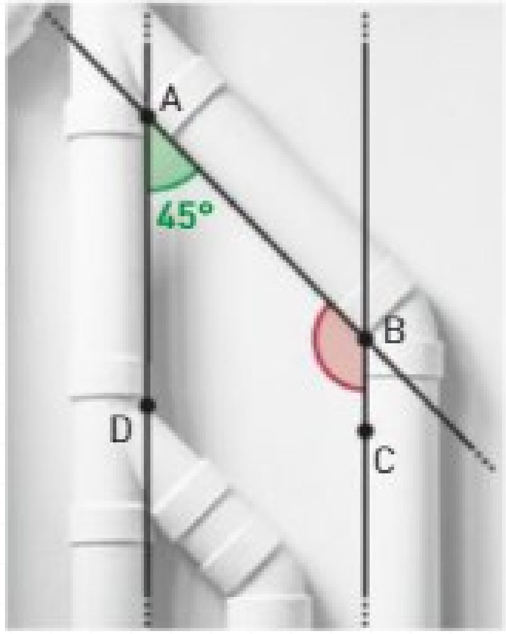
Marta deve sostituire alcuni tubi. Per acquistare i raccordi deve conoscere le misure degli angoli. Sa che l'angolo $B\widehat{A}D$ indicato in figura è di 45°.

► Sapendo che i tubi verticali sono paralleli, qual è l'ampiezza dell'angolo che il raccordo forma in B?

Le rette parallele AD e BC sono tagliate dalla trasversale AB.

Gli angoli $B\widehat{A}D$ e $A\widehat{B}C$ sono coniugati interni, quindi sono supplementari. Perciò:

$$A\widehat{B}C + B\widehat{A}D = 180° \quad \rightarrow \quad A\widehat{B}C = 180° - B\widehat{A}D = 180° - 45° = 135°.$$



Rette parallele

Le geometrie non euclidee

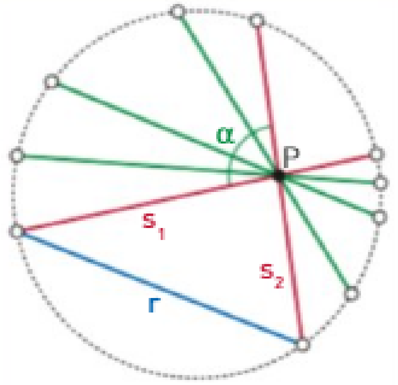
STORIA DELLA MATEMATICA

Il quinto postulato di Euclide è molto meno immediato dei precedenti, al punto che si ipotizzò che si potesse dimostrare. I matematici provarono quindi a negarlo, nella speranza di giungere a conclusioni assurde (dimostrazione per assurdo). Uno dei modi per negare il quinto postulato è affermare che le rette parallele a una retta data e passanti per un punto esterno sono infinite. Questa negazione non portò a un assurdo ma alla nascita di una nuova geometria, diversa da quella euclidea: la geometria iperbolica. Si può negare il quinto postulato anche affermando che non esistono rette parallele a una retta data passanti per un punto esterno. Questa ipotesi portò alla nascita della geometria ellittica.

La **geometria iperbolica** nasce nel XIX secolo e si basa sui primi quattro postulati di Euclide e sul postulato iperbolico, che nega il quinto postulato di Euclide e afferma che, **data una retta *r* e un punto *P* esterno a essa, esistono almeno due rette passanti per *P* e parallele a *r*.**

La figura mostra un modello di geometria iperbolica, il **modello di Klein**, in cui tutti i punti interni a una circonferenza costituiscono il *piano* e ogni segmento con estremi sulla circonferenza, privato degli estremi stessi, rappresenta una *retta*.

Per il punto *P* del piano passano infinite rette che non intersecano *r*, cioè parallele a *r*. Vale dunque il postulato iperbolico e non il quinto postulato di Euclide.



Le rette s_1, s_2 e tutte quelle contenute nell'angolo α non intersecano *r*.

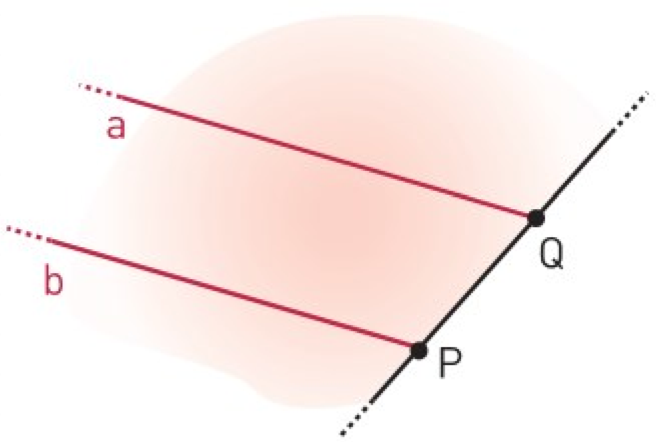
► Cerca nel Web altre informazioni sulla geometria iperbolica e i suoi modelli.

Semirette concordi e discordi

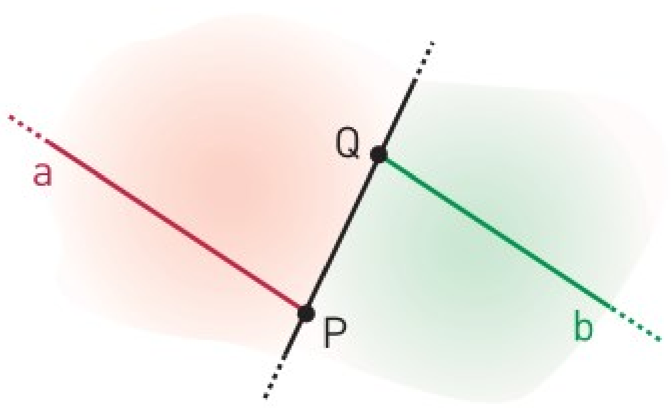
Date due semirette parallele di origini *P* e *Q*, consideriamo i semipiani formati dalla retta *PQ*. Le **semirette** sono:

- **concordi** se appartengono a uno stesso semipiano;
- **discordi** se appartengono a semipiani diversi.

