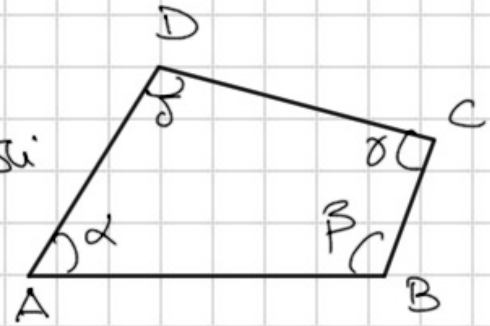
PARALLELOGRAMMI

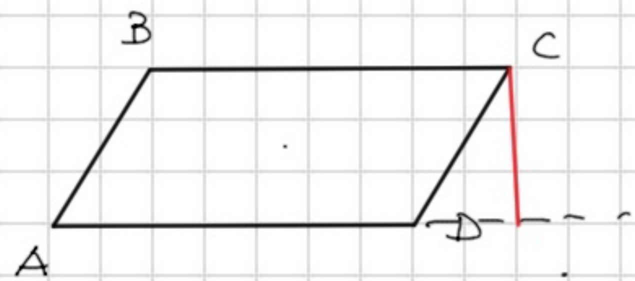
Lezione del 16/05/2025

Un quadrilatero è un poligono con quattro lati e quattro angoli



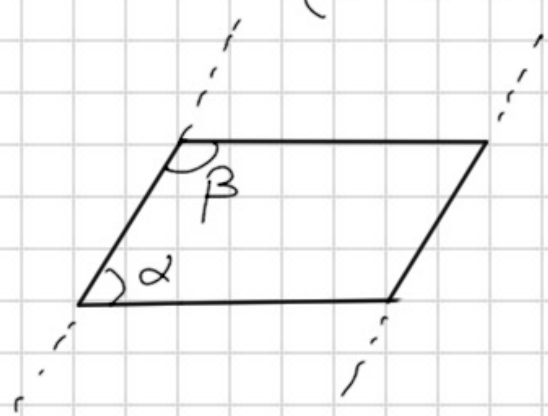
α e γ si dicono opposti come anche β e δ

Un parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti paralleli



Si chiama centro del parallelogramma il punto di incontro delle sue diagonali

Il segmento che esce da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto si chiama altezza. (o sul suo prolungamento)



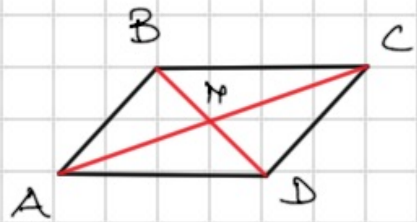
α e β sono supplementari

TEOREMA

Proprietà di un parallelogramma

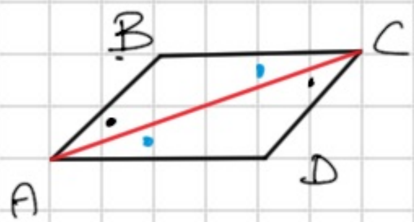
In un parallelogramma:

1) i lati opposti sono congruenti
2) gli angoli opposti sono congruenti
3) le diagonali si tagliano a metà.



Hp ABCD è un parallelogramma

(1) th $AB = CD$
$AD = BC$



Dim. Traccio la diagonale AC e considero i triangoli ABC e ADC

Essi hanno AC in comune

$B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ perché alterni interni

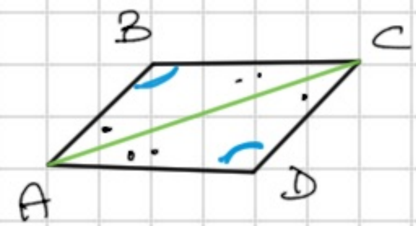
$A\hat{C}B = C\hat{A}D$ perché alterni interni

Pertanto i triangoli sono congruenti per il secondo criterio

In particolare coincidono uguali AB con CD e AD con BC

② th $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ e $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

Tracciamo la diagonale AC



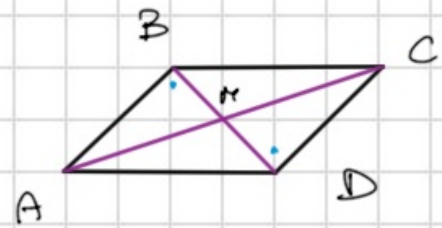
$B\hat{A}C = A\hat{C}D$

$B\hat{C}A = C\hat{A}D$ perché alterni interni

Quindi i due angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ sono supplementari di angoli uguali e dunque uguali

Mentre $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ perché somme di angoli uguali

(3) $AM = MC$
$BM = MD$



Considero i due triangoli AMB e CMD;

$AB = CD$ perchè lati opposti di un parallelogramma

$\hat{ABM} = \hat{CDM}$ perchè alterni interni

$\hat{BAM} = \hat{DCM}$ perchè alterni interni

Dunque i due triangoli sono congruenti e in particolare

$AM = MC$ e $BM = MD$ c.v.d.

