1 Punti, rette, piani nello spazio

Esercizi a pagina 1193

Gli enti fondamentali della geometria sono: il punto, la retta, il piano e lo spazio.

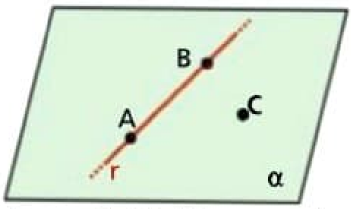
Indichiamo i punti con le lettere maiuscole A, B, C, …, le rette con le lettere minuscole a, b, c, …, i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco α, β, γ, …

Nello spazio studieremo le **figure solide**, o **solidi**, cioè le figure formate da un insieme di punti che non appartengono tutti a uno stesso piano.

Alcuni postulati dello spazio

Valgono i seguenti postulati.

1. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
2. Fissati due punti in un piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano.



3. **Postulato di partizione dello spazio.** Un qualunque piano divide l'insieme dei punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni con le seguenti proprietà.
   - Due punti qualsiasi della stessa regione sono gli estremi di un segmento che non interseca il piano.
   - Due punti qualsiasi di regioni diverse sono gli estremi di un segmento che interseca il piano in un punto.

Dato un piano, si dice **semispazio** l'insieme costituito dai punti del piano e dai punti di una delle due regioni in cui il piano divide lo spazio. Il piano si dice **origine** del semispazio.

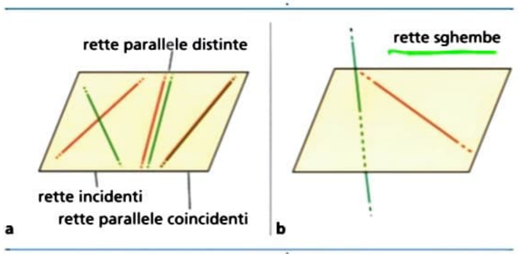
TEORIA

Posizione di due rette nello spazio

Due rette nello spazio sono **complanari** quando appartengono allo stesso piano.
Due rette complanari (figura **a**) possono essere:

- **incidenti** se si intersecano in un solo punto;
- **parallele distinte** se non si intersecano;
- **parallele coincidenti** se hanno in comune tutti i punti.

Due rette sono **sghembe** se non sono complanari (figura **b**).



Si può dimostrare che due rette sghembe non hanno punti in comune.

Ricordiamo che un **fascio proprio** di rette è l'insieme di tutte le rette complanari che passano per uno stesso punto P, detto *centro del fascio*. Un **fascio improprio** è l'insieme di tutte le rette complanari parallele tra loro.
Definiamo **stella di rette** di centro P l'insieme di tutte le rette dello spazio passanti per il punto P.

Listen to it
In Euclidean space, two lines that don't intersect are **parallel** if they are contained in a plane, or **skew** if they are not.

Rette coplanari
FASCIO PROPRIO
FASCIO IMPROPRIO

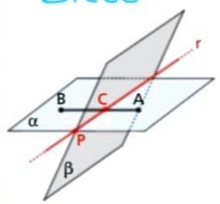
Rette qualsiasi
Stella

Posizione reciproca di due piani nello spazio

TEOREMA
Due piani distinti, che si intersecano in un punto, hanno in comune una retta che passa per quel punto.

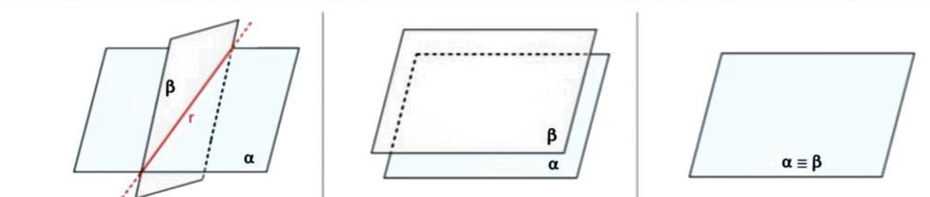
DIMOSTRAZIONE
Consideriamo due piani distinti, α e β, che si intersecano in un punto P.

1. Scegliamo due punti A e B sul piano α in regioni opposte rispetto al piano β. Per il postulato di partizione dello spazio, il segmento AB interseca il piano β in un punto C. Possiamo scegliere A e B in modo che C non coincida con P.
Il punto C appartiene anche al piano α, perché per il postulato 2 tutta la retta AB appartiene ad α.
I punti P e C appartengono a entrambi i piani, quindi la retta r passante per P e C appartiene anch'essa a entrambi i piani.
2. I due piani non possono avere altri punti in comune oltre a quelli di r. Infatti, se avessero in comune tre punti non allineati, i due piani coinciderebbero per il postulato 1, in contraddizione con l'ipotesi che i due piani siano distinti.



In conseguenza di questo teorema, due piani distinti o hanno in comune una retta o non hanno alcun punto in comune.
Due piani sono:

a. **incidenti** se sono distinti e hanno in comune una retta;
b. **paralleli distinti** se non hanno punti in comune;
c. **paralleli coincidenti** se hanno tutti i punti in comune.



a. Piani incidenti. **b.** Piani paralleli distinti. **c.** Piani paralleli coincidenti.

TEORIA

La **relazione di parallelismo** fra piani gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, come la relazione di parallelismo fra rette.

- Proprietà riflessiva: ogni piano è parallelo a se stesso ($\alpha \parallel \alpha$).
- Proprietà simmetrica: se $\alpha \parallel \beta$, anche $\beta \parallel \alpha$.
- Proprietà transitiva: se $\alpha \parallel \beta$ e $\beta \parallel \gamma$, allora $\alpha \parallel \gamma$.

Una relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva è una **relazione di equivalenza**.

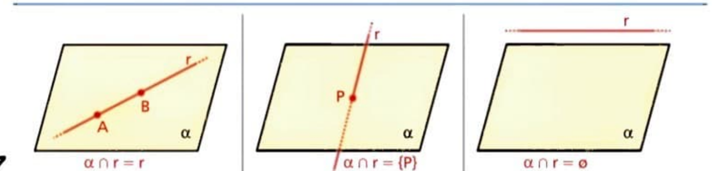
Un insieme di piani paralleli è un **fascio improprio** di piani. Un insieme di piani che hanno in comune una stessa retta r è un **fascio proprio** di piani di asse r. Un insieme di piani che passano per uno stesso punto P è una **stella di piani**.

Posizione di una retta e di un piano

Per il postulato 2, se una retta ha due punti in comune con un piano, allora giace su quel piano. Pertanto, dati una retta e un piano, sono possibili solo tre casi:

a. tutti i punti della retta appartengono al piano, ossia essa è **giacente** sul piano (o **appartenente** al piano);
b. la retta ha un solo punto in comune con il piano, ossia è **incidente** al piano;
c. la retta non ha alcun punto in comune con il piano.

Quando una retta giace su un piano, o non ha alcun punto in comune con esso, si dice che la retta è **parallela** al piano.



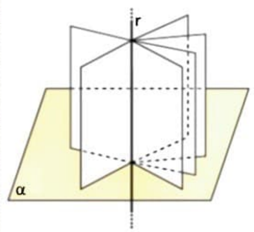
a. La retta r è giacente sul piano α. **b.** La retta r è incidente al piano α. **c.** La retta r non ha punti in comune con il piano α.

2 Perpendicolarità e parallelismo

Perpendicolarità tra retta e piano

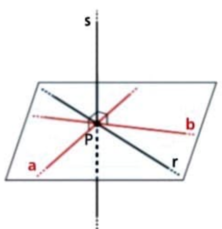
Esercizi a pagina 1194

Se appoggiamo un quaderno sul banco, come nella figura, e sfogliamo alcune pagine, possiamo osservare che ogni pagina del quaderno è appoggiata su un bordo che associamo a una retta. Tutte queste rette si trovano sul piano α e sono perpendicolari alla retta r.



La situazione vista è formalizzata in modo rigoroso da due teoremi.

TEOREMA
Se per un punto P di una retta s si mandano due rette a e b perpendicolari a s, allora s è perpendicolare a ogni altra retta r passante per P e giacente sul piano delle rette a e b.