a e b semirette concordi



a e b semirette discordi

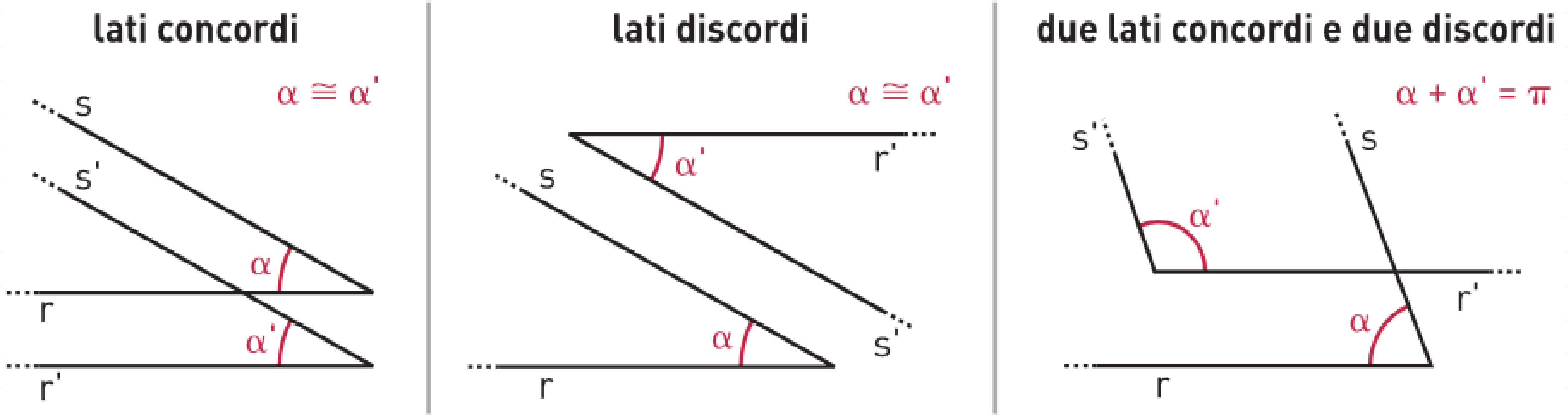


Angoli con lati paralleli

<u>Teorema degli angoli con lati paralleli</u>

Due angoli con i *lati paralleli e concordi* oppure *paralleli e discordi* sono congruenti.

Due angoli con i *lati paralleli due concordi e due discordi* sono supplementari.



Parallelismo e relazione di equivalenza

Nell'insieme delle rette, la relazione di parallelismo gode delle proprietà seguenti.

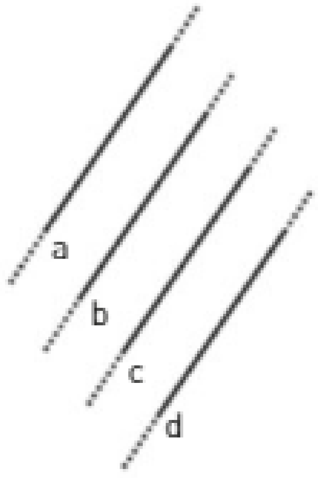
- ***a* // *a*** (proprietà *riflessiva*).
- **Se *a* // *b*, allora *b* // *a*** (proprietà *simmetrica*).
- **Se *a* // *b*, e *b* // *c*, allora *a* // *c*** (proprietà *transitiva*).

Le proprietà riflessiva e simmetrica sono conseguenze dirette della definizione di rette parallele.

La proprietà transitiva si può dimostrare per assurdo.

Infatti, se supponiamo per assurdo che *a* intersechi *c* in un punto *P*, allora *a* e *c* sono due rette distinte passanti per *P* e parallele a *b*. Ciò contraddice il postulato delle parallele.

Poiché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, *la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza*.
Ogni classe di equivalenza è l'insieme di tutte le rette parallele fra loro, chiamato **fascio improprio** di rette. La proprietà caratteristica delle rette del fascio è la **direzione**.

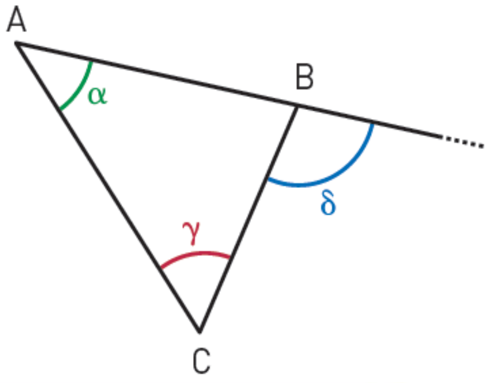


a, *b*, *c* e *d*
hanno la stessa
direzione

Proprietà degli angoli di un poligono

Teorema dell'angolo esterno di un triangolo

In un triangolo, ogni angolo esterno è congruente alla *somma degli angoli interni non adiacenti*.



Ipotesi: δ angolo esterno, α e γ angoli interni non adiacenti a δ.

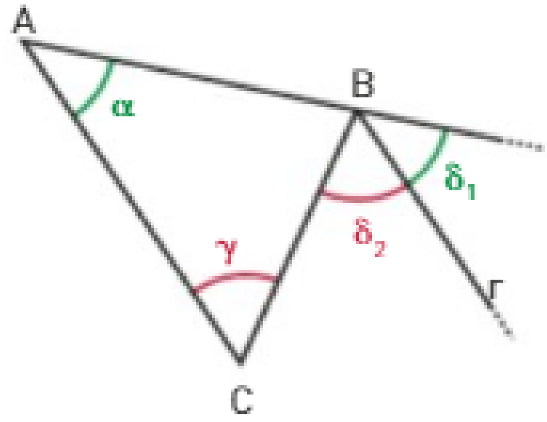
Tesi: $\delta \cong \alpha + \gamma$

DIMOSTRAZIONE

Per B tracciamo la semiretta r parallela ad AC che divide l'angolo δ in due angoli, δ_1 e δ_2.

- $\delta_1 \cong \alpha$ perché angoli corrispondenti delle parallele AC e r tagliate da AB;
- $\delta_2 \cong \gamma$ perché angoli alterni interni delle parallele AC e r tagliate da BC;
- $\delta \cong \delta_1 + \delta_2$, quindi:

$$\delta \cong \alpha + \gamma.$$

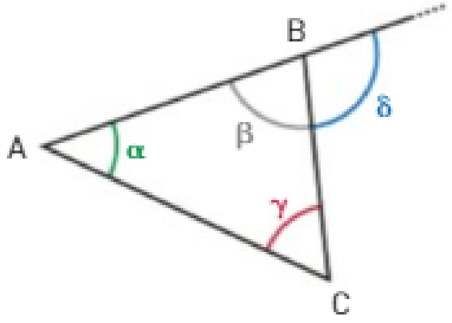


Proprietà degli angoli di un poligono

Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo
In un triangolo, la somma degli angoli interni è congruente a *un angolo piatto*.

DIMOSTRAZIONE

- In B, l'angolo esterno δ è adiacente all'angolo β, quindi:
$$\delta + \beta \cong \pi.$$
- Per il teorema dell'angolo esterno:
$$\delta \cong \alpha + \gamma.$$
- Sostituendo nella prima relazione:
$$\alpha + \gamma + \beta \cong \pi.$$



Proprietà degli angoli di un poligono

Secondo criterio di congruenza (forma generale)

Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli *ordinatamente* congruenti.

