Lezione del 29 - 05 - 2025

EQUIVALENZA DI SUPERFICI

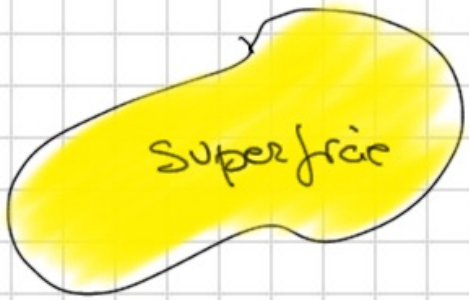


Figura piana, limitata da una linea chiusa

I concetti di superficie e di estensione li assumiamo come primitivi

Diciamo equivalenti due superfici che hanno la stessa estensione

S , T $\qquad$ $S \doteq T$

Due superfici congruenti sono equivalenti

congruenza $\Rightarrow$ equivalenza

$\not\Leftarrow$

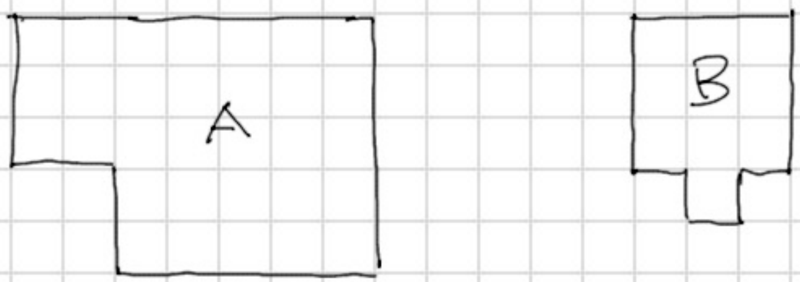
Created with Doceri

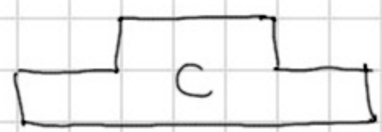
Date due superfici A e B è sempre possibile confrontarle ottenendo una sola delle seguenti relazioni

$A \doteq B$

$A < B$ (meno estesa)

$A > B$ (più estesa)





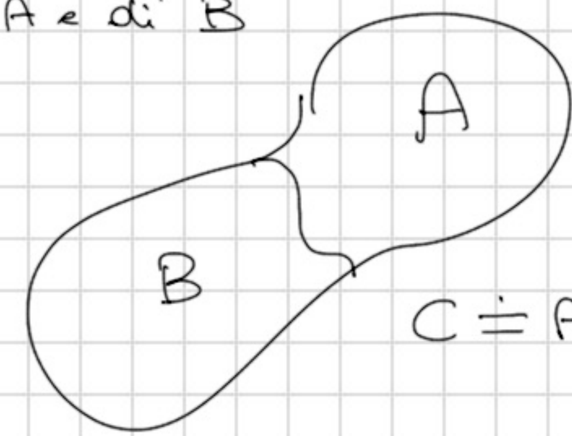
$A > B$

$B \doteq C$

$C < A$

Created with Doceri

Se due superfici A e B non hanno punti in comune o hanno per intersezione soltanto una parte del loro contorni, possono sommarsi e C è detta somma di A e di B



$C \doteq A + B$

Vale la proprietà commutativa della somma

$$A + B \doteq B + A$$

Vale la proprietà associativa

$$(A + B) + C \doteq A + (B + C)$$

Created with Doceri

Se la superficie A è la somma di K superfici (con $K>1$) equivalenti a una superficie B, diciamo che A è multiplo secondo K di B

$$A \doteq KB$$

Viceversa diciamo che B è sottomultiplo di A

$$B \doteq \frac{A}{K}$$

- Somme o differenze di superfici equivalenti sono equivalenti
- Multipli e sottomultipli secondo lo stesso numero di superfici equivalenti sono equivalenti.