DIMOSTRAZIONE
Consideriamo P su una retta s e due rette a e b passanti per P e perpendicolari a s; chiamiamo α il piano su cui giacciono le rette incidenti a e b. Su s prendiamo M e N in semispazi opposti rispetto ad α e tali che $PM \cong PN$.

> SEGUE

TEORIA

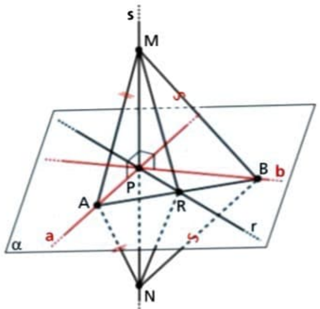
1 Disegniamo una qualunque retta $r \in \alpha$ e passante per P; prendiamo un punto A sulla retta a e un punto B sulla retta b in modo che la retta AB intersechi r nel punto R. Nel triangolo MNA il segmento AP è altezza e mediana della base MN, pertanto MNA è isoscele su tale base e quindi $AM \cong AN$. In modo simile si dimostra che MNB è isoscele e $BM \cong BN$.

2 I triangoli ABM e ABN hanno:

- AB in comune;
- $AM \cong AN$ e $BM \cong BN$.

Quindi per il terzo criterio sono congruenti e in particolare

$A\widehat{B}M \cong A\widehat{B}N$.



3 I triangoli RBM e RBN hanno:

- RB in comune;
- $R\widehat{B}M \cong R\widehat{B}N$ e $BM \cong BN$.

Pertanto sono congruenti per il primo criterio. In particolare hanno $RM \cong RN$.

4 Il triangolo MRN è dunque isoscele sulla base MN; poiché RP è mediana di MN, allora è anche altezza. Concludiamo che r è perpendicolare a s.

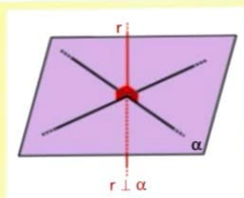
TEOREMA

Le rette perpendicolari a una retta s condotte per un suo punto P giacciono tutte nello stesso piano.

I teoremi precedenti giustificano la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Una **retta** è **perpendicolare a un piano** se è incidente al piano e perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza. Il punto di incidenza si chiama **piede** della perpendicolare. Una retta incidente ma non perpendicolare a un piano si chiama **obliqua**.



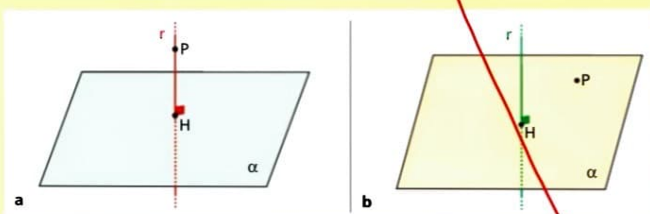
Listen to it

A line is **perpendicular** to a plane if it is perpendicular to all lines in the plane that it intersects.

Per affermare che una retta è perpendicolare a un piano, in base ai teoremi appena dimostrati, è sufficiente dimostrare che essa è perpendicolare a due qualsiasi rette del piano passanti per il punto di incidenza.

Si può dimostrare che:

- dati un piano α e un punto P, esiste ed è unica la retta r passante per P e perpendicolare ad α (figura **a**);
- dati una retta r e un punto P, esiste ed è unico il piano α perpendicolare a r e passante per P (figura **b**).



Perpendicolarità tra due rette

Nel piano, dati una retta r e un punto P, esiste una sola retta s passante per P e perpendicolare a r. Le rette r e s sono necessariamente incidenti.
Nello spazio invece, per le rette incidenti, occorre distinguere due casi.

- Se P non appartiene alla retta r, esiste un'unica retta s perpendicolare a r passante per P e incidente a r.
  Esiste infatti un solo piano che contiene P e r, e la perpendicolare s giace sul piano perché passa per P e per un punto di r.
- Se P appartiene alla retta r, esistono infinite rette passanti per P e perpendicolari e incidenti a r. Queste rette formano un fascio proprio di centro P e giacciono sul piano perpendicolare a r in P.

Esaminiamo ora il seguente teorema, che riguarda la perpendicolarità delle rette nello spazio.

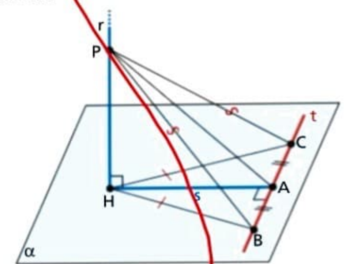
TEOREMA

Teorema delle tre perpendicolari

Se dal piede di una perpendicolare a un piano si manda la perpendicolare a una qualunque retta del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano contenente le prime due.

DIMOSTRAZIONE

Siano r una retta perpendicolare a un piano α e t una retta di α non passante per il piede H di r.
Sia s la perpendicolare condotta da H a t. Dobbiamo dimostrare che t è perpendicolare al piano individuato dalle rette r e s.
Detto A il punto di intersezione delle rette s e t, preso un generico punto P su r, dimostriamo che t è perpendicolare alla retta PA.
Consideriamo dunque sulla retta t i segmenti $AB \cong AC$ da parti opposte rispetto ad A e congiungiamo B e C con H e P.
Poiché H è sull'asse di BC, $HB \cong HC$.
I triangoli rettangoli PHB e PHC sono allora congruenti e quindi $PB \cong PC$.
Il triangolo BPC è isoscele, dunque la mediana PA è anche altezza e quindi è perpendicolare a BC, e cioè la retta PA è perpendicolare alla retta t.



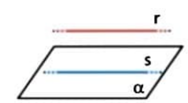
Concludiamo allora che la retta t è perpendicolare al piano individuato da PA e HA, e cioè al piano formato dalle rette r e s.

Ci occuperemo della perpendicolarità tra piani nel prossimo paragrafo.

Parallelismo tra retta e piano

Esercizi a pagina **1195**

Abbiamo già detto che una retta e un piano sono paralleli se la retta giace sul piano o se non hanno punti in comune. Per verificare se una retta r è parallela a un piano α è sufficiente verificare che r sia parallela a una retta s che appartiene al piano, grazie al seguente teorema.

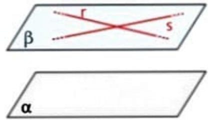


TEOREMA

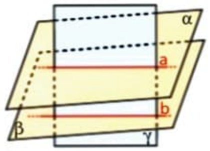
Dati una retta r e un piano α, se r è parallela a una retta s giacente su α, allora r è parallela ad α.

Si possono inoltre dimostrare le proprietà nella pagina seguente.

- Data una retta r parallela a un piano α, ogni altro piano non parallelo ad α e contenente r interseca il piano α in una retta s, parallela a r.
- Se due rette incidenti r e s sono parallele al piano α, allora il piano β che r e s individuano è parallelo ad α (figura **a**).
- Le intersezioni tra un piano e due piani paralleli sono rette parallele (figura **b**).
- Dati un piano α e un punto P non appartenente ad α, esiste ed è unico il piano β passante per P e parallelo ad α.
- Due rette parallele a una terza retta sono parallele tra loro.



a

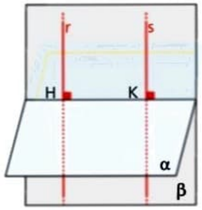


b

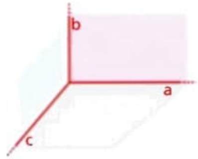
Perpendicolarità e parallelismo

Per la perpendicolarità e il parallelismo di rette, si può dimostrare che:

- due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele fra loro;
- se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.

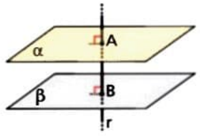


A differenza di quanto accade nella geometria del piano, nello spazio **non** è vero che due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele.
Nella figura a destra, $a \perp b$ e $b \perp c$, ma non è vero che $a \parallel c$.



Per la perpendicolarità e il parallelismo di piani, si può dimostrare che:

- se due piani sono perpendicolari a una stessa retta in punti distinti, allora sono paralleli;
- se due piani sono paralleli, allora ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare anche all'altro.



PROVA SUBITO

Rette perpendicolari

Due rette perpendicolari a una stessa retta possono essere parallele?
E sghembe? Disegna degli esempi.