Teorema della somma degli angoli interni di un poligono convesso

La somma degli angoli interni α, β, γ… di un poligono convesso che ha n lati è $n - 2$ *angoli piatti*.

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots \cong (n - 2)\,\pi$$

Teorema della somma degli angoli esterni di un poligono

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è congruente a due angoli piatti.

Proprietà degli angoli di un poligono

Teorema della somma degli angoli interni di un poligono convesso

La somma degli angoli interni α, β, γ… di un poligono convesso che ha n lati è n – 2 *angoli piatti*.

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots \cong (n - 2)\,\pi$$

In base al teorema, in un poligono regolare di n lati l'ampiezza di ognuno degli n angoli è:

$$\frac{n-2}{n}\pi.$$

- In un triangolo equilatero ($n = 3$) gli angoli misurano: $\frac{3-2}{3} \cdot 180° = 60°$.

  In un ottagono regolare ($n = 8$) gli angoli misurano: $\frac{8-2}{8} \cdot 180° = 135°$.

Proprietà degli angoli di un poligono

I Romani e le perpendicolari

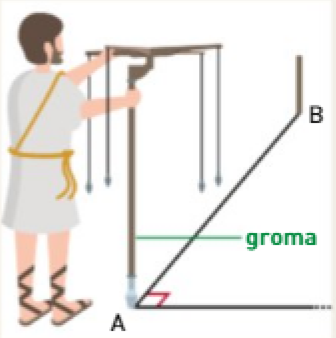
STORIA

Negli accampamenti d'epoca romana c'erano due strade principali, perpendicolari tra loro: il *cardo maximus*, che li attraversava da nord a sud, e il *decumano maximus*, in direzione est-ovest. Le strade secondarie erano parallele a una delle principali e creavano un reticolo rettangolare chiamato *castrum*, cuore dell'accampamento, dove risiedevano le truppe di difesa. Talvolta questi accampamenti si sono evoluti nel tempo fino a diventare delle città. Per esempio, Torino, Firenze e Bologna conservano ancora oggi le tracce del *castrum* nella loro struttura urbanistica.

Per tracciare le rette perpendicolari e progettare le strade si usava la *groma*, uno strumento formato da tre parti:

- un bastone cavo con una punta a un'estremità per piantare la groma nel terreno;
- una *stelletta*, formata da due bracci uguali tra loro e perpendicolari, dalle cui estremità cadono quattro fili a piombo con agganciati dei pesi;
- un elemento di raccordo collegato ai due precedenti con due cilindri che permettono la rotazione della stelletta attorno a un asse verticale.

Piantata la groma nel punto in cui si vuole collocare l'intersezione di due strade ortogonali, si realizza un primo allineamento, mirando attraverso una coppia di fili a piombo, in modo da vederli sovrapposti, e facendo piantare dei paletti in quella direzione. Mirando gli altri due fili a piombo, sempre in modo da vederli sovrapposti, si fanno piantare altri paletti in quella direzione. Le due direzioni, così, risultano perpendicolari perché lo sono i due bracci della stelletta e su di esse si possono costruire, per esempio, il cardo e il decumano.



► Ricerca nel Web come la groma veniva utlizzata anche per altre applicazioni, per esempio per misurare la larghezza di un fiume o la distanza delle navi in avvicinamento ai porti.

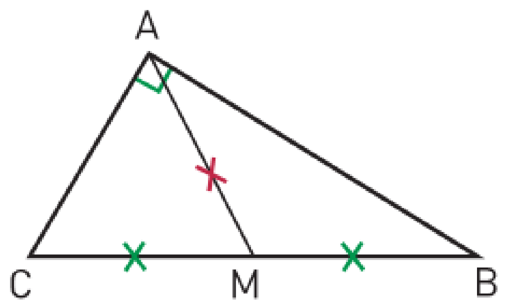
Mediana relativa all'ipotenusa

Usando i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, si può dimostrare il teorema seguente.

TEOREMA

Mediana relativa all'ipotenusa

In un triangolo rettangolo la *mediana* relativa all'ipotenusa è congruente a *metà ipotenusa*.



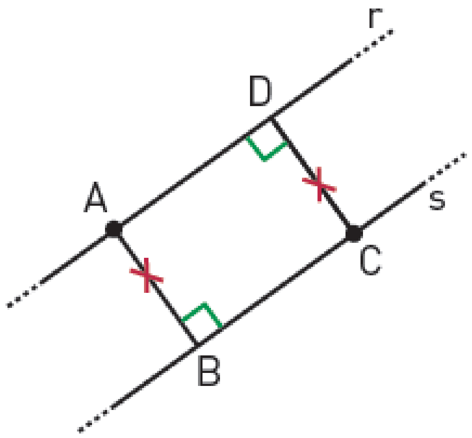
Ipotesi: ABC triangolo rettangolo con A angolo retto; $CM \cong MB$.

Tesi: $AM \cong \frac{1}{2} CB$.

Distanza tra due rette parallele

<u>Teorema delle rette parallele e distanza di punti da rette</u>

Se due rette *r* e *s* sono parallele, la distanza di un punto di *r* da *s* e la distanza di un punto di *s* da *r* sono congruenti.



Ipotesi: $r // s$;
AB distanza di A da s;
CD distanza di C da r.

Tesi: $AB \cong CD$

La **distanza tra due rette parallele** è la distanza di un qualsiasi punto di una delle rette dall’altra.

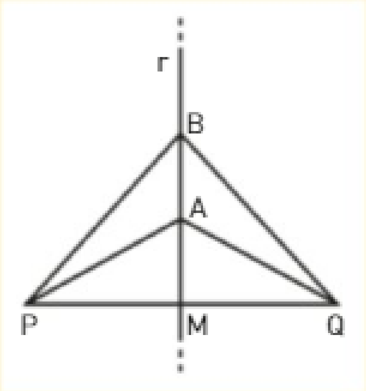
Dimostrare con le rette perpendicolari

I FONDAMENTALI

Dimostrare con le rette perpendicolari

PROVA TU fai un esercizio simile interattivo

Sull'asse del segmento PQ, dalla stessa parte rispetto a PQ, consideriamo i punti A e B. Dimostriamo che $PAB \cong BAQ$.



1 Scriviamo ipotesi e tesi e disegniamo la figura.

Ipotesi: r asse di PQ;
M intersezione di r e PQ.

Tesi: $PAB \cong BAQ$.

2 Dimostriamo che i triangoli APM e AMQ sono congruenti.

- $PM \cong MQ$ perché r è l'asse di PQ, quindi lo incontra nel punto medio M;
- $P\widehat{M}A \cong A\widehat{M}Q$ perché angoli retti formati dall'asse r e PQ;
- AM in comune.