Condizioni sufficienti per avere un parallelogramma

Un quadrilatero è un parallelogramma se ha

1) i lati opposti congruenti, oppure

2) gli angoli opposti congruenti, oppure

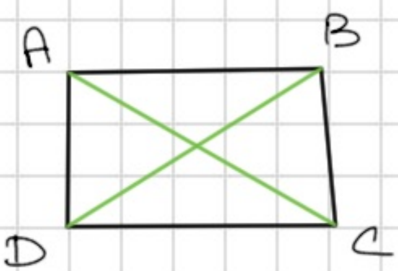
3) le diagonali che si tagliano a metà, oppure

4) due lati paralleli e congruenti

RETTANGOLI

Un rettangolo è un quadrilatero in cui gli angoli sono tutti retti

TEOREMA: In un rettangolo, le diagonali sono congruenti



Hp ABCD è un rettangolo

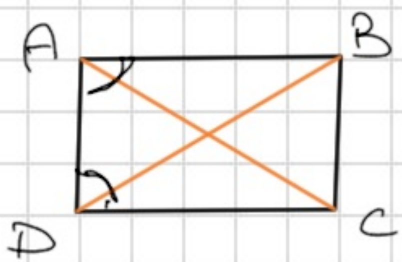
Th $AC = BD$

Condizione sufficiente per avere un rettangolo

Un parallelogramma ha i lati opposti congruenti e quelli adiacenti supplementari; quindi per dimostrare che un parallelogramma è un rettangolo, è sufficiente far vedere che ha un angolo retto.

TEOREMA Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo.

Dim.



Hp ABCD è un parallelogramma
$AC = BD$

Th ABCD è un rettangolo

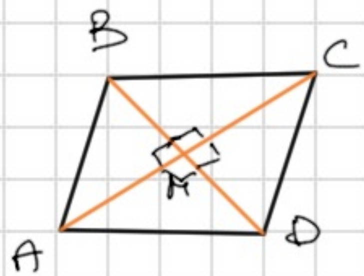
Prendo in considerazione i triangoli $\underline{DAB}$ e $\underline{ADC}$:
AD in comune
$AC = DB$ per hp e $AB = DC$ perché lati opposti
del parallelogramma. sono congruenti per il 3° cr.

$\Rightarrow \quad D\hat{A}B = A\hat{D}C$

ROMBO

Un rombo è un quadrilatero in cui tutti i lati sono congruenti

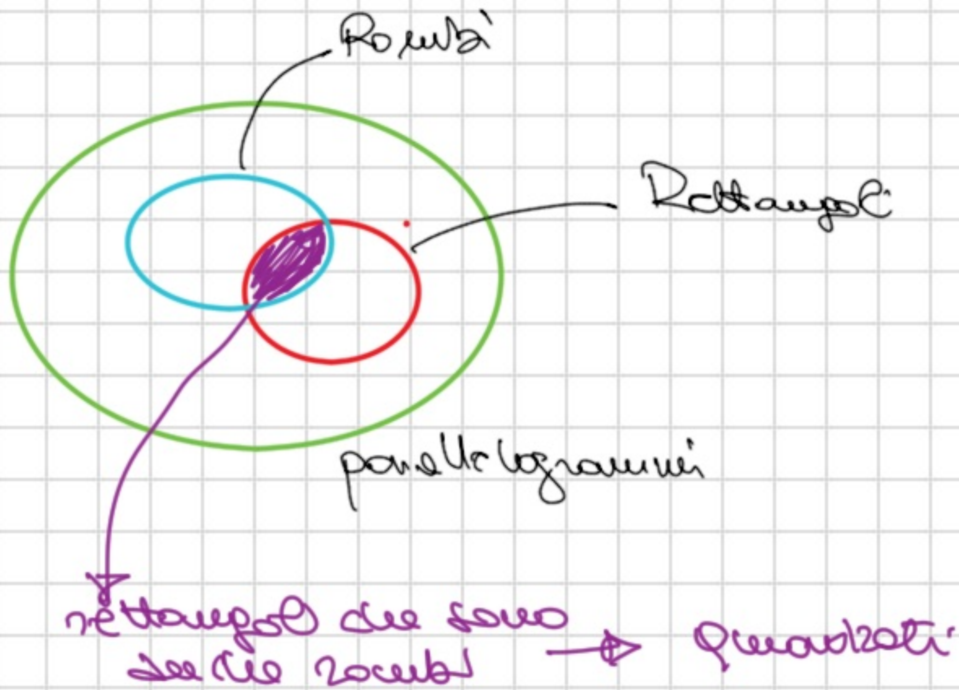
TEOREMA: In un rombo, le diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli.