Created with Doceri

Due figure somma di figure congruenti si dicono equicomposte o equiscomponibili

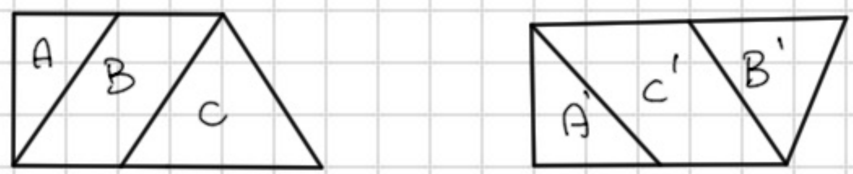


Figure equicomposte sono equivalenti.

TEOREMA Due parallelogrammi con le basi e le altezze congruenti sono equivalenti

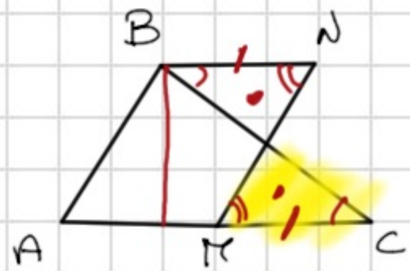
Created with Doceri

Area di un rettangolo $b \cdot h$

Area di un quadrato l^2

Area di un parallelogramma $b \cdot h$

TEOREMA: Un triangolo è equivalente a un parallelogramma che ha per altezza la stessa altezza e per base metà della base del triangolo

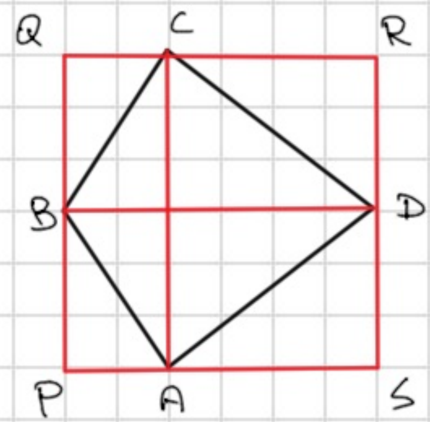


$ABC \doteq ABMN$

Due triangoli che hanno le basi e le altezze congruenti sono tra di loro equivalenti.

Created with Doceri

TEOREMA Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è equivalente alla metà del rettangolo che ha per lati le diagonali del quadrilatero.

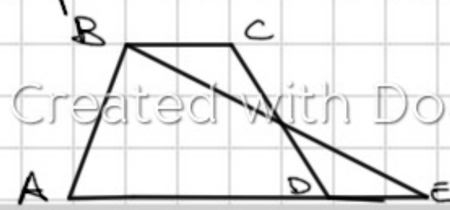


$$ABCD \doteq \frac{1}{2}\, PQRS$$

TEOREMA (equivalenza tra trapezio e triangolo)

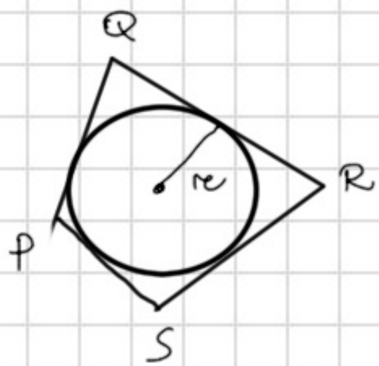
Un trapezio è equivalente a un triangolo che ha per altezza la stessa altezza e per base la somma delle basi del trapezio

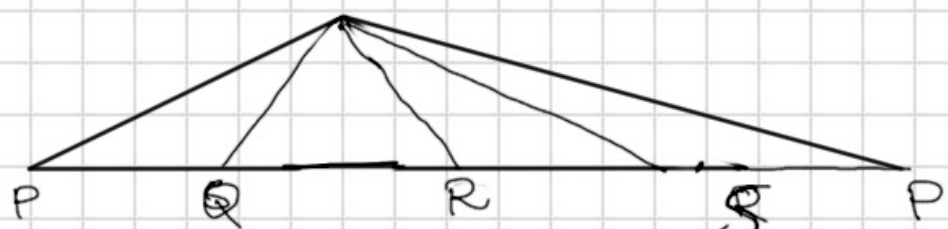
$$ABCD \doteq ABE$$



Created with Doceri

TEOREMA Un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente a un triangolo che ha ~~la~~ base congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza





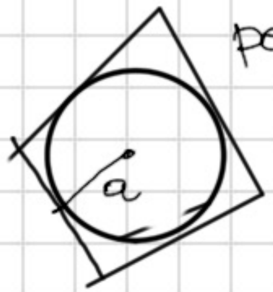
AREA Triangolo $\frac{b \cdot h}{2}$

Trapezio $\frac{(b+B)h}{2}$

Area di un quadrilatero con diagonali perpendicolari $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

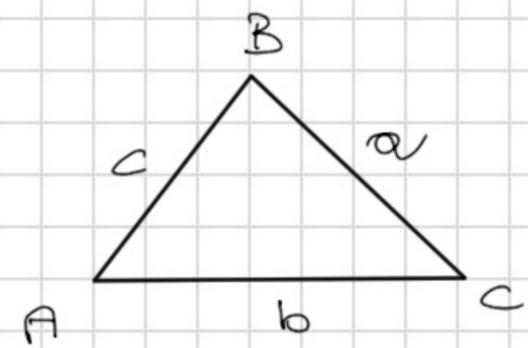
Created with Doceri

Area di un poligono circoscritto a una circonferenza è metà ~~del prodotto delle~~ misure del perimetro del poligono e del raggio della circonferenza inscritta



$$A = p \cdot a$$

Formula di Erone



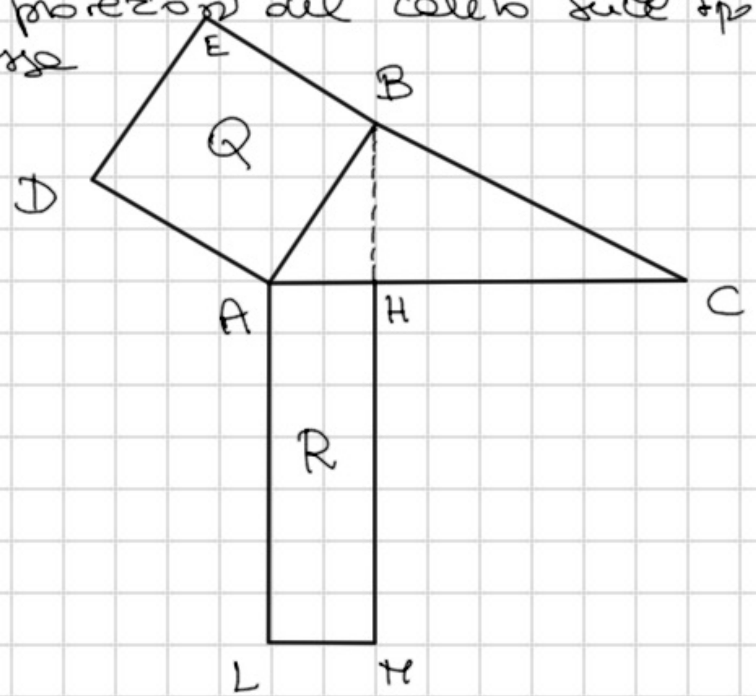
a, b, c lati
p semiperimetro

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Created with Doceri