Teorema di Talete nello spazio

Il teorema di Talete visto nel piano si può generalizzare nello spazio al caso di un insieme di piani paralleli e due rette **trasversali**, cioè due rette non parallele ai piani che quindi li intersecano tutti.

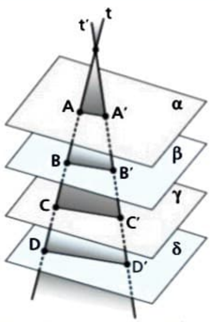
TEOREMA

Teorema di Talete nello spazio

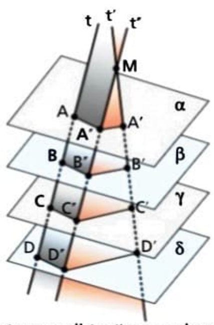
Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.

DIMOSTRAZIONE

Si possono presentare due casi.



a. Le trasversali t e t' sono complanari.



b. Le trasversali t e t' sono sghembe.

$AB : BC = A'B' : B'C'$

1 **Primo caso:** t e t' sono complanari (figura **a** nella pagina precedente).
Il piano delle rette t e t' interseca i piani del fascio formando il fascio di rette parallele $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \ldots$ di cui t e t' sono trasversali, quindi per il teorema di Talete nel piano:

$$AB : BC = A'B' : B'C', \quad AC : BC = A'C' : B'C', \ldots$$

2 **Secondo caso:** t e t' sono sghembe (figura **b** nella pagina precedente).
Per un punto M di t' tracciamo la retta t'' parallela a t e chiamiamo A'', B'', C'', … le corrispondenti intersezioni con i piani α, β, γ, … Otteniamo i parallelogrammi $ABB''A''$, $ACC''A''$, $BCC''B''$, …, quindi $AB \cong A''B''$, $AC \cong A''C''$, $BC \cong B''C''$, … Alle trasversali t', t'' possiamo applicare il teorema di Talete nel piano:

$$A''B'' : B''C'' = A'B' : B'C', \quad A''C'' : B''C'' = A'C' : B'C', \ldots$$

Sostituendo $A''B''$ con AB, $A''C''$ con AC, …, deduciamo le proporzioni:

$$AB : BC = A'B' : B'C', \quad AC : BC = A'C' : B'C', \ldots$$

Il teorema è pertanto dimostrato.

In particolare, dati due piani paralleli e due rette parallele che li intersecano, i segmenti paralleli appartenenti alle rette e compresi fra i piani sono congruenti.

3 Distanze e angoli nello spazio

Distanze nello spazio

Esercizi a pagina **1196**

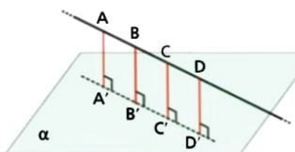
Distanza di un punto da un piano

Se da un punto P mandiamo la perpendicolare a un piano α, l'intersezione H della retta con il piano è la **proiezione ortogonale** di P su α.

Dati un piano e un punto, definiamo la **distanza del punto dal piano** come la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e la proiezione ortogonale del punto sul piano. Nella figura, PH è la distanza di P da α. Se il punto P appartiene al piano, la distanza è nulla.
Osserviamo che la distanza di un punto P da un piano è sempre minore della distanza di P da qualsiasi altro punto del piano diverso dalla proiezione di P. Nella figura, $PH < PM$.
Se proiettiamo tutti i punti di una figura $\mathcal{F}$ sul piano α, otteniamo la proiezione $\mathcal{F}'$ di $\mathcal{F}$. In particolare la **proiezione di una retta** su un piano è una retta, a meno che la retta non sia perpendicolare al piano α (in tal caso la sua proiezione si riduce a un punto).

Distanza tra retta e piano paralleli

Se una retta è parallela a un piano, tutti i suoi punti sono *equidistanti* dal piano stesso: tale distanza si chiama **distanza della retta dal piano**.

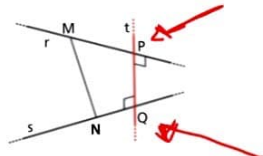


$AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD' \cong \ldots$

TEORIA

Distanza tra due rette sghembe

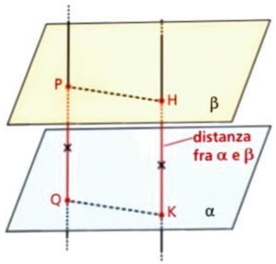
Date due rette sghembe, si può dimostrare che esiste sempre un'*unica retta perpendicolare* a entrambe. La **distanza fra due rette sghembe** è la lunghezza del segmento più corto che congiunge un punto di una retta con un punto dell'altra. Tale segmento è l'intersezione dell'unica perpendicolare alle due rette con le rette stesse.



$PQ < MN$

Distanza tra due piani paralleli

Abbiamo detto che, dati due piani paralleli, una retta perpendicolare a uno di essi è perpendicolare anche all'altro. Inoltre, comunque si scelgano due rette perpendicolari a due piani paralleli, il segmento intercettato dai due piani sull'una è congruente a quello intercettato sull'altra. Definiamo allora la **distanza fra due piani paralleli** come la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta a essi perpendicolare.

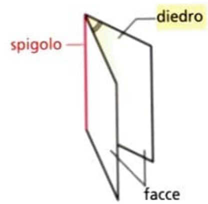


Diedri e piani perpendicolari

Esercizi a pagina 1197

Introduciamo il concetto di diedro, che estende allo spazio il concetto di angolo nel piano e che ci servirà per definire la perpendicolarità fra piani.

DEFINIZIONE
Dati nello spazio due semipiani aventi la stessa retta origine, chiamiamo **diedro** ognuna delle due parti (compresi i semipiani) in cui essi dividono lo spazio.

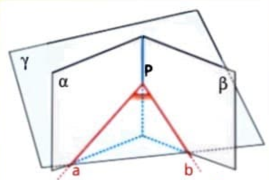


La retta origine dei semipiani si chiama **spigolo** del diedro e i semipiani si chiamano **facce** del diedro.

Due semipiani non complanari, aventi la stessa retta origine, individuano sempre due diedri, uno **concavo** e uno **convesso**.

Listen to it
Two half-planes, called **sides**, emanating from the same line, called the **edge**, divide the space into two **dihedral angles**.

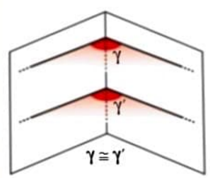
DEFINIZIONE
Una **sezione di un diedro** è l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano non parallelo allo spigolo che interseca il suo spigolo.



sezione del diedro: $a\hat{P}b$

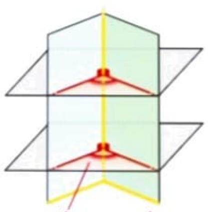
Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA
Sezioni parallele di uno stesso diedro sono congruenti.



Una conseguenza del teorema è che se intersechiamo un diedro con piani perpendicolari allo spigolo, gli angoli che otteniamo sui piani sono congruenti fra loro (figura a lato).

Chiamiamo **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano perpendicolare al suo spigolo.



sezione normale

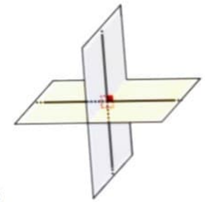
DEFINIZIONE
Chiamiamo **ampiezza** di un diedro l'ampiezza della sua sezione normale; un diedro si dice **retto**, **acuto** o **ottuso** a seconda che la sua sezione normale sia un angolo retto, acuto o ottuso.

Listen to it
According to the size of its **normal sections**, a dihedral angle can be **right**, **acute** or **obtuse**.

Si dimostra che **due diedri sono congruenti se e solo se sono congruenti le loro sezioni normali.**

Possiamo ora dare nello spazio la definizione di piani perpendicolari, analoga alla definizione di rette perpendicolari nel piano.

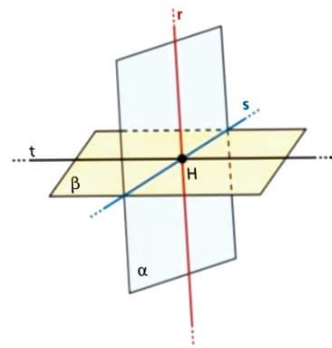
DEFINIZIONE
Due **piani** incidenti sono **perpendicolari** quando dividono lo spazio in quattro diedri retti.



