Lezione del 22.05

# PROVA DI VERIFICA

70 min

**1** C1 **VERO O FALSO?** Indica se le seguenti proposizioni sono vere o false, motivando le risposte.

a. Un quadrilatero con tre angoli retti è un rettangolo. ✓V F

b. Un trapezio rettangolo può non avere alcun angolo acuto. V ✓F

c. Un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un quadrato. V ✓F

d. Un rombo che ha un angolo retto è un quadrato. ✓V F ____ /6

**2** C2 Prolunga nello stesso verso i lati del rettangolo $ABCD$ dei segmenti $AM$, $BN$, $CP$, $DQ$ in modo che $AM \cong CP$ e $BN \cong DQ$. Dimostra che $MP$ e $NQ$ si incontrano in un punto $O$ tale che $QO \cong ON$ e $MO \cong OP$. ____ /10

**3** C2 Dai vertici della base $BC$ del triangolo $ABC$ traccia le bisettrici $BP$ e $CQ$. Dimostra che, se $BCPQ$ è un trapezio, allora $ABC$ è isoscele sulla base $BC$. ____ /12

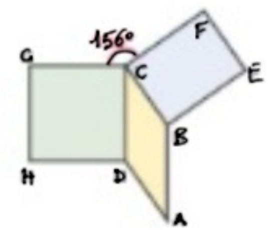
**4** C2 Nel parallelogramma $ABCD$, $P$ e $Q$ sono i punti medi dei lati opposti $AB$ e $CD$. Dimostra che le rette $CP$ e $AQ$ dividono la diagonale $DB$ in tre segmenti congruenti. ____ /14

**5** C3 Nel parallelogramma $ABCD$ considera le perpendicolari alla diagonale $AC$ passanti per i vertici opposti $B$ e $D$, e indica rispettivamente con $P$ e $Q$ i punti di intersezione di tali perpendicolari con $AC$. Dimostra che $AQ = PC$ e che la diagonale $BD$ interseca il segmento $PQ$ nel suo punto medio. ____ /14

**6** C1 In figura, $DCGH$ è un quadrato e $BEFC$ un rettangolo.
Del parallelogramma $ABCD$ determina:

a. le ampiezze degli angoli interni; [24°; 156°]

b. il perimetro, sapendo che quello di $DCGH$ è 60 cm e che $EF$ ha lunghezza 7 cm. [44 cm]




____ / 10

**7** C2 Nel trapezio $ABCD$, il segmento $HK$ unisce i punti medi dei lati obliqui $AD$ e $BC$.
Sai che

$$\overline{CD} = x + 3,\ \overline{AB} = 5x + 1 \text{ e } \overline{HK} = 2x + 5.$$

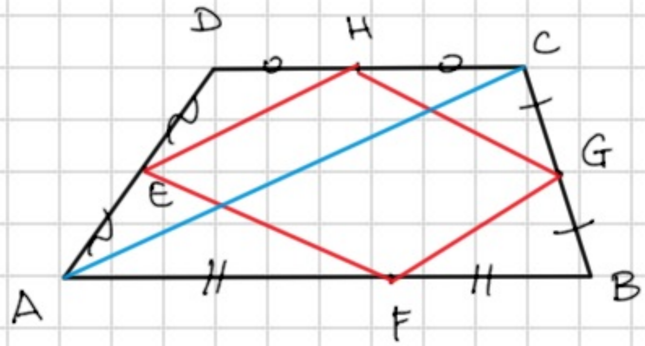
Determina il valore di $x$. [$x = 3$] ____ / 10

**8** C3 In un trapezio $ABCD$, con base maggiore $AB$, si ha $D\widehat{A}B = 60°$ e $B\widehat{C}D = 150°$.
Inoltre, $AD \cong DC$.