In un rombo, le diagonali formano 4 triangoli rettangoli congruenti.

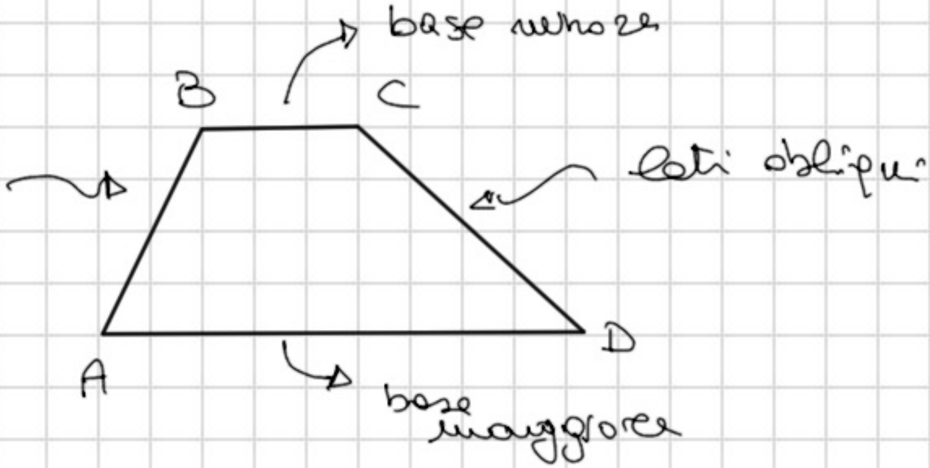
TEOREMA Un parallelogramma è un rombo se ha

1) le diagonali perpendicolari
2) una diagonale bisettrice di un angolo



TRAPEZI

Un trapezio è un quadrilatero che ha solo due lati paralleli



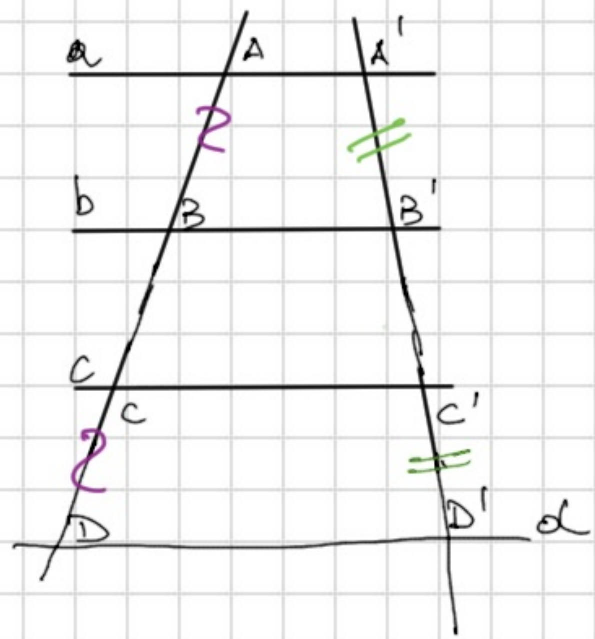
ISOSCELI lati obliqui congruenti

RETTANGOLO se uno dei lati obliqui è perpendicolare alle basi

TEOREMA In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ognuna delle basi sono congruenti.

TEOREMA DI TALETE

Un fascio di rette parallele è un insieme di rette tra loro parallele



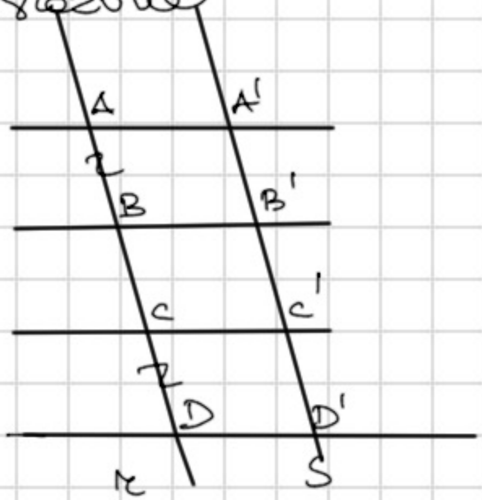
Tra un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra

Hp: $AB \cong CD$

$a \parallel b \parallel c$

Th: $A'B' = C'D'$

Dimostrazione



1° caso $r // s$

$AA'BB'$ e $CC'DD'$ sono parallelogrammi perché hanno i lati opposti paralleli

$A'B' = AB$ perché lati opposti di $AA'BB'$

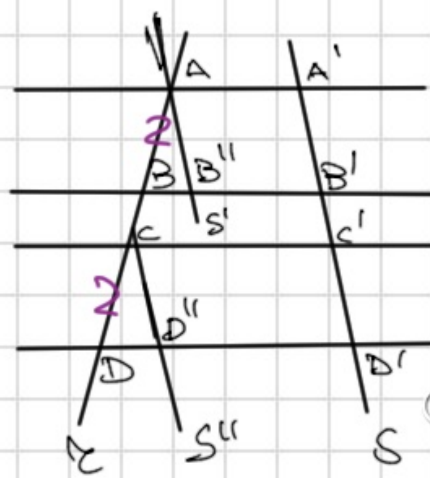
$AB = CD$ per hp

$CD = C'D'$ perché lati opposti $CC'DD'$

Per la proprietà transitiva $A'B' = C'D'$

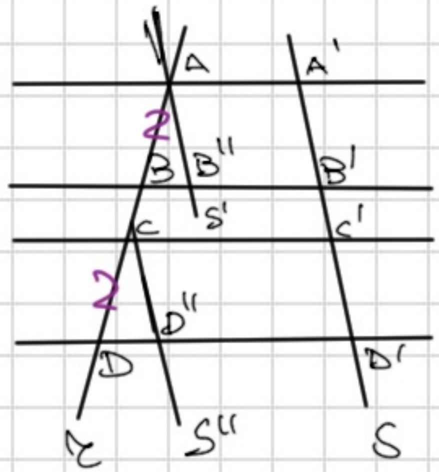
2° CASO

r ed s non sono parallele



Sia s' una retta per A e parallela ad s.

Sia s'' una retta per C e parallela a s.



Poniamo attenzione ai triangoli ABB'' e CDD''

Essi hanno:

$AB = CD$ per ipotesi

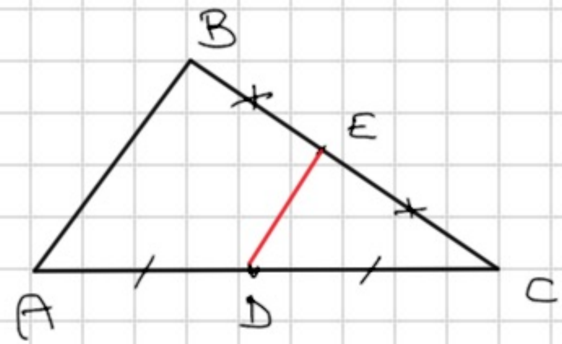
$\hat{B} = \hat{D}$ perché corrispondenti delle rette b e d tagliate da r

$\hat{A} = \hat{C}$ perché corrispondenti delle rette s' e s'' tagliate da r

$\Rightarrow$ I due triangoli sono congruenti per il 2° criterio.
In particolare $AB'' = CD''$

AB'' e CD'' sono congruenti, dunque lo saranno anche $A'B'$ e $C'D'$ per il caso precedente.

Segmento con estremi nei punti medi dei lati di un triangolo



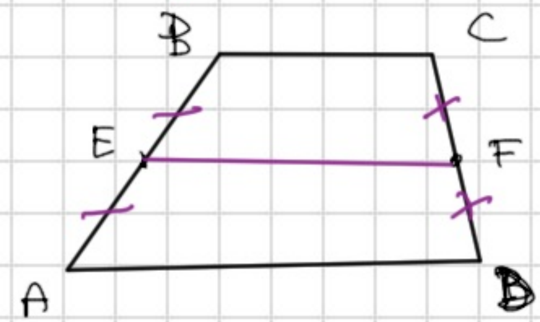
Il segmento con estremi nei punti medi dei due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà

Hp $AD = DC$
$BE = EC$

Th $DE \parallel AB$

$DE = \frac{1}{2} AB$

Segmento con estremi nei punti medi dei lati obliqui di un trapezio



Il segmento che unisce i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è parallelo al terzo lato e congruente alla metà della loro somma.

Hp: $ABCD$ è un trapezio
$AE = EB$
$CF = FD$

Th: $EF \parallel BC \parallel AD$
$EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$