Per verificare se due piani sono perpendicolari, basta trovare una retta dell'uno che sia perpendicolare all'altro, grazie al seguente teorema.

TEOREMA
Se una retta contenuta in un piano α è perpendicolare a un piano β, allora i due piani α e β sono perpendicolari.

DIMOSTRAZIONE
Sia r la retta di α perpendicolare a β nel punto H.
Tracciamo la retta s, intersezione dei piani α e β, e la retta t giacente su β e perpendicolare in H a s.
Poiché s è perpendicolare sia a r, per ipotesi, sia a t, per costruzione, allora s è perpendicolare al piano individuato dalle rette r e t. Quindi il piano rt individua una sezione normale del diedro formato da α e β. Inoltre la retta r, essendo perpendicolare a tutte le rette di β passanti per H, è perpendicolare anche a t, quindi le sezioni normali individuate dal piano rt sono quattro angoli retti. Concludiamo che i piani α e β sono tra loro perpendicolari.



Enunciamo infine il seguente teorema, senza dimostrarlo.

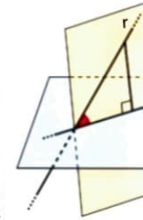
TEOREMA
Dati un piano α e una retta r non perpendicolare ad α, esiste ed è unico il piano passante per r e perpendicolare ad α.

Angolo di una retta con un piano

Esercizi a pagina 1198

Sia r una retta incidente e non perpendicolare al piano α: un piano generico, che passa per r, interseca α in un'altra retta. Si dimostra che l'angolo formato dalle due rette dipende dalla scelta del piano variabile e risulta minimo quando il piano è perpendicolare ad α. Questo giustifica la seguente definizione.

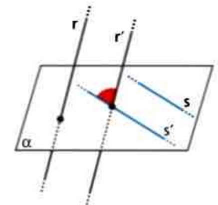
DEFINIZIONE
Data una retta r incidente e non perpendicolare a un piano α, l'**angolo della retta con il piano** è l'angolo acuto formato da r e dalla sua proiezione r' su α.



Se la retta r è perpendicolare al piano α, ogni piano passante per r interseca α in una retta perpendicolare a r. Allora l'angolo che r forma con α è un angolo retto.

Angolo tra due rette sghembe

L'**angolo formato da due rette sghembe**, r e s, è l'angolo formato dalle rette incidenti r' e s', parallele rispettivamente a r e s.
Se l'angolo formato da due rette sghembe è retto, diciamo che le rette sono *perpendicolari*.



4 Trasformazioni geometriche

NO

Esercizi a pagina 1200

Per lo studio delle trasformazioni geometriche nello spazio, il percorso è analogo a quello seguito nel piano e molti concetti non sono altro che la traduzione in tre dimensioni di quelli introdotti precedentemente.
Una trasformazione geometrica nello spazio è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto P dello spazio uno e un solo punto P' dello spazio stesso. In particolare, in una trasformazione geometrica:

- i **punti uniti** sono i punti che coincidono con i loro corrispondenti;
- la **figure unite** sono le figure che vengono trasformate in loro stesse.

Listen to it
In a **geometric transformation**, a **fixed point** is a point that is its own image under transformation.

Isometrie

Le isometrie nello spazio, come nel piano, sono trasformazioni che **conservano le distanze tra coppie di punti corrispondenti**. Due figure che si corrispondono in un'isometria sono congruenti. Le isometrie sono anche chiamate *movimenti rigidi*. Un movimento rigido si dice diretto o inverso a seconda che gli orientamenti delle figure siano conservati o meno.

DEFINIZIONE
Due figure solide sono **congruenti** quando hanno tutte le caratteristiche geometriche tra loro congruenti, ossia quando hanno lati, angoli, spigoli, facce, diedri corrispondenti congruenti. Se inoltre possono essere sovrapposte, mediante un movimento rigido diretto, si dicono **direttamente congruenti**; altrimenti, se il movimento rigido è inverso si dicono **inversamente congruenti**.

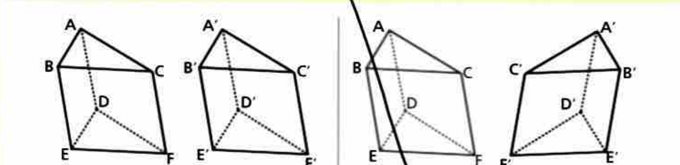


Figure direttamente congruenti | **Figure inversamente congruenti**

Le isometrie nello spazio godono delle seguenti proprietà:

- trasformano segmenti in segmenti, rette in rette, piani in piani;
- conservano il parallelismo;
- trasformano rette incidenti in rette incidenti, piani incidenti in piani incidenti;
- trasformano ogni angolo in un angolo congruente.

Traslazione

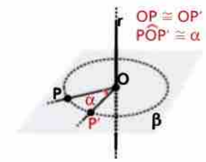
Fissato nello spazio un vettore $\vec{v}$, la **traslazione di vettore $\vec{v}$** è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è uguale a $\vec{v}$.

- In una traslazione, la figura trasformata è direttamente congruente alla figura data.
- Le traslazioni conservano le direzioni delle rette e le *giaciture* dei piani, cioè trasformano una retta in una retta parallela a quella data e trasformano un piano in un piano parallelo a quello dato.

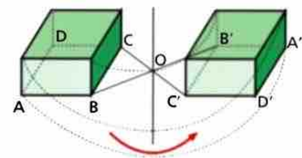
Rotazione

Fissati nello spazio una retta r e un angolo orientato α, la **rotazione di asse r e angolo α** è quella trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di r fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente a r, fa corrispondere il punto P' tale che:
   - P' appartiene al piano β passante per P e perpendicolare alla retta r;
   - detto O il punto di intersezione di r con β, $OP' \cong OP$ e $P\widehat{O}P' \cong \alpha$, con la stessa orientazione di α.



In una rotazione, la figura trasformata è direttamente congruente alla figura data.

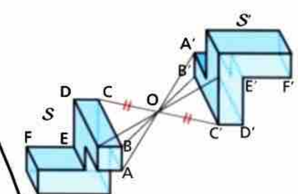


Simmetria centrale

Fissato nello spazio un punto O, la **simmetria centrale di centro O** è la trasformazione geometrica che:

1. al punto O fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P diverso da O fa corrispondere il punto P' tale che il segmento PP' abbia O come punto medio.

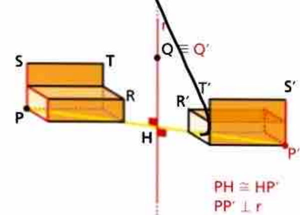
- Due solidi che si corrispondono mediante una simmetria centrale di centro O sono, in genere, inversamente congruenti.
- Come le traslazioni, anche le simmetrie centrali conservano le direzioni delle rette e le giaciture dei piani.
- Un punto dello spazio è **centro di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria centrale che ha come centro quel punto.



Simmetria assiale

Fissata una retta r nello spazio, la **simmetria assiale di asse r** è la trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di r fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente a r, fa corrispondere il punto P', diverso da P, tale che:
   - la retta PP' è perpendicolare e incidente a r;
   - le distanze di P e di P' da r sono congruenti.



TEORIA

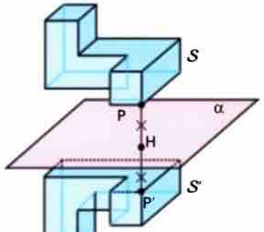
- La figura trasformata in una simmetria assiale è direttamente congruente alla figura data.
- Una retta dello spazio è **asse di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria che ha per asse quella retta.

PROVA SUBITO
Simmetria assiale
Individua punti, rette e piani uniti per una simmetria assiale di asse r.

Simmetria rispetto a un piano

Fissato un piano α nello spazio, la **simmetria rispetto al piano α** è quella trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di α fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente ad α, fa corrispondere il punto P', diverso da P, tale che:
   - la retta PP' è perpendicolare ad α;
   - le distanze di P e P' da α sono congruenti.



Il piano α è chiamato **piano di simmetria**.

- Due figure solide che si corrispondono mediante una simmetria rispetto a un piano sono, in genere, inversamente congruenti.
- Un piano dello spazio è **piano di simmetria di una figura** se la figura è unita rispetto alla simmetria che ha per piano di simmetria quel piano.