Sapere che una retta r è **asse** di un segmento PQ fornisce due ipotesi:
1. r è perpendicolare a PQ;
2. r passa per il punto medio di PQ.

Dunque i triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza. In particolare $PA \cong AQ$.
In modo analogo dimostriamo che i triangoli BPM e BMQ sono congruenti. In particolare $PB \cong BQ$.

3 Dimostriamo la tesi.

I triangoli PAB e BAQ hanno:

- $PA \cong AQ$ per la dimostrazione precedente;
- $PB \cong BQ$ per la dimostrazione precedente;
- AB in comune.

Dunque sono congruenti per il terzo criterio di congruenza.

Dimostrare con le rette perpendicolari

I FONDAMENTALI

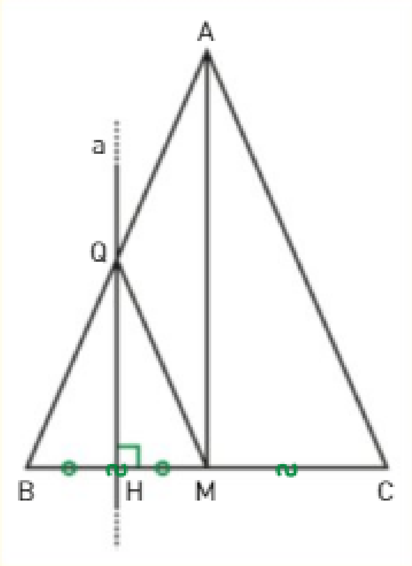
Applicare il criterio di parallelismo

PROVA TU fai un esercizio simile interattivo

Nel triangolo isoscele ABC tracciamo la mediana AM relativa alla base BC e consideriamo il punto di intersezione Q tra il lato AB e l'asse del segmento BM. Dimostriamo che QM è parallela ad AC.

Ipotesi: ABC isoscele di base BC;
$BM \cong MC$;
a asse di BM.

Tesi: $QM \parallel AC$.



Dimostrazione

Indichiamo con H il punto di intersezione dell'asse di BM con BC.
I triangoli BHQ e MHQ hanno:

- $BH \cong HM$ per ipotesi, essendo a asse di BM;
- QH in comune;
- $B\widehat{H}Q \cong Q\widehat{H}M$ retti perché a è asse di BM per ipotesi.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio. In particolare: $Q\widehat{B}M \cong Q\widehat{M}B$.

$Q\widehat{B}M \cong A\widehat{C}B$ perché angoli alla base del triangolo isoscele ABC. Quindi $Q\widehat{M}B \cong A\widehat{C}B$ per la proprietà transitiva. Pertanto la retta QM è parallela ad AC perché le due rette formano con la trasversale BC angoli corrispondenti congruenti.

Per applicare il criterio di parallelismo basta individuare **una sola coppia** di angoli alterni o corrispondenti congruenti o coniugati supplementari.

Dimostrare con le rette perpendicolari

Dimostrazioni

I FONDAMENTALI

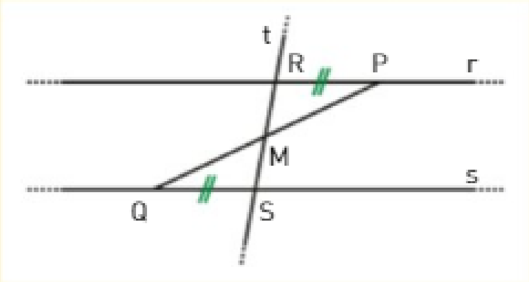
PROVA TU fai un esercizio simile interattivo

Applicare l'inverso del criterio di parallelismo

Tracciamo due rette parallele r e s, tagliate da una trasversale t. Detti R e S i punti in cui t interseca rispettivamente r e s, consideriamo, da parti opposte rispetto al segmento RS, altri due punti $P \in r$ e $Q \in s$ in modo che $PR \cong QS$. Detto M il punto di intersezione dei segmenti PQ e RS, dimostriamo che M è il punto medio di entrambi i segmenti.

Ipotesi: $r \parallel s$;
$PR \cong QS$.

Tesi: $RM \cong MS$;
$PM \cong MQ$.



Dimostrazione

I triangoli RPM e QSM hanno:

La tesi suggerisce di considerare i triangoli RPM e QSM.

- $PR \cong QS$ per ipotesi;
- $M\widehat{R}P \cong M\widehat{S}Q$ perché angoli alterni interni di $r \parallel s$ con trasversale t;
- $M\widehat{P}R \cong M\widehat{Q}S$ perché angoli alterni interni di $r \parallel s$ con trasversale QP.

Quindi i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.
In particolare: $RM \cong MS$ e $PM \cong MQ$.

Dimostrare con le rette perpendicolari

9 Dimostra che, se in un triangolo la bisettrice di un angolo interno è perpendicolare al lato opposto, allora il triangolo è isoscele.

10 **VERIFICA CON GEOGEBRA** Disegna un angolo $A\widehat{O}B$ e la sua bisettrice t. Da un punto P appartenente a t, conduci una retta a essa perpendicolare, che incontra i lati dell'angolo nei punti C e D. Verifica con GeoGebra che P è il punto medio di CD e poi dimostralo.

11 Considera l'angolo $P\widehat{O}Q$, con $PO \cong OQ$.

a. Dimostra che la bisettrice s di $P\widehat{O}Q$ è asse di PQ.

b. Preso R su s tale che $OQ \cong QR$, dimostra che il quadrilatero $OPRQ$ ha tutti i lati congruenti.

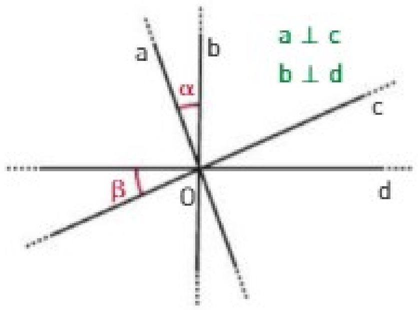
12 In un quadrilatero convesso $ABCD$ dimostra che se $BA \cong BC$ e $DC \cong DA$, allora DB è asse della diagonale AC.

13 Sui lati a e b di un angolo di vertice O considera rispettivamente un punto A e un punto B. Traccia gli assi dei segmenti OA e OB che si incontrano nel punto P. Dimostra che $AP \cong BP$.

14 Dimostra che, se il quadrilatero convesso $ABCD$ è tale che il vertice A coincide con il punto di intersezione degli assi dei lati BC e CD, allora $A\widehat{B}D \cong A\widehat{D}B$.