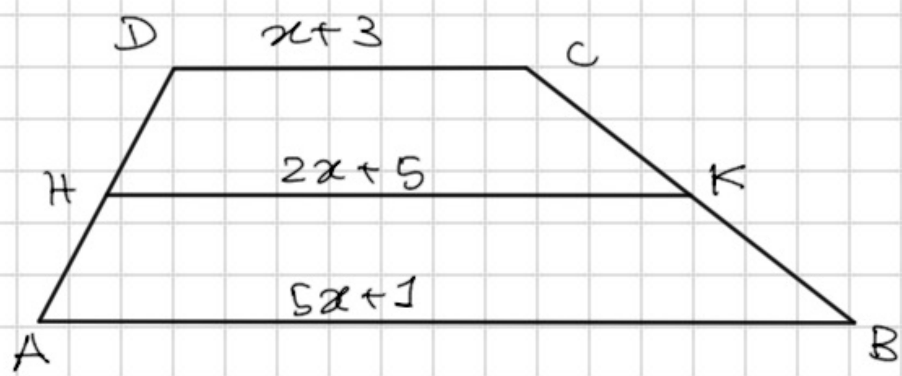
a. Dimostra che $AC \cong CB$.

b. Detto $E$ il punto di intersezione tra la bisettrice di $A\widehat{D}C$ e il lato $AB$, dimostra che $ADCE$ è un rombo ed $ECB$ è un triangolo rettangolo. [dimostra che $ADE$ è equilatero] ____ / 14

**9** C3 Dato il quadrato $ABCD$, siano $P$ un punto di $AB$ e $R$ un punto di $CD$ tali che $AP \cong CR$. Congiungi $P$ con $C$ e con $D$, e $R$ con $A$ e con $B$. Detti $Q$ il punto di intersezione tra $AR$ e $DP$, $S$ il punto di intersezione tra $BR$ e $PC$, dimostra che $SPQR$ è un parallelogramma. ____ / 10
[dimostra che $APCR$ e $PBRD$ sono due parallelogrammi]




**N. 7**




$CD = x+3$

$AB = 5x+1$

$HK = 2x+5$

$$HK = \frac{AB+CD}{2}$$

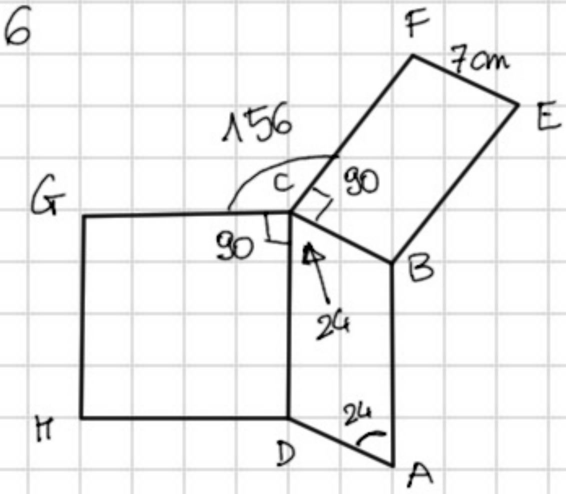
Determinare il valore di $x$.

$$2x+5 = \frac{(5x+1)+(x+3)}{2}$$

$$4x+10 = 5x+1+x+3$$

$$4x-5x-x = 1+3-10 \Rightarrow -2x = -6 \rightarrow x = 3$$

Es. n° 6




R. $\hat{A} = 24^\circ$

$\hat{B} = 156^\circ$

$2p = 44$

$$360 - (90 + 156 + 90) = 24 \longrightarrow B\hat{C}D$$

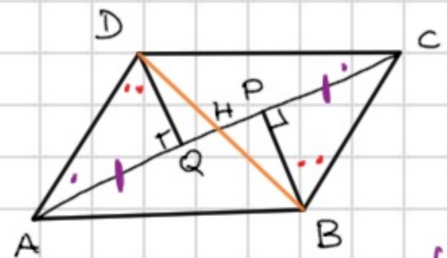
$$A\hat{D}C = A\hat{B}C = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$$

$BC = EF = 7\ cm$

$2p = 7 + 7 + 15 + 15 = 44\ cm$

$$CD = \frac{60}{4} = 15\ cm$$

Es. n° 5




Hp ABCD è un parallelogramma

$BP \perp AC$

$DQ \perp AC$

Th $AQ = PC$

$QH = HP$

Dim: Considero i triangoli ADQ e CBP: essi hanno

$AD = CB$ perché lati di un parallelogramma

$D\hat{A}Q = B\hat{C}P$ perché alterni interni formati dalle rette parallele AB e CD, tagliate dalla trasversale AC.