Primo teorema di Euclide

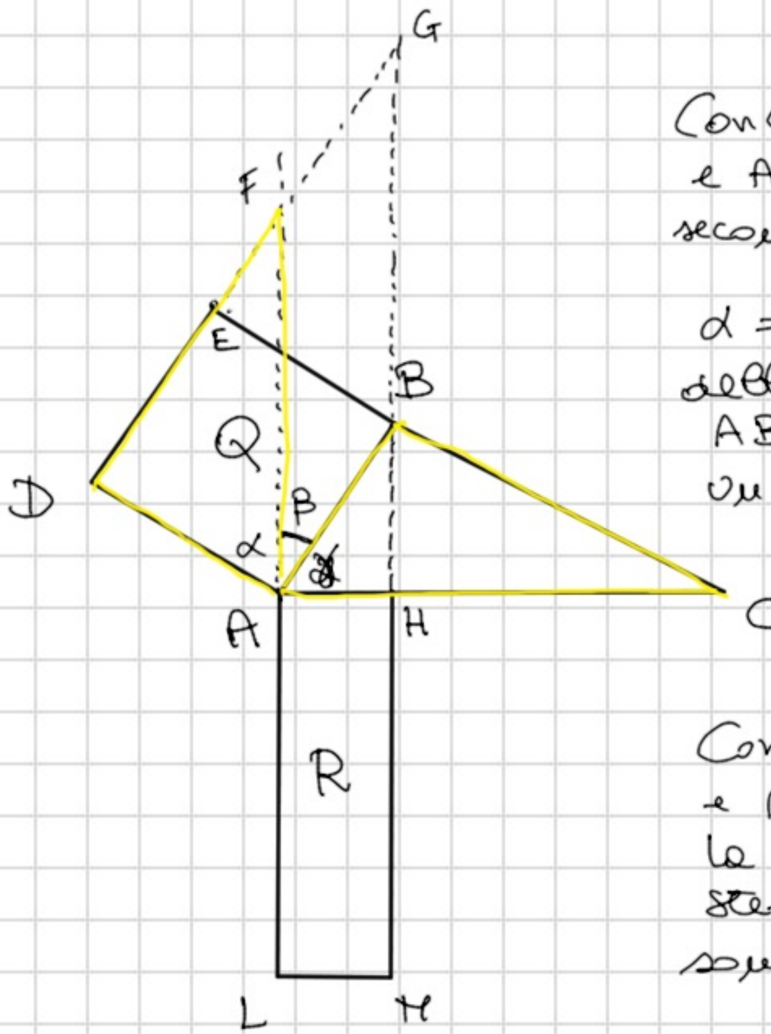
In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati la proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa



$Q \doteq R$

$HM = AC$

Created with Doceri



Considero i triangoli ABC e ADF, congruenti per il secondo criterio

$\alpha = \gamma$ perché complementari dello stesso angolo
AB = AD perché lati di un quadrato, $\hat{B} = \hat{D}$ perché retti.

Considero ora ABDE e AFGB, essi hanno la stessa base AB e la stessa altezza AD dunque sono equivalenti

Considero ora AFGB e AHML, hanno le basi congruenti e la stessa altezza $\Rightarrow$ sono equivalenti.