Listen to it
A solid figure which has a **plane of symmetry** is called **mirror symmetric**.

PROVA SUBITO
Simmetria rispetto a un piano
Individua punti, rette e piani uniti per una simmetria rispetto al piano α.

Composizione di due trasformazioni

È possibile comporre due trasformazioni geometriche anche nello spazio. Per esempio, applichiamo a un solido $\mathcal{F}$ una trasformazione t_1 e al solido corrispondente $\mathcal{F}'$ una trasformazione t_2, che trasforma $\mathcal{F}'$ in $\mathcal{F}''$. Per ottenere direttamente il solido $\mathcal{F}''$ dobbiamo applicare a $\mathcal{F}$ la trasformazione composta $t_2 \circ t_1$:

$$\mathcal{F} \xrightarrow{t_2 \circ t_1} \mathcal{F}''.$$

Si dimostra che ogni isometria dello spazio si può ottenere componendo al più quattro simmetrie rispetto a opportuni piani.

Omotetia e similitudini

Anche nello spazio si possono considerare le omotetie e le similitudini, che godono di tutte le proprietà già esaminate nel piano.

5 Poliedri

Esercizi a pagina 1201

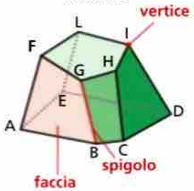
DEFINIZIONE
Un **poliedro** è una figura solida, limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni poligono non attraversi il solido.

I poligoni sono detti facce del poliedro, i lati dei poligoni **spigoli** del poliedro, i vertici dei poligoni vertici del poliedro.

Chiamiamo **diagonali** di un poliedro i segmenti che congiungono due vertici non situati sulla stessa faccia.

Un poliedro ha almeno quattro facce. Il **tetraedro** è il poliedro a quattro facce. **Pentaedro**, **esaedro**, **ottaedro**, **dodecaedro** sono poliedri che hanno rispettivamente 5, 6, 8, 12 facce.

Poliedro



Listen to it
A **polyhedron** is a solid with polygonal **faces** and straight **edges** which meet at **vertices**.

TEORIA

Vale il seguente teorema.

TEOREMA
Relazione di Eulero
Detti F, S e V, rispettivamente, il numero delle facce, quello degli spigoli e quello dei vertici di un poliedro, allora:

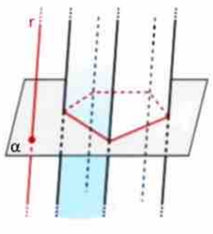
$$F + V - S = 2.$$

Descriviamo ora le principali proprietà di due poliedri: il prisma e la piramide.

Prismi

DEFINIZIONE
Dati un poligono e una retta r non appartenente al piano del poligono, la figura costituita dall'insieme delle rette parallele a r e passanti per i punti del poligono si chiama **prisma indefinito**.

Prisma indefinito

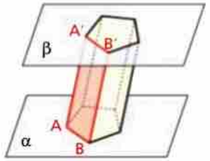


Le rette parallele a r passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** del prisma indefinito.

DEFINIZIONE
Un **prisma definito**, o semplicemente **prisma**, è un poliedro costituito dalla parte di prisma indefinito compresa fra due piani paralleli che lo intersecano.

TEOREMA
Le intersezioni fra i piani paralleli e il prisma indefinito sono poligoni congruenti.

Prisma



DIMOSTRAZIONE
Siano A e B due vertici consecutivi del poligono appartenente al piano α (figura a lato). Lo spigolo del prisma indefinito passante per A interseca il piano β parallelo al piano α nel punto A' e lo spigolo passante per B interseca β in B'. Il quadrilatero $ABB'A'$ ha i lati AA' e BB':

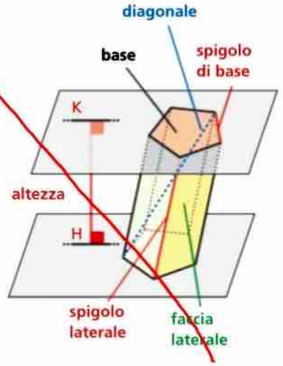
- paralleli, perché appartenenti a spigoli del prisma indefinito;
- congruenti, perché segmenti paralleli compresi fra piani paralleli.

Quindi $ABB'A'$ è un parallelogramma, pertanto $AB \parallel A'B'$ e $AB \cong A'B'$.
Analogamente si dimostra che ogni coppia di lati che si corrispondono nei due poligoni individuati nei piani α e β è costituita da segmenti congruenti e paralleli. Pertanto i due poligoni sono congruenti.

Le intersezioni fra i piani paralleli e il prisma indefinito sono dette **basi** del prisma. Gli altri poligoni che delimitano il prisma sono detti **facce laterali** e sono tanti parallelogrammi quanti sono i lati dei poligoni di base.

La distanza fra i due piani paralleli è l'**altezza** del prisma.
Ogni lato di base si chiama anche **spigolo di base**, gli altri lati dei parallelogrammi si chiamano **spigoli laterali**.

I vertici dei poligoni vengono anche detti **vertici** del prisma.



Le **diagonali** di un prisma sono quei segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

I prismi possono essere classificati mediante i poligoni di base.

Se la base è un esagono, il prisma si dice *esagonale*; se è un triangolo, *triangolare* e così via.

Prismi retti

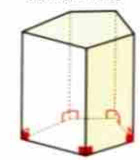
DEFINIZIONE
Un **prisma** è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

In un prisma retto le facce laterali sono dei rettangoli e l'altezza coincide con gli spigoli laterali.

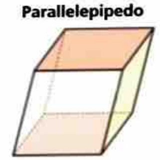
Un prisma retto si dice **regolare** quando le sue basi sono poligoni regolari.

PROVA SUBITO
Prismi
Quante diagonali ha un prisma quadrangolare? E un prisma triangolare?

Prisma retto



Parallelepipedo



Parallelepipedi

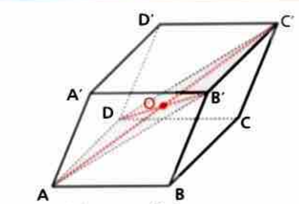
DEFINIZIONE
Un **parallelepipedo** è un prisma le cui basi sono parallelogrammi.

Si possono dimostrare i seguenti teoremi.

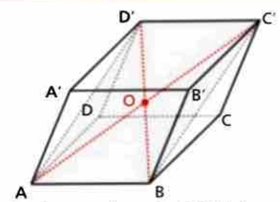
TEOREMA
Le facce opposte di un parallelepipedo, ossia quelle che non hanno vertici in comune, sono congruenti e parallele.

TEOREMA
Le diagonali di un parallelepipedo si intersecano nel loro punto medio.

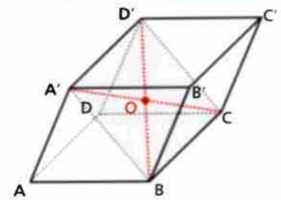
DIMOSTRAZIONE



a. $ADC'B'$ è un parallelogramma perché ha i lati opposti congruenti e paralleli, quindi le diagonali AC' e DB' si incontrano nel loro punto medio O.



b. Analogamente anche $ABC'D'$ è un parallelogramma e le sue diagonali AC' e $D'B$ si incontrano nel loro punto medio, che è O in quanto la diagonale AC' è la stessa diagonale considerata nel caso a e il punto medio di un segmento è unico.



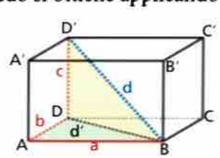
c. Anche $A'D'CB$ è un parallelogramma; le diagonali $A'C$ e $D'B$ si incontrano nel loro punto medio, che è O in quanto la diagonale $D'B$ è la stessa diagonale considerata nel caso **b**.

DEFINIZIONE
Un **parallelepipedo rettangolo** è un parallelepipedo retto in cui le basi sono rettangoli.

Listen to it
A rectangular parallelepiped is also called a **cuboid**.

Le lunghezze dei tre spigoli uscenti da uno stesso vertice sono le **dimensioni** del parallelepipedo e le indichiamo con a, b e c.