Sono congruenti per il secondo criterio

e in particolare avremo $AQ = PC$ c.v.d.

Le diagonali in un parallelogramma si dimezzano.

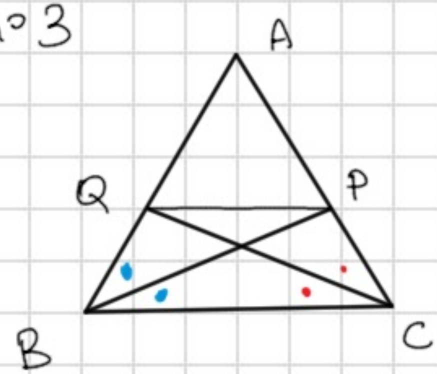
Dunque $AH = CH$

$$\cancel{AQ} + QH = \cancel{CP} + PH$$

AQ e CP sono uguali

$\Rightarrow QH = PH$

ES. n° 3




Hp $B\hat{C}Q = Q\hat{C}P$

$C\hat{B}P = P\hat{B}Q$

Th ABC è isoscele sulla base BC

QP e BC sono paralleli perché BCPQ è un trapezio quindi le coppie di angoli alterni interni sono uguali:

$B\hat{C}Q = C\hat{Q}P$ e $C\hat{B}P = B\hat{P}Q$

Inoltre, per hp $B\hat{C}Q = Q\hat{C}P$

$C\hat{B}P = P\hat{B}Q$

Per proprietà transitiva $Q\hat{C}P = C\hat{Q}P$ e $P\hat{B}Q = B\hat{P}Q$

Dunque i triangoli PQC e QBP sono isosceli con $PQ = CP$ e $PQ = BQ$. Il trapezio è isoscele dunque lo sarà anche il triangolo che lo contiene.

# LUOGO GEOMETRICO

Il luogo geometrico di una proprietà P è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di P.

P è la proprietà caratteristica del luogo.

Per poter dire che una figura è un luogo geometrico dobbiamo dimostrare che:

1- tutti i punti della figura godono della proprietà P cioè, se un punto appartiene alla figura, allora per questo è vera P.

2- solo i punti della figura godono di P, cioè se per un punto è vera la proprietà P allora il punto appartiene alla figura.

## Asse di un segmento

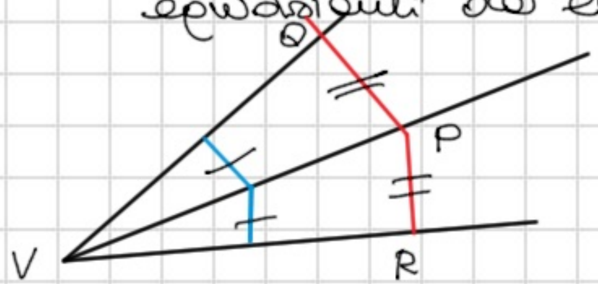
È la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio

TEOREMA: l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento

## Bisettrice di un angolo

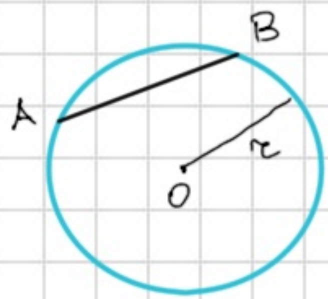
È la semiretta che divide l'angolo in due angoli uguali

TEOREMA: la bisettrice è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo



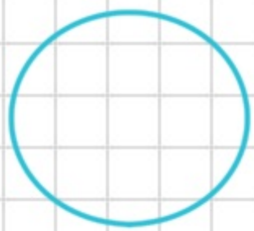
## Circonferenza

Una circonferenza di centro O e raggio r è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza r da O.




Si chiama CORDA di una circonferenza il segmento che ha due punti sulla circonferenza

Si chiama DIAMETRO la corda che passa per il centro

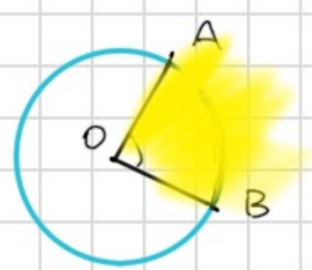


Una circonferenza è una linea chiusa che divide un piano in 3 regioni: punti interni, punti della circonferenza, punti esterni

CERCHIO insieme dei punti della circonferenza e dei punti interni ad essa.