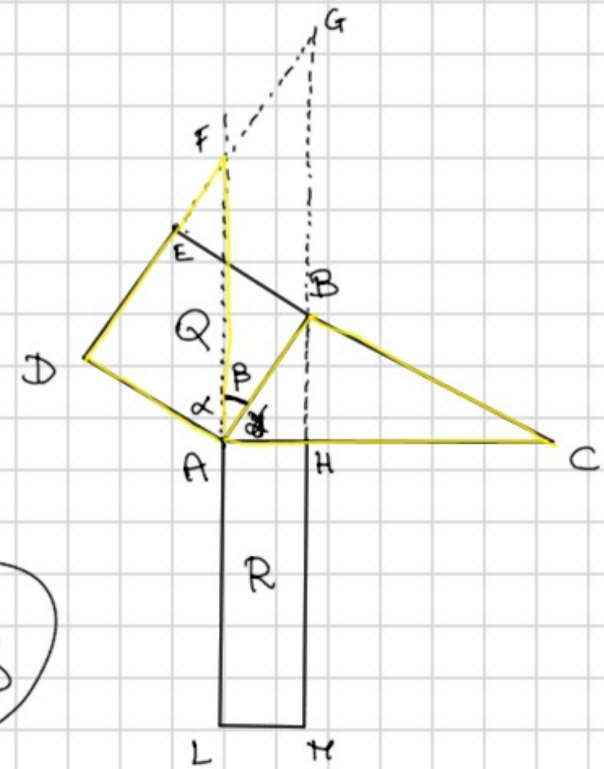
Created with Doceri

$ADEB \doteq AFGB$

$AFGB \doteq AHML$

$\Rightarrow ADEB \doteq AHML$

per proprietà transitiva



$$AB^2 = AH \cdot AC$$

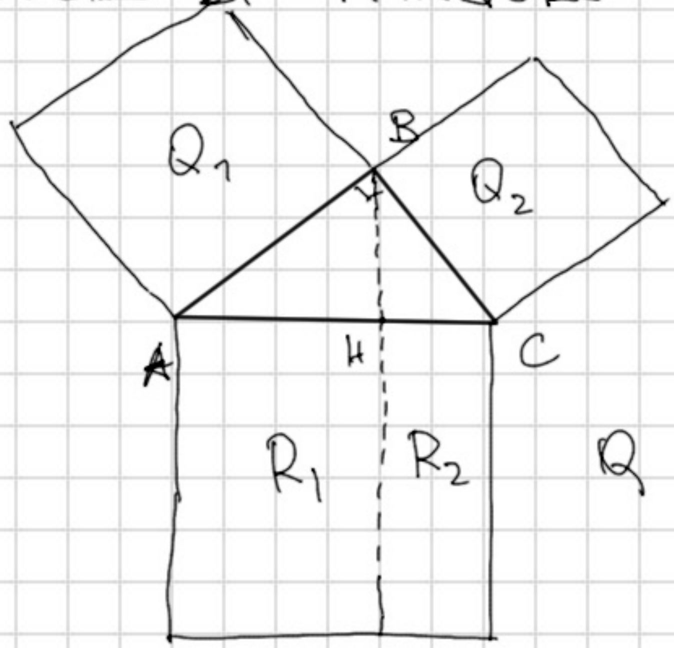
$$\underline{AH : AB = AB : AC}$$

NB

per i problemi

Created with Doceri

TEOREMA DI PITAGORA



$Q \doteq Q_1 + Q_2$

$Q = R_1 + R_2$

La dimostrazione si basa sul I teorema di euclide
sul cateto BC
e
sul cateto AB

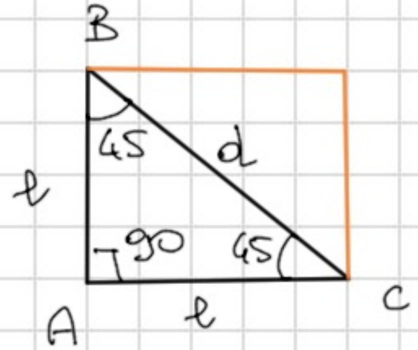
$Q_2 \doteq R_2$

$Q_1 \doteq R_1$

$Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2$ ma $R_1 + R_2 \doteq Q \Rightarrow Q_1 + Q_2 \doteq Q$

Created with Doceri

Triangoli rettangoli particolari



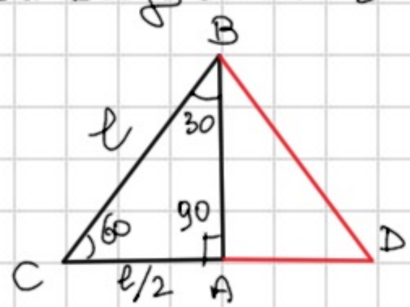
Isoscele con angoli alla base di 45°

$\overline{BC}$ = diagonale del quadrato

$$d = \overline{BC} = \ell\sqrt{2}$$

$$\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{2} d$$

Triangolo con angoli di 90°, 30°, 60°

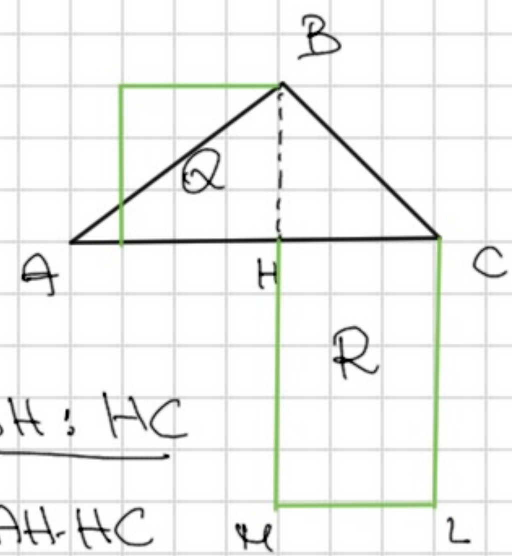


BCD è equilatero
Se è ipotenusa vale ℓ
il cateto vale ℓ/2
il cateto che si oppone a 60
vale $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$