In un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti. La relazione fra la loro misura e quella delle tre dimensioni del parallelepipedo si ottiene applicando due volte il teorema di Pitagora. Osserviamo la figura a lato, dove d è la misura della diagonale del parallelepipedo e d' è la misura della diagonale di base. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD, si ottiene $d'^2 = a^2 + b^2$ e, applicando il teorema di Pitagora al triangolo DBD': $d^2 = d'^2 + c^2$.



DIAGONALE

Sostituendo l'espressione di d'^2 ottenuta prima, si ricava:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

T. di Pitagora nello spazio

DEFINIZIONE
Un **cubo** è un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni congruenti.

Le sei facce del cubo sono quadrati congruenti.
Dette s la misura dello spigolo del cubo e d quella della diagonale, abbiamo:

$$d = s\sqrt{3}.$$

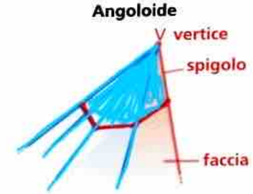
Piramidi

Angoloide e triedro

DEFINIZIONE
Consideriamo un poligono convesso e un punto V non appartenente al suo piano. Chiamiamo **angoloide** il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.

Le semirette passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** dell'angoloide, l'origine V è il **vertice** dell'angoloide, gli angoli di vertice V e lati due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide. Gli angoloidi sono figure convesse.

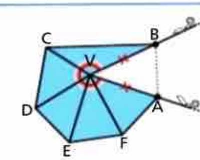
Angoloide



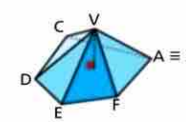
DEFINIZIONE
Un **triedro** è un angoloide con tre spigoli.

Enunciamo alcune proprietà senza darne la dimostrazione.

- In ogni *angoloide* di vertice V, la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.



a. Disegniamo su un foglio alcuni triangoli che abbiano tutti in comune un vertice V e abbiano, a due a due, un lato in comune. Facciamo in modo che uno di questi triangoli sia isoscele, come AVB in figura. Ritagliamo la figura lungo il perimetro $ABCDEF$, poi ritagliamo i lati VA e VB.



b. Se facciamo coincidere VA e VB otteniamo un angoloide. Osserviamo che la somma degli angoli in V dei triangoli facce dell'angoloide è minore di un angolo giro. Se tale somma fosse un angolo giro, il vertice V apparterrebbe al piano su cui è contenuto il poligono di base.

- In ogni *angoloide* l'angolo di una faccia è minore della somma degli angoli delle rimanenti.
- In ogni *triedro* l'angolo di una faccia è maggiore della differenza degli angoli delle altre due.

Piramide

DEFINIZIONE
Una **piramide** è la parte di angoloide compresa fra il suo vertice e un piano che interseca tutti i suoi spigoli.

TEORIA

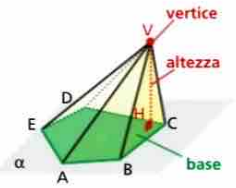
Il poligono intersezione fra il piano e l'angoloide si chiama **base** della piramide, il vertice dell'angoloide **vertice** della piramide.

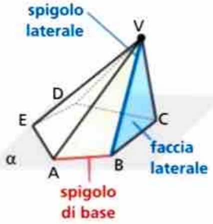
La distanza fra il vertice e il piano di base è l'**altezza** della piramide.

La piramide è delimitata, oltre che dalla base, da triangoli detti **facce laterali**.

Ogni lato della base si chiama anche **spigolo** di base, gli altri lati dei triangoli si chiamano **spigoli laterali**.

Anche le piramidi sono classificate mediante i poligoni di base. Se la base è un triangolo, la piramide è triangolare; se è un quadrilatero, quadrangolare e così via.

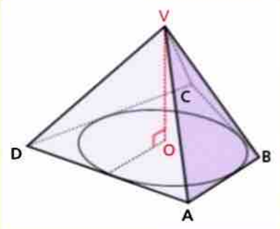




Piramide retta

DEFINIZIONE

Una **piramide** è **retta** quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base.



In una piramide retta si chiama **apotema** l'altezza di una qualunque delle facce laterali rispetto al lato della base.

TEOREMA

In una piramide retta, gli apotemi passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenza inscritta nella base e sono tra loro congruenti.

DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo il centro O della circonferenza con due punti di tangenza H e K.

Si ottengono i raggi OH e OK che sono perpendicolari ai lati AD e AB, perché questi sono tangenti alla circonferenza.
VO è perpendicolare al piano della base, OH è perpendicolare alla retta AD, quindi, per il teorema delle tre perpendicolari, VH è perpendicolare alla retta AD ed è l'altezza della faccia VDA. Analogamente si dimostra che VK è perpendicolare ad AB e così per ogni faccia.
I triangoli rettangoli VOH e VOK hanno il cateto VO in comune e i cateti OH e OK congruenti, perché raggi della circonferenza inscritta, quindi sono congruenti. In particolare sono congruenti le loro ipotenuse VH e VK.

In modo analogo si dimostra che sono congruenti le altezze delle altre facce laterali.

DEFINIZIONE

Una piramide retta si dice **regolare** quando la sua base è un poligono regolare.

Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli fra loro congruenti.

PROVA SUBITO

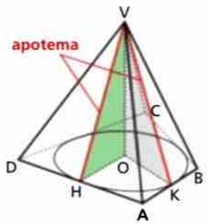
Piramide

Disegna una piramide esagonale e conta il numero delle facce, quello degli spigoli e quello dei vertici. È verificata la formula di Eulero?

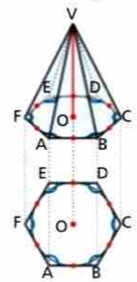
Listen to it

In a **right pyramid** the **apex** is above the centre of the circle inscribed in the base.

Piramide retta



Piramide regolare



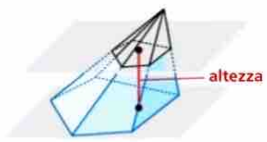
TEORIA

Tronco di piramide

Data una piramide, consideriamo le parti in cui viene divisa da un piano parallelo alla base e posto a una distanza dal vertice inferiore all'altezza della piramide.
Otteniamo due solidi:

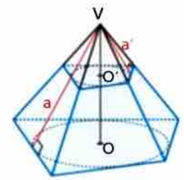
- una piramide più piccola, con lo stesso vertice della piramide data; si può dimostrare che le due piramidi sono solidi simili;
- un solido delimitato da due poligoni sui piani paralleli e da facce laterali che sono dei trapezi, chiamato **tronco di piramide**. I due poligoni sui piani paralleli sono detti **basi** e i trapezi **facce laterali** del tronco di piramide. La distanza tra i piani delle due basi è l'**altezza** del tronco di piramide.

Tronco di piramide



Un tronco di piramide è **retto** o **regolare** se deriva da una piramide retta o regolare.

In un tronco di piramide retto, i trapezi che costituiscono le facce laterali hanno tutti la stessa altezza, data dalla differenza tra l'apotema della piramide di partenza e l'apotema della piramide piccola. Tale altezza è detta **apotema del tronco di piramide**.

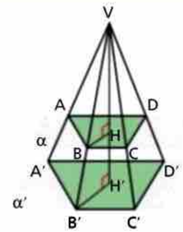


Vale il seguente teorema, che non dimostriamo.

TEOREMA

Se si taglia una piramide di vertice V con un piano parallelo alla base, si ha che:

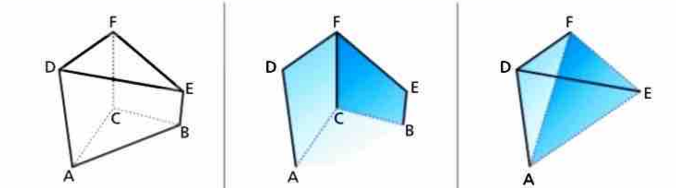
1. la sezione e la base sono poligoni simili;
2. i lati e i perimetri di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice V;
3. le misure delle superfici di questi poligoni sono proporzionali ai quadrati delle misure di queste distanze.



Poliedri regolari

Dato un poliedro, a ogni suo spigolo associamo il diedro individuato dalle due facce che contengono quello spigolo; esso è un **diedro del poliedro**.