Può anche essere definito come il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza dal centro minore o eguale al raggio della circonferenza.

ARCO la parte di una circonferenza compresa tra due suoi punti

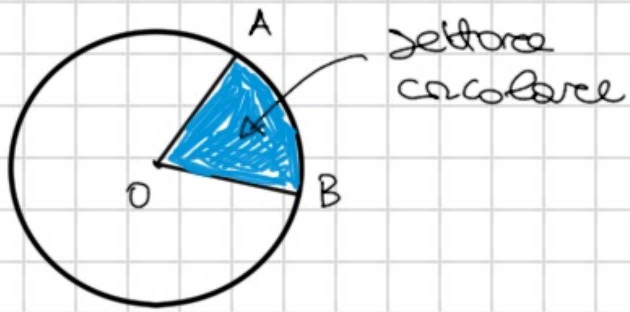



Si chiama angolo al centro l'angolo che ha il vertice nel centro di una circonferenza

Ogni angolo al centro insiste su un solo arco e, viceversa, scelto un arco, c'è un solo angolo al centro che insiste su quell'arco.

TEOREMA In una circonferenza, angoli al centro congruenti insistono su archi congruenti e viceversa, angoli al centro che insistono su archi congruenti sono congruenti.

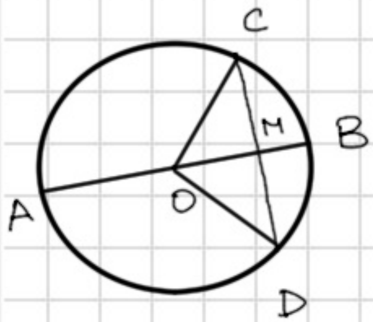
PROPRIETÀ In una circonferenza, corde congruenti sottendono archi congruenti e, viceversa, archi congruenti sono sottesi da corde congruenti.




Un settore circolare è la parte di cerchio compresa tra un arco e i due raggi che congiungono il centro con gli estremi dell'arco. (Anche i raggi e l'arco fanno parte del settore circolare)

# Diametro perpendicolare ad una corda

**TEOREMA** In una circonferenza, se un diametro e una corda sono perpendicolari, il diametro divide a metà la corda, l'angolo al centro e l'arco che le corrispondono.




**Hp** $AB$ è diametro, $CD$ corda, $AB \perp CD$.

**Th** $CM = MD$

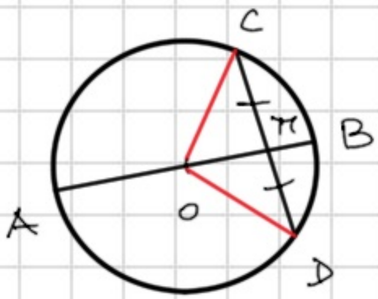
$C\hat{O}M = M\hat{O}D$

$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$

Dimostrazione: il triangolo $COD$ è isoscele perchè $CO$ e $OD$ sono raggi.
$OM$ è altezza perchè $AB \perp CD$ ma è anche mediana e dunque $CM = MD$ ed è bisettrice dunque $C\hat{O}M = M\hat{O}D$.
Infine $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$ perchè insistono su angoli al centro congruenti.

Vale anche il teorema inverso:

Se il diametro di una circonferenza passa per il punto medio di una corda, che non sia il diametro, allora la corda e il diametro sono perpendicolari



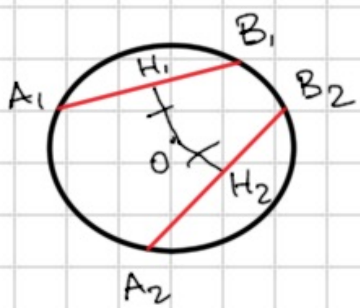

Hp: AB è diametro, CD corda
$CM = MD$

Th: $AB \perp CD$

Dimostrazione: Traccio OC e OD che sono congruenti perché raggi. OCD sarà isoscele.
$CM = MD$ per hp, quindi OM è mediana della base CD. Ma sarà anche altezza e dunque $C\hat{M}O = D\hat{M}O$ ed entrambi retti