Created with Doceri

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



$R \doteq Q$

AH

HC

$$AH : BH = BH : HC$$

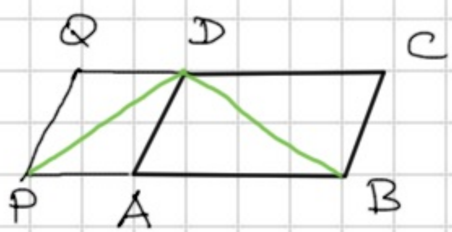
$$BH^2 = AH \cdot HC$$

N.B per i problemi

Created with Doceri

Problema n°1

Dato un parallelogramma ABCD, prolunghiamo i lati paralleli AB e CD di due segmenti congruenti AP e DQ.
Dimostriamo che il triangolo PDB è equivalente alla metà del parallelogramma PBCQ.



Hp: ABCD parallelogramma, $AP = DQ$

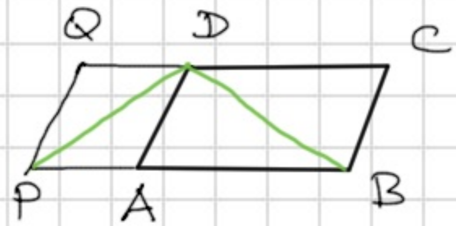
TESI: $PDB \doteq \frac{PBCQ}{2}$

Prendo i triangoli ABD DBC. Sono congruenti per il terzo criterio.
Poiché congruenti sono equivalenti $ABD \doteq DBC$

Inoltre, $ABD + DCB \doteq ABCD$

$$\Rightarrow \quad ABD \doteq \frac{ABCD}{2}$$

Created with Doceri



PADQ ha due lati AP e DQ paralleli e congruenti quindi è un parallelogramma

$$\Rightarrow \quad PAD \doteq \frac{PADQ}{2}$$

$$PDB \doteq ABD + PAD \doteq \frac{1}{2}\underbrace{ABCD}_{} + \frac{1}{2}\underbrace{PADQ}_{}$$

$$\doteq \frac{1}{2} PBCQ.$$

Created with Doceri

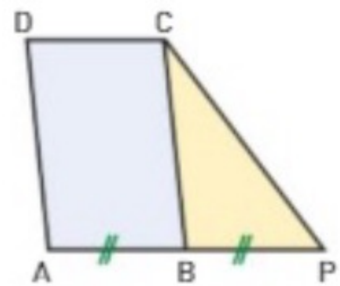
Problema 2

Nella figura, $ABCD$ è un parallelogramma e $AB \cong BP$. Dimostra che $ABCD$ è equivalente al doppio del triangolo BPC.

COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE

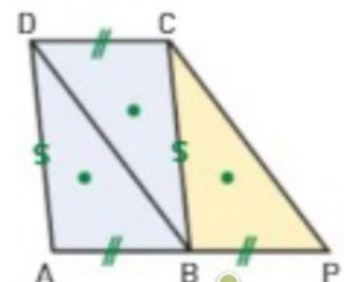
Ipotesi: $AB \parallel$ ____
$AD \parallel$ ____;
____ $\cong BP$.

Tesi: $ABCD \doteq 2BPC$.



Dimostrazione

Tracciamo la diagonale BD che divide il parallelogramma in due triangoli congruenti ABD e BCD, quindi $ABCD \doteq$ ____ $+ BCD \doteq 2ABD$.