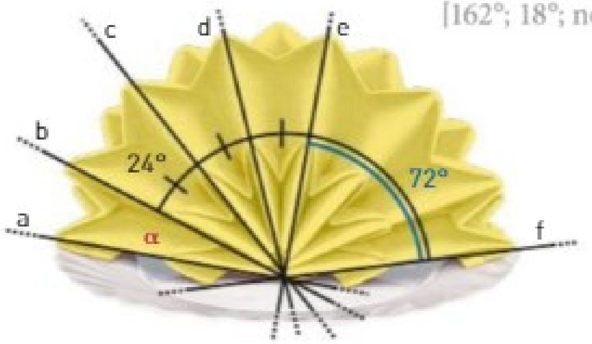
OCCHIO AI DATI L'ipotesi che il quadrilatero sia convesso è necessaria? Motiva la risposta.

19 Utilizzando le informazioni in figura, dimostra che $\alpha \cong \beta$ e che le loro bisettrici sono perpendicolari.



20 **INTORNO A NOI** Utilizzando le informazioni in figura e sapendo che $a \perp e$, trova l'ampiezza dell'angolo di apertura del tovagliolo e l'ampiezza α di $\widehat{ab}$. Stabilisci inoltre se $d \perp f$.

[162°; 18°; no]



Dimostrare con le rette perpendicolari

27 Da parti opposte rispetto al segmento PQ, traccia $AP \cong QB$, in modo che $A\widehat{P}Q \cong P\widehat{Q}B$. Dimostra che $AP \parallel QB$ e $AQ \parallel PB$.

28 Dato un segmento AB, traccia l'asse del segmento e due semirette di origine A che formano con AB angoli congruenti. Detti C e D i punti di intersezione delle semirette con l'asse, dimostra che CB è parallela ad AD.

29 Disegna un segmento ST e le perpendicolari al segmento, s e t, che passano rispettivamente per S e per T. Da parti opposte rispetto a ST, considera P su s e Q su t, in modo che $PS \cong QT$. Dimostra che $SQ \parallel PT$.

30 Nel triangolo ABC, isoscele sulla base AB, traccia le bisettrici AE e BD degli angoli alla base e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che il triangolo DEP è isoscele e che $DE \parallel AB$.

31 VERIFICA CON GEOGEBRA Sulla bisettrice dell'angolo $X\widehat{O}Y$ considera un punto A e su OY un punto B tale che $OB \cong BA$.

Dimostrare con le rette perpendicolari

40 Da un punto D del lato AC del triangolo ABC traccia le parallele ai lati CB e AB che li intersecano rispettivamente nei punti E e F. Dimostra che $D\widehat{E}B \cong D\widehat{F}B$.

41 Dai vertici B e C del triangolo ABC traccia le parallele ai lati opposti e indica con P il loro punto di intersezione.

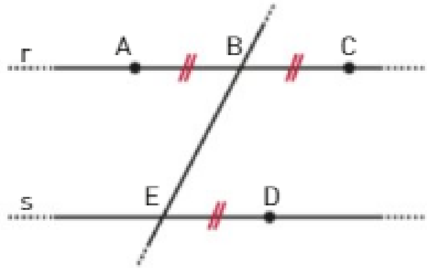
a. Dimostra che $ABC \cong BCP$.

b. Considerati su AC un punto Q e su BP un punto R tali che $QC \cong BR$, dimostra che BQ è parallelo a RC.

42 Le rette r e s della figura sono parallele e inoltre $AB \cong BC \cong ED$. Dimostra che:

a. la retta AE è parallela a BD;

b. la retta CD è parallela a BE.



43 Considera una coppia di angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale. Dimostra che le bisettrici di tali angoli sono parallele.

46 La trasversale t taglia le rette parallele a e b nei punti A e B. Dimostra che il punto medio P di AB è anche il punto medio del segmento che ogni altra trasversale passante per P forma con a e b e che P è equidistante da a e b.

47 Traccia una retta r parallela alla base BC del triangolo isoscele ABC; r interseca i lati obliqui AB e AC rispettivamente nei punti F e G. Dimostra che i triangoli FCB e GBC sono congruenti.

48 Dato il triangolo isoscele ABC di base BC, dimostra che la retta passante per A e parallela a BC è bisettrice dell'angolo esterno di vertice A.

49 Considera un triangolo ABC, e la retta r parallela a BC e passante per A. Su r considera, nel semipiano definito dalla retta AB che contiene il triangolo, il punto D tale che $AD \cong CB$.
Preso un punto T su r, da parte opposta a D rispetto ad A, dimostra che $C\widehat{D}A \cong B\widehat{A}T$.

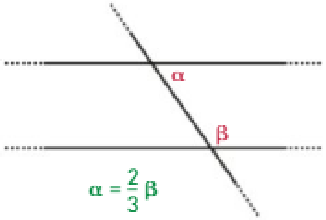
RISOLVI IN 3 PASSI

1. Osserva che $B\widehat{C}A \cong D\widehat{A}C$. Perché?
2. Dimostra che i triangoli ABC e ADC sono congruenti.
3. Usa il risultato precedente per dimostrare che $DC \parallel AB$ e concludi.

Dimostrare con le rette perpendicolari

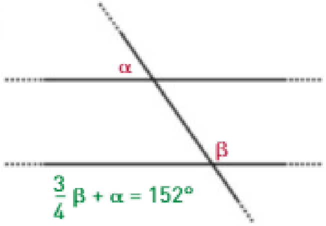
In ogni figura ci sono due rette parallele tagliate da una trasversale. Trova le ampiezze di tutti gli angoli utilizzando le informazioni.

62



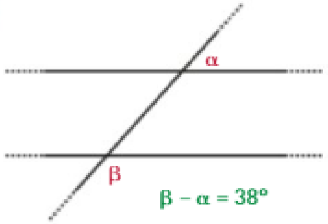
$[\alpha = 72°; \beta = 108°]$

63



$[\alpha = 68°; \beta = 112°]$

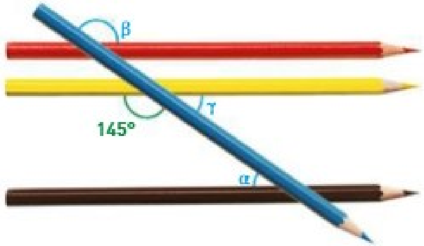
64



$[\alpha = 71°; \beta = 109°]$

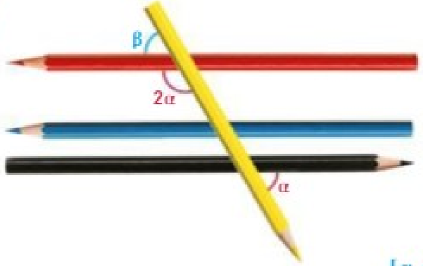
In ogni figura tre matite sono parallele. Determina le ampiezze di tutti gli angoli indicati utilizzando le informazioni fornite.