CORDE CONGRUENTI E DISTANZA DAL CENTRO

In una circonferenza, corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro




Hp : $OH_1 \perp A_1B_1$

$OH_2 \perp A_2B_2$

$A_1B_1 = A_2B_2$

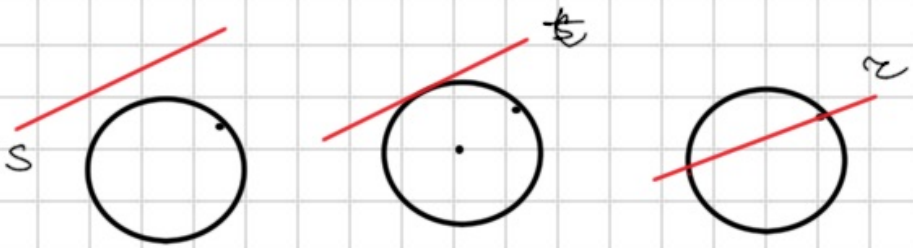
Th $OH_1 = OH_2$

Vale il teorema inverso.

In una circonferenza, corde con la stessa distanza dal centro sono congruenti.

Se le corde non sono congruenti, la corda maggiore ha distanza minore dal centro.

POSIZIONI RECIPROCHE TRA RETTA E CIRCONFERENZA

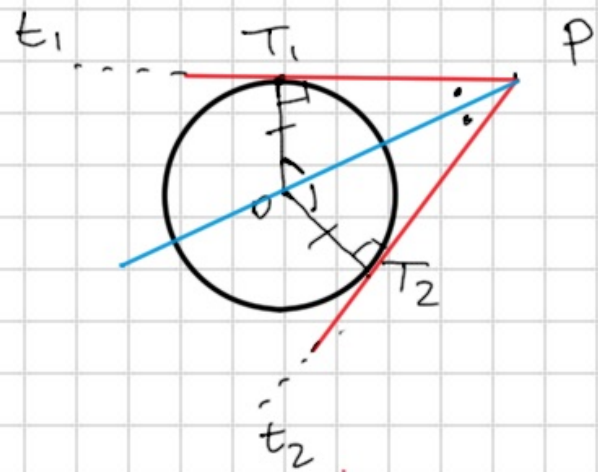



s è esterna  t è tangente  r è secante

TEOREMA (tangenti da un punto esterno)

Dato una circonferenza ed un punto esterno ad essa, tracciate da questo punto due tangenti si ha che

- i segmenti di tangenza sono congruenti e
- il segmento che congiunge il punto esterno con il centro della circonferenza è bisettrice degli angoli che si formano con i raggi.

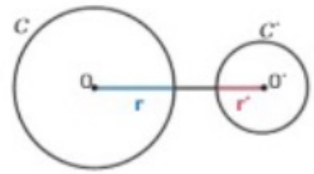
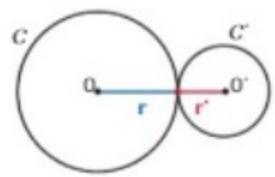
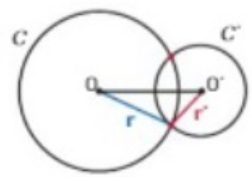
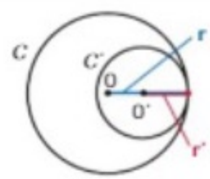
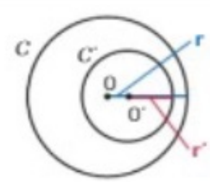