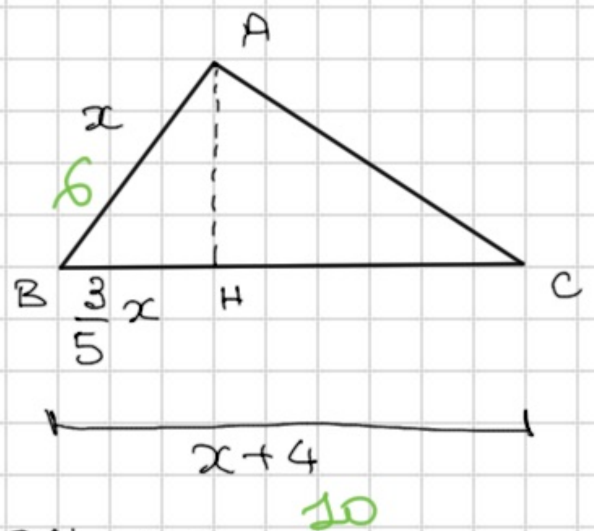


Consideriamo i triangoli ABD e BPC:
$AB \cong$ ____ per ipotesi;
$AD \cong BC$ perché lati ____ di un parallelogramma;
$D\widehat{A}B \cong C\widehat{B}P$ perché ____ dello stesso angolo $A\widehat{B}C$.
Quindi $ABD \cong$ ____ per il ____ criterio di congruenza.
Concludiamo che $ABCD \doteq 2ABD \doteq 2BPC$.

Created with Doceri

Problema 3

In un triangolo rettangolo, la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è i $\frac{3}{5}$ del cateto stesso e l'ipotenusa supera di 4 cm lo stesso cateto. Determinare il perimetro del triangolo.



$\cancel{x = 0}$

$x = -\frac{b}{a} = 6$

$AB^2 = BH \cdot BC$

$x^2 = \frac{3}{5}x(x+4) \Rightarrow x^2 = \frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x$

$5x^2 = 3x^2 + 12x$

$2x^2 - 12x = 0$

Created with Doceri

$$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

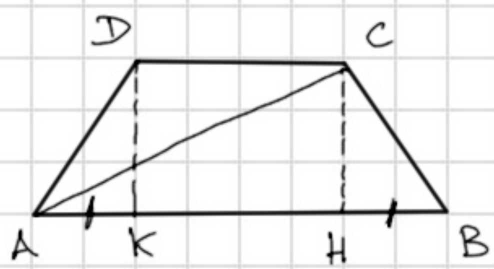
$$2p = 10 + 8 + 6 = 24$$

Ricordare: equazioni di 2° grado

Created with Doceri

Problema 4

Dimostriamo che in un trapezio isoscele la somma del rettangolo che ha per dimensioni le due basi e del quadrato costruito sul lato obliquo è equivalente al quadrato costruito sulla diagonale.



Hp Trapezio isoscele

Th $AB \cdot CD + BC^2 = AC^2$

$ACH \longrightarrow AC^2 = AH^2 + CH^2$

$BCH \longrightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$

Devo esprimere BH e AH in funzione di AB e CD

$BH = \frac{AB-CD}{2}$

$AH = AB - BH = AB - \frac{AB-CD}{2}$

$AH = \frac{2AB-AB+CD}{2} = \frac{AB+CD}{2}$

Created with Doceri

Made with Doceri

$$AC^2 = \left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 + CH^2$$

$$BC^2 = \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 + CH^2$$

$$AC^2 - BC^2 = \left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2$$

$$AC^2 - BC^2 = \left(\frac{AB+\cancel{CD}}{2} + \frac{AB-\cancel{CD}}{2}\right)\left(\frac{\cancel{AB}+CD}{2} - \frac{\cancel{AB}-CD}{2}\right)$$

$$\frac{\cancel{2}AB}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}CD}{\cancel{2}}$$

$$AC^2 - BC^2 = AB \cdot CD$$

$$AB \cdot CD + BC^2 = AC^2 \qquad \underline{\text{c.v.d}}$$

Created with Doceri