65



$[\alpha = \gamma = 35°; \beta = 145°]$

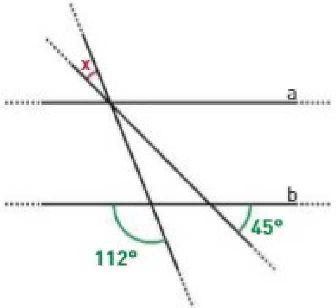
66



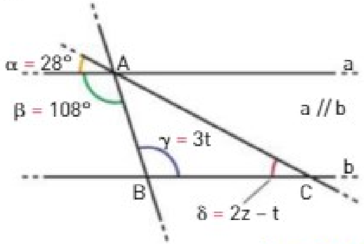
$[\alpha = \beta = 60°]$

67 **TEST** Qual è l'ampiezza di x?

A 45° B 23° C 22° D 17°



70 Determina t e z utilizzando le informazioni della figura.



$[t = 36°; z = 32°]$

71 **IN GARA** Premesso che $l // m$, qual è la misura dell'angolo α?

Dimostrare con le rette perpendicolari

104 **COMPLETA** sapendo che α e β sono gli angoli alla base di un triangolo isoscele, γ è l'angolo al vertice e δ è l'angolo esterno a β.

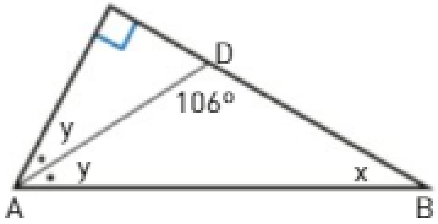
a. $\alpha \cong$ β

b. $\alpha + \gamma \cong$ δ

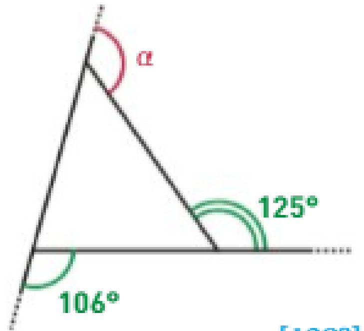
c. $\alpha + \beta + \gamma =$ 180°

d. $\delta + \alpha =$ 180°

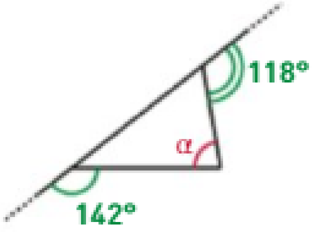
105 Trova x e y in figura. [$x = 58°$; $y = 16°$]



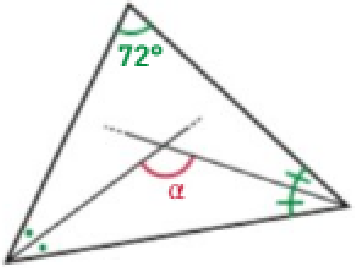
106 Nelle seguenti figure trova l'ampiezza di α.



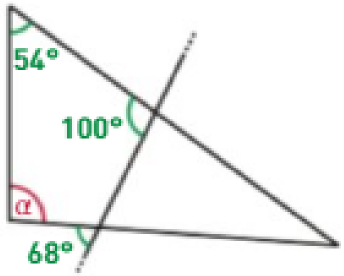
a [129°]



b [80°]



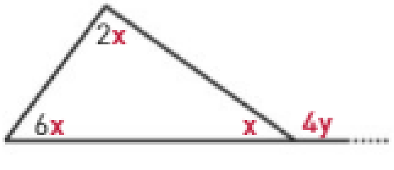
c [126°]



d [94°]

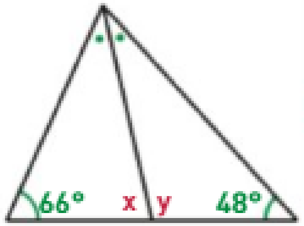
107 Nelle seguenti figure determina x e y.

[$x = 20°$; $y = 40°$]



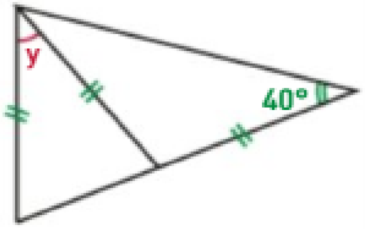
a

[$x = 81°$; $y = 99°$]



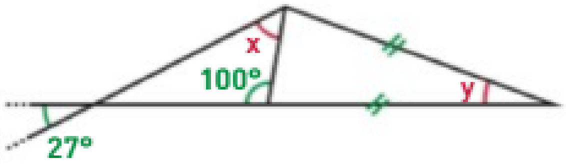
b

[$y = 20°$]



c

[$x = 53°$; $y = 20°$]



d

Dimostrare con le rette perpendicolari

116 Nel triangolo isoscele ABC di base AB, l'angolo di vertice C è congruente alla metà di ciascuno degli angoli alla base. Se AD è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$, determina le misure degli angoli dei triangoli ACD e ABD.

UN PASSO IN PIÙ Dimostra che $AB \cong AD \cong CD$.

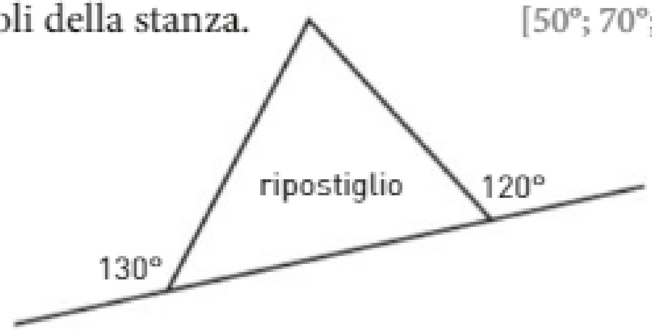
[36°; 108°; 72°]

117 Considera il triangolo rettangolo ABC. Fissa un punto P sull'ipotenusa AB, un punto Q sul cateto BC e un punto R sul cateto AC in modo che i triangoli PAR e PBQ siano isosceli di basi PR e PQ. Calcola l'ampiezza dell'angolo $R\widehat{P}Q$. [45°]

118 Nel triangolo ABC, $\widehat{C}$ è la metà di $\widehat{B}$. Prolunga il lato BC, dalla parte di C, di un segmento $CP \cong AC$. Esprimi in funzione di $\widehat{C}$ le ampiezze degli angoli dei triangoli ABC e CAP. Calcola l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}P$ se $\widehat{C} = 40°$. [80°]