Hp: $PT_1$ e $PT_2$ sono tangenti

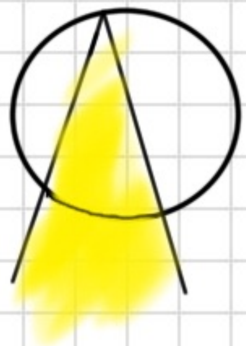
Th: $PT_1 = PT_2$

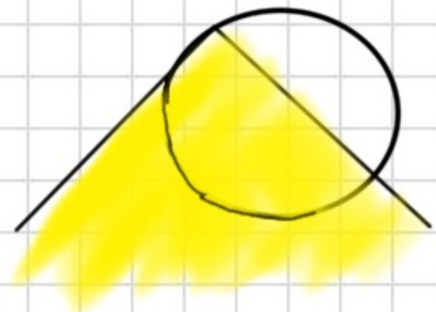
$T_1\hat{O}P = T_2\hat{O}P$

$T_1\hat{P}O = T_2\hat{P}O$

| Nome | Esempio | Caratteristiche | Distanza tra i centri |
|---|---|---|---|
| **Circonferenze esterne** |  | I punti di $C$ sono esterni a $C'$ e i punti di $C'$ sono esterni a $C$. $C$ e $C'$ non hanno punti di intersezione. | $OO' > r + r'$ |
| **Circonferenze tangenti esternamente** |  | $C$ e $C'$ hanno un solo punto in comune, detto **punto di tangenza**, e gli altri punti di $C$ sono esterni a $C'$ e viceversa. | $OO' = r + r'$ |
| **Circonferenze secanti** |  | $C$ e $C'$ hanno due punti di intersezione. | $r - r' < OO' < r + r'$ |
| **Circonferenze tangenti internamente** |  | $C$ e $C'$ hanno un solo punto in comune, detto **punto di tangenza**, e gli altri punti di $C'$ sono interni a $C$. | $OO' = r - r'$ |
| **Circonferenze una interna all'altra** |  | Tutti i punti di $C'$ sono interni a $C$. $C$ e $C'$ non hanno punti di intersezione. | $OO' < r - r'$ |

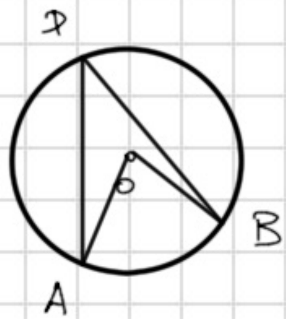
# ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA



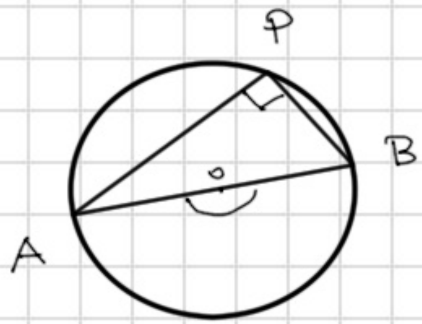


Un angolo alla circonferenza è un angolo convesso che ha il vertice sulla circonferenza e i lati o entrambi secanti oppure uno secante e uno tangente.

TEOREMA Ogni angolo al centro è il doppio di qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.




$\rightarrow \widehat{AOB} = 2\,\widehat{APB}$



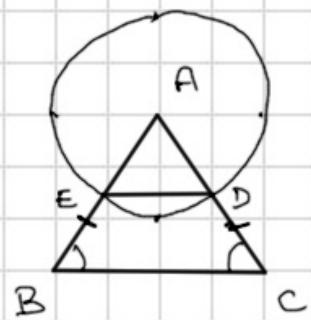

Il triangolo APB è rettangolo perché l'angolo $A\hat{P}B$ è la metà del corrispondente angolo al centro $A\hat{O}B$ (che è piatto).


Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.

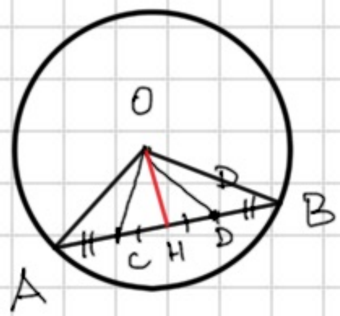
Anche angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti.

DIMOSTRAZIONE

Sono dati un triangolo isoscele ABC di base BC e una circonferenza di centro A che interseca i lati obliqui di ABC nei punti E e D. Dimostra che DEBC è un trapezio isoscele.



Considera una circonferenza di centro O e una sua corda AB. Su AB considera 2 punti C e D tali che AC = BD. Dimostra che il triangolo COD è isoscele




Hp $AC = BD$
AB corda

Th: COD è isoscele

$AH = HB$

$\cancel{AC} + CH = \cancel{BD} + DH$ per hp $AC = BD$

$\Rightarrow CH = DH$