Inoltre a ogni vertice del poliedro associamo l'angoloide i cui spigoli contengono quelli del poliedro uscenti da quel vertice: esso è un **angoloide del poliedro**.



a. Un poliedro *ABCDEF*. **b.** Diedro di spigolo *FC*. **c.** Angoloide con vertice *D* e spigoli *DA*, *DE* e *DF*.

DEFINIZIONE

Un **poliedro regolare** è un poliedro in cui le facce sono poligoni regolari congruenti tra loro e in ogni vertice si incontra lo stesso numero di facce.

In un poliedro regolare sono congruenti tutti gli angoloidi e i diedri.

Video

Poliedri di Keplero-Poinsot

Il piccolo e il grande dodecaedro stellato, il grande dodecaedro e il grande icosaedro sono quattro figure solide non convesse note come *poliedri di Keplero-Poinsot*. Vediamo come si possono costruire e le loro caratteristiche principali.

Listen to it

In a **regular polyhedron**, all faces are equal regular polygons and the same number of faces meets at each vertex. There are only five regular polyhedra.

TEORIA

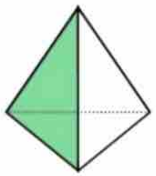
Nel piano, i poligoni regolari possono avere un qualunque numero di lati. Si può invece dimostrare che nello spazio i poliedri regolari sono soltanto cinque. Ricordiamo infatti che in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari.

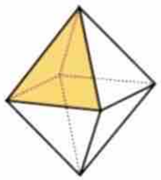
Illustriamolo nella seguente tabella, in cui forniamo anche i nomi dei poliedri regolari possibili.

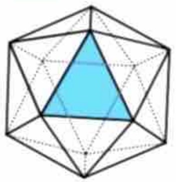
Poliedri regolari

Facce	Numero facce in un vertice	Somma degli angoli delle facce	Nome del poliedro
triangoli equilateri (angoli di 60°)	3	$180° < 360°$	tetraedro
	4	$240° < 360°$	ottaedro
	5	$300° < 360°$	icosaedro
	6	$360° = 360°$	non esiste
quadrati (angoli di 90°)	3	$270° < 360°$	cubo
	4	$360° = 360°$	non esiste
pentagoni (angoli di 108°)	3	$324° < 360°$	dodecaedro
	4	$432° > 360°$	non esiste
esagoni (angoli di 120°)	3	$360° = 360°$	non esiste

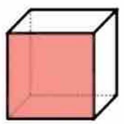
Deduciamo dalla tabella che i poliedri regolari possibili sono solo cinque.

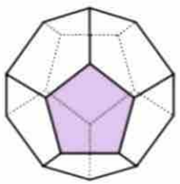

Tetraedro


Ottaedro


Icosaedro

Solidi platonici


Cubo (esaedro)


Dodecaedro

Il tetraedro regolare è racchiuso da 4 triangoli equilateri, l'ottaedro regolare da 8, l'icosaedro regolare da 20.
Il cubo è anche chiamato esaedro regolare, perché è racchiuso da 6 quadrati (in greco *hex* significa «sei»).
Il dodecaedro regolare ha 12 facce pentagonali.

I Greci conoscevano i poliedri regolari già ai tempi di Pitagora (540 a.C.). In seguito, i cinque solidi furono studiati anche da Platone e per questo vengono detti **solidi platonici**.

MATEMATICA E ARTE

▸ **Solidi artistici**

I solidi, e la matematica in generale, hanno sempre avuto grande importanza nell'arte e non solo. In particolare, i *solidi platonici* hanno stimolato la creatività di molti artisti.

Cerca nel Web: solidi platonici arte, dadi platonici

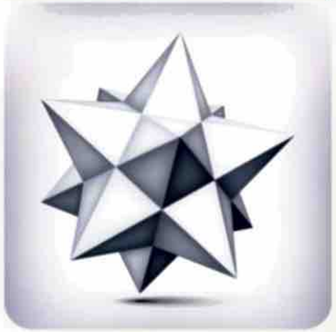
IDEE E PROBLEMI

ARTE

I poliedri stellati

I cinque poliedri regolari platonici sono tutti figure convesse. Se estendiamo la definizione di poliedro anche a figure non convesse, possiamo disegnare altri quattro poliedri regolari: il grande dodecaedro, il grande icosaedro, il piccolo dodecaedro stellato e il grande dodecaedro stellato.
Gli ultimi due sono i *poliedri di Keplero*, detti *stellati* per la loro forma, e si può pensare che si ottengano sovrapponendo particolari piramidi alle facce di poliedri regolari platonici. Proprio per questa forma a stella sono stati presi a modello di perfezione e sono molto presenti nell'arte.
La foto a lato mostra un esempio di dodecaedro stellato in un mosaico del pavimento della Basilica di San Marco, a Venezia.

Nell'immagine a lato c'è un piccolo dodecaedro stellato costituito da un dodecaedro regolare in cui a ciascuna faccia, pentagonale, è sovrapposta una piramide retta. Le facce delle piramidi sono tutte triangoli isosceli congruenti con angoli di 72°, 72° e 36°.



Calcoliamo l'angolo che ogni faccia di una delle piramidi forma con il piano della base.

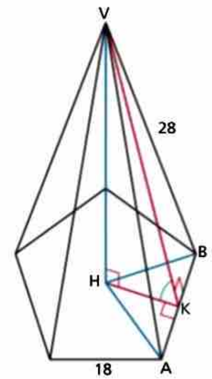
Consideriamo una delle piramidi e chiamiamo V il suo vertice, H la proiezione di V sul piano di base, A e B due vertici consecutivi del pentagono di base e K il piede dell'altezza del triangolo ABH sulla base AB. Dobbiamo calcolare l'angolo $V\widehat{K}H$.

Supponiamo che la misura del lato di base della piramide sia 18 cm. Il triangolo ABH è isoscele, con

$$A\widehat{H}B = \frac{360°}{5} = 72°.$$

L'altezza HK è mediana e bisettrice, pertanto il triangolo KHA è rettangolo in K con $A\widehat{H}K = \frac{72°}{2} = 36°$, $\overline{AK} = 9$ e

$$\overline{HK} = \frac{\overline{AK}}{\tan A\widehat{H}K} = \frac{9}{\tan 36°}.$$



Il triangolo ABV è isoscele, con $A\widehat{V}B = 36°$ e VK è mediana, e quindi anche altezza e bisettrice, relativa ad AB. Il triangolo AVK è dunque rettangolo in K con $A\widehat{V}K = \frac{36°}{2} = 18°$ e

$$\overline{VK} = \frac{\overline{AK}}{\tan A\widehat{H}K} = \frac{9}{\tan 18°}.$$

Infine, il triangolo VKH è rettangolo in H perché H è la proiezione del vertice V della piramide sulla base, quindi

$$\cos V\widehat{K}H = \frac{\overline{HK}}{\overline{VK}} = \frac{\tan 18°}{\tan 36°} \simeq 0{,}447 \quad '' \quad V\widehat{K}H \simeq \arccos 0{,}447 \simeq 63{,}4°.$$

Dunque l'angolo che ogni faccia della piramide forma con la base è ampio circa 63,4°.

SPUNTI DI RICERCA Cerca nel Web informazioni sui poliedri archimedei e le loro caratteristiche di simmetria.

TEORIA

6 Solidi di rotazione

Esercizi a pagina 1205

Un **solido di rotazione** è un solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno a una retta r, detta **asse di rotazione**, secondo un angolo α.

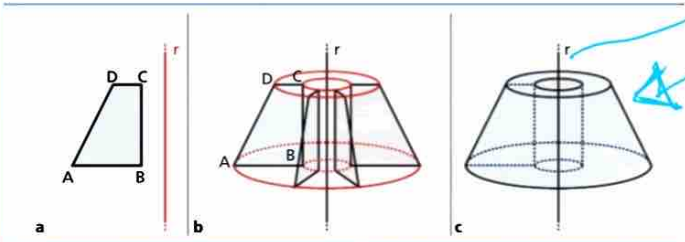
Se α è un angolo giro, allora si dice che la rotazione è **completa**. In una rotazione completa, un punto P descrive una circonferenza nel piano perpendicolare alla retta r e passante per P.

Noi studieremo soltanto solidi ottenuti da rotazioni complete.