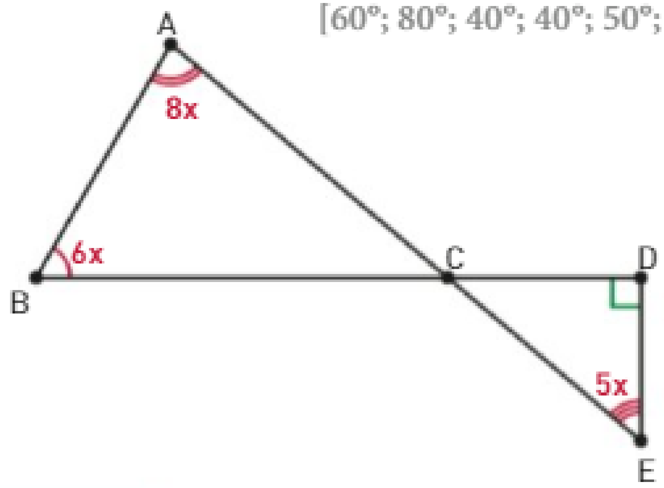
110 **INTORNO A NOI** In figura è rappresentata la vista in pianta di un ripostiglio. Calcola tutti gli angoli della stanza.

[50°; 70°; 60°]



111 Determina la misura degli angoli interni dei triangoli ABC e CDE in modo che siano verificate le ipotesi della figura.

[60°; 80°; 40°; 40°; 50°; 90°]



Dimostrare con le rette perpendicolari

FAI IL PUNTO SULLE COMPETENZE

Proprietà degli angoli di un triangolo e di un poligono

Fai questi esercizi anche su laZ Esercizi

1 **VERO O FALSO?**

a. In un quadrilatero la somma degli angoli interni è congruente alla somma degli angoli esterni. ☑V F

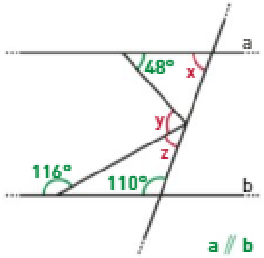
b. La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è congruente alla somma degli angoli interni di $n-3$ triangoli. V ☑F

c. In un triangolo rettangolo isoscele ciascun angolo esterno misura 135°. V ☑F

d. La somma degli angoli interni di un pentagono concavo è uguale a quella di un pentagono convesso. ☑V F

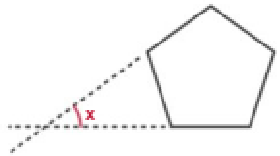
2 Trova x, y e z.

$[x = 70°; y = 112°; z = 6°]$



3 Nella figura è rappresentato un pentagono regolare. Trova l'ampiezza dell'angolo x.

[36°]

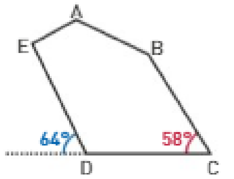


4 Calcola le ampiezze degli angoli interni α, β, γ e δ di un quadrilatero, sapendo che valgono le relazioni:

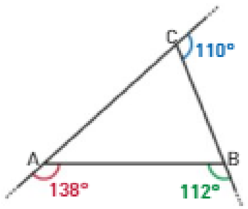
$\alpha = 3\beta$; $\beta + \gamma = 96°$; $\delta = \alpha + 36°$.

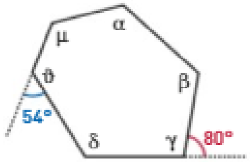
$[\alpha = 114°; \beta = 38°; \gamma = 58°; \delta = 150°]$

5 **TEST** Quale dei seguenti poligoni non può esistere?

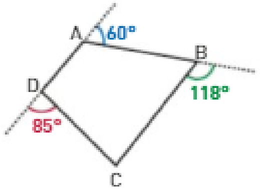


BE ≅ BD ≅ BC





$\alpha + \gamma = 224°$
$\delta + \mu = 248°$
$\beta = \delta$



$B\hat{C}D = \frac{3}{5} B\hat{A}D - 8°$

Dimostrare con le rette perpendicolari

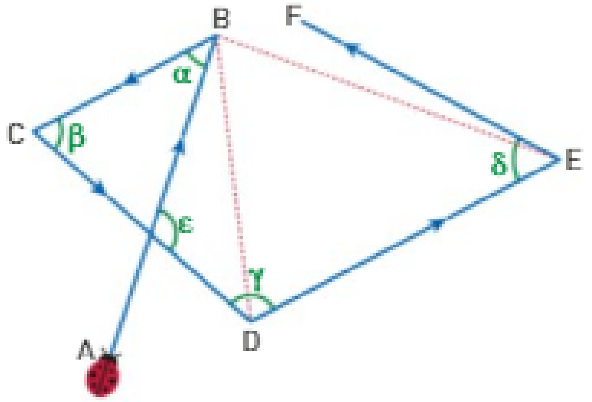
6 Dato il triangolo equilatero ABC, prolunga i lati AB, BC e CA rispettivamente dei tre segmenti BD, CE e AF in modo che $A\widehat{F}B \cong B\widehat{D}C \cong C\widehat{E}A$.

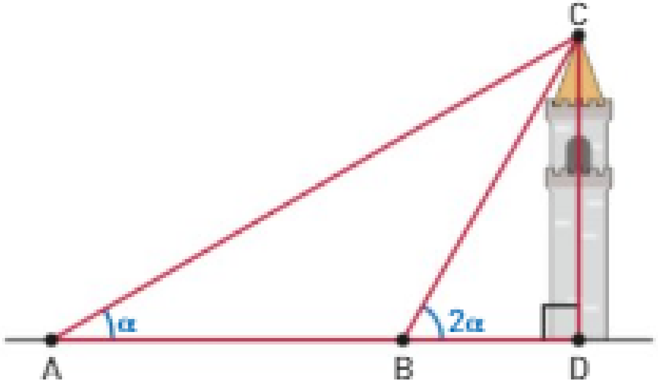
a. Dimostra che il triangolo DEF è equilatero.

b. Se $C\widehat{E}F = 38°$, qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{D}F$? [b) 22°]

7 Una coccinella percorre la traiettoria $ABCDEF$. Calcola l'ampiezza degli angoli α, β, γ, δ e ε.
[$\alpha = 44°$, $\beta = 69°$, $\gamma = 111°$, $\delta = 56°$, $\varepsilon = 113°$]

$CB \parallel DE$
$BD \cong CD$
$B\widehat{D}C = 42°$
$D\widehat{B}C - \alpha = 25°$
$B\widehat{E}F = 5°$
$D\widehat{B}E = 60°$



8 

INTORNO A NOI La cima della torre in figura è vista dal punto A sotto un angolo di ampiezza α; dal punto B la cima si vede sotto un angolo di ampiezza doppia.
Dimostra che:

a. il triangolo ABC è isoscele.

b. se la misura di α non è 0, CD è minore di AB;

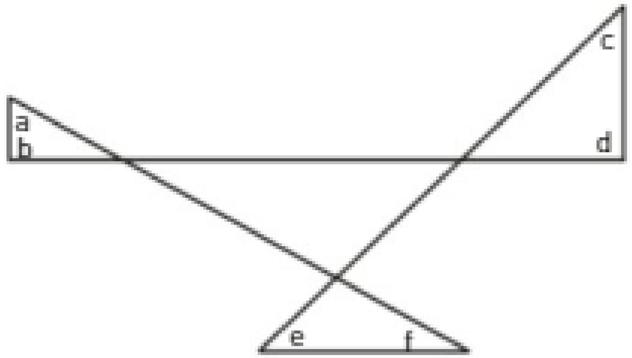
c. $\alpha = 30°$ se e solo se BC è bisettrice dell'angolo $A\widehat{C}D$.

Verifica delle competemze

COMPETENZE ALLA PROVA

Argomentare

1 INVALSI Qual è la somma degli angoli a, b, c, d, e, f nella figura disegnata a lato?

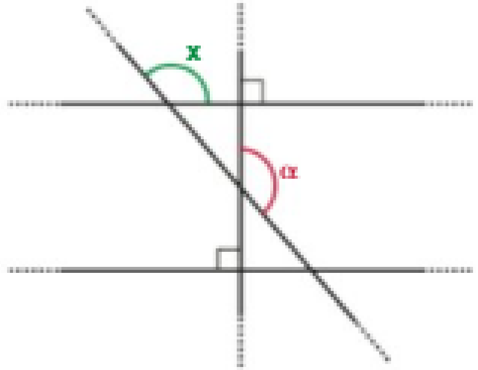


- A Un angolo piatto, ossia 180°.
- B Tre angoli retti, ossia 270°.
- ☑ C Due angoli piatti, ossia 360°.
- D Cinque angoli retti, ossia 450°.

2 Disegna una retta r e un segmento AB che non interseca r. Trova il punto di r equidistante da A e B, motivando la costruzione eseguita.

3 Esprimi in funzione di x l'ampiezza dell'angolo α e motiva la risposta.

$[\alpha = 270° - x]$



4 Le seguenti affermazioni sono tutte *false*. Spiega perché e indica l'eventuale correzione.

a. Due triangoli rettangoli isosceli sono congruenti.
b. Due triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa in comune sono congruenti.
c. Due triangoli isosceli che hanno la base in comune sono congruenti.

Verifica delle competemze

Dimostrare

5 Dal vertice A di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto e fissa, da parti opposte rispetto al vertice A, due punti, P e Q, tali che $AP \cong AQ \cong BC$, con C e Q dalla stessa parte rispetto al lato AB. Dimostra che i triangoli ABP e CQA sono congruenti.

6 Dimostra che, se per ogni vertice di un triangolo qualsiasi ABC si traccia la parallela al lato opposto, con tali parallele si ottiene un triangolo con gli angoli congruenti a quelli di ABC e con i lati doppi di quelli di ABC.

7 Sia ABC un triangolo rettangolo in A e siano AM la mediana relativa a BC e MH e MK le altezze dei triangoli ABM e ACM. Dimostra che:

a. MH e MK sono perpendicolari;

b. i triangoli CMK e BMH sono congruenti.

8 Dal piede H della perpendicolare condotta dal vertice del triangolo isoscele ABC sulla base AB, conduci le rette parallele ai lati obliqui del triangolo. Individua le coppie di triangoli congruenti.

---

9 Dato il triangolo isoscele ABC di base AB, prolunga i lati AC e CB dei segmenti AP e BQ tra loro congruenti. Dimostra che PQ è parallelo ad AB.

10 Da un vertice di un triangolo traccia la mediana relativa al lato opposto. Dimostra che gli altri due vertici sono equidistanti da tale retta.

11 Sono dati un segmento AB e il suo asse r. Considera un punto C su r e traccia i segmenti AC e CB. Scegli un punto D su AC e un punto E su CB tali che $AD \cong BE$. Dimostra che:

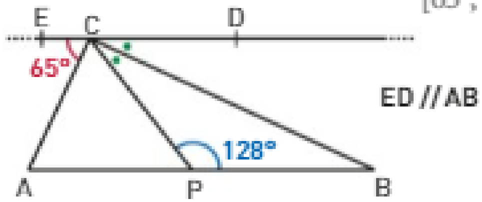
a. i triangoli ACE e BCD sono congruenti;

b. r è asse di DE.

Verifica delle competemze

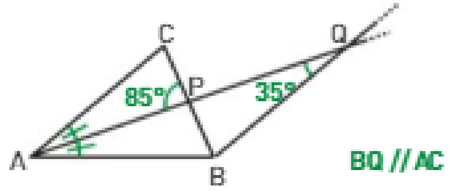
Risolvere problemi

19 Con le informazioni indicate, determina le ampiezze di ciascun angolo presente in figura. [63°; 52°; ...]



20 Trova le ampiezze degli angoli interni α, β, γ, δ di un quadrilatero, sapendo che $\alpha = 3\beta$, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $\delta = \frac{2}{3}\alpha$. [144°, 48°, 72°, 96°]

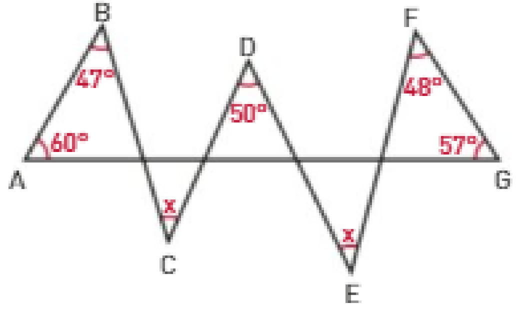
21 Usando le informazioni indicate, determina le ampiezze di tutti gli angoli presenti in figura.



22 ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa AC. Considera una retta p parallela all'ipotenusa, che interseca i cateti AB e BC nei punti P e Q. Traccia su p le proiezioni dei vertici A e C del triangolo e trova le misure di tutti gli angoli della figura che si forma, sapendo che $B\widehat{A}C = 58°$. [32°, 148°; ...]

23 **IN GARA** Nella figura sotto, sono indicate le ampiezze degli angoli di vertici A, B, D, F, G. Gli angoli di vertici C e E hanno la stessa ampiezza, indicata con x. Qual è il valore di tale ampiezza x?

- A ☑ 41°
- B 39°
- C 40°
- D 37°
- E 38°



[Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede, 2018]

24 Nella figura, $ABCDE$ è un pentagono regolare ed EDO è un triangolo equilatero. Determina le misure delle ampiezze degli angoli x, y e z. [66°; 84°; 42°]