ESEMPIO

Disegniamo un quadrilatero $ABCD$ e una retta r (figura **a**). Facciamo ruotare il quadrilatero di un angolo giro attorno a r. Ciascun punto del quadrilatero descrive una circonferenza (figura **b**). Otteniamo così un solido di rotazione (figura **c**).

asse di rotazione



Fra i solidi ottenuti per rotazione studieremo solo i più semplici, ossia il cilindro, il cono e la sfera.

Listen to it

The simplest solids of revolution are the **cylinder**, the **cone** and the **sphere**.

Cilindro

DEFINIZIONE

Un **cilindro** è un solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.

Il lato attorno al quale ruota il rettangolo è l'**altezza** del cilindro. Gli altri due lati perpendicolari all'altezza sono i **raggi di base**.

I raggi di base nella rotazione determinano due cerchi, che sono le **basi** del cilindro.

Un cilindro è **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro della base.

Cono

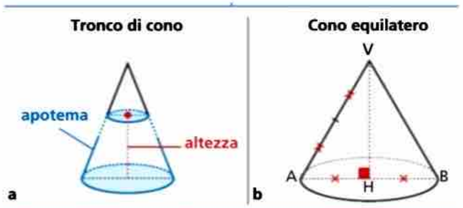
DEFINIZIONE

Un **cono** è un solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti.

Il cateto attorno a cui ruota il triangolo è l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio di base**. L'ipotenusa è l'**apotema** del cono.

Un cono è **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro della base.

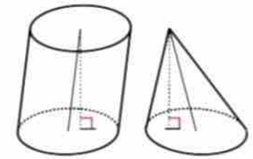
Sezionando un cono con un piano parallelo alla base otteniamo un cono più piccolo, simile a quello di partenza, e un **tronco di cono**. La base del cono e il cerchio ottenuto dalla sezione sono le **basi** del tronco di cono e la loro distanza è l'**altezza** del tronco di cono.



TEOREMA

In un cono, le misure delle aree del cerchio di base e del cerchio ottenuto da una sezione parallela al piano di base stanno tra loro come i quadrati delle misure delle loro distanze dal vertice.

I cilindri e i coni considerati finora sono *circolari retti*: nei cilindri circolari retti l'altezza coincide con la retta che congiunge i centri dei cerchi di base, nei coni circolari retti con la retta che congiunge il vertice con il centro della base.
Più in generale, si potrebbero studiare anche cilindri e coni *obliqui* (figure a lato) nei quali questa condizione non è verificata.



Sfera

DEFINIZIONE

Una **sfera** è un solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.

Il centro del semicerchio è detto **centro della sfera**; il suo raggio è il **raggio della sfera**.
La semicirconferenza che ruota genera una superficie detta **superficie sferica**.

La superficie sferica e la sfera possono essere considerate luoghi geometrici:

- la superficie sferica è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza dal centro uguale al raggio;
- la sfera è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza dal centro minore o uguale al raggio.

MATEMATICA E GEOGRAFIA

▸ Calotta polare artica

La superficie ghiacciata che ricopre il Polo Nord e la Groenlandia, detta *calotta polare artica*, è in continua mutazione ed è fondamentale per il nostro sistema climatico; infatti, essa isola l'acqua del Mar Glaciale Artico, molto più calda dell'atmosfera sovrastante, impedisce l'assorbimento dei raggi solari e intrappola il metano, con il risultato di bloccare il calore e impedirne la propagazione su tutto il globo.

Cerca nel Web:
effetti della calotta polare artica sul clima

Parti della superficie sferica e della sfera

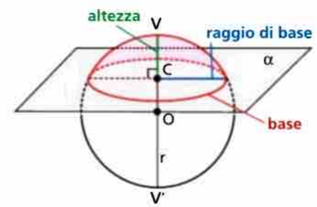
DEFINIZIONE

La **calotta sferica** e il **segmento sferico a una base** sono, rispettivamente, le parti in cui una superficie sferica e una sfera restano divise da un piano secante.

La calotta sferica è una superficie, il segmento sferico a una base è un solido.

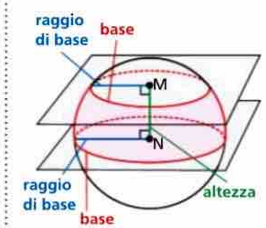
La sezione determinata dal piano nella sfera è un cerchio, detto **base del segmento sferico**.
La sua circonferenza è detta **base della calotta** e il suo raggio **raggio di base**.
Il diametro della sfera passante per il centro della base è anche asse di simmetria della calotta e del segmento sferico, e interseca la calotta in un punto detto **vertice**.

La distanza del vertice dal centro della base si dice **altezza della calotta e del segmento sferico**.



DEFINIZIONE

La **zona sferica** e il **segmento sferico a due basi** sono, rispettivamente, le parti di una superficie sferica e di una sfera comprese tra due piani paralleli secanti.



I due cerchi determinati dai piani secanti sono le **basi** del segmento, le loro circonferenze sono basi della zona e i loro raggi sono **raggi di base**.

Il diametro della sfera che passa per i centri delle due basi è anche asse di simmetria della figura. La distanza fra i due centri si dice **altezza della zona e del segmento sferico**.

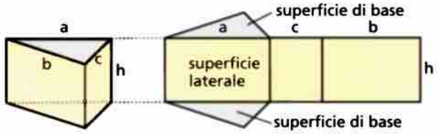
DEFINIZIONE
Il **fuso sferico** e lo **spicchio sferico** sono, rispettivamente, le parti in cui una superficie sferica e una sfera restano divise da due semipiani aventi come origine comune una retta passante per il centro della sfera.

Il diedro formato dai due semipiani si dice **diedro del fuso e dello spicchio**. Il fuso è detto **base dello spicchio**. L'arco di circonferenza massima che giace sul fuso si chiama **arco equatoriale**. Le semicirconferenze intercettate dai due semipiani sono dette **lati del fuso**, mentre i due corrispondenti semicerchi che delimitano lo spicchio sono detti **facce dello spicchio**.

7 Aree dei solidi

DEFINIZIONE
La **superficie di un poliedro** è l'insieme delle superfici di tutte le sue facce.

Immaginiamo di trasportare su un unico piano le facce che compongono il solido.



La figura che si ottiene si chiama **sviluppo** della superficie poliedrica e permette lo studio delle aree delle superfici dei poliedri.
In particolare studieremo alcuni solidi notevoli nei quali, essendo presenti una o due basi, si distinguono la superficie laterale, relativa alle sole facce laterali, e la superficie totale, che si ottiene aggiungendo le superfici delle basi alla superficie laterale.

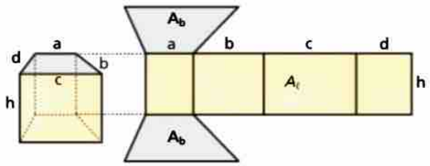
Utilizzeremo i simboli A_l, A_t, A_b, $2p$, h per indicare rispettivamente l'area della superficie laterale, totale, di base, il perimetro di base e l'altezza di un solido.
Con gli stessi simboli indicheremo anche le misure associate.

Aree di prismi

Esercizi a pagina 1208

Prisma retto

Consideriamo come esempio un prisma quadrangolare, ma gli stessi ragionamenti valgono per qualsiasi prisma retto.



MATEMATICA E ARTE
▸ **Arte del cubo**
La **pittura cubista**, che si sviluppò in Europa tra il 1908 e il 1914, modificò la visione prospettica, sulla base delle indicazioni di Paul Cézanne: *«trattare la natura secondo il cilindro, la sfera, il cono»*.

↑ Juan Gris, *Natura morta con chitarra*, particolare, 1913, Madrid, Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía.

Cerca nel Web:
Da che cosa deriva il nome «cubismo»?

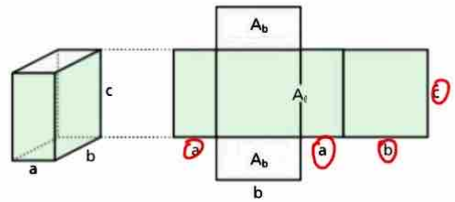
L'area della **superficie laterale** di un prisma retto è la somma delle aree delle superfici delle facce laterali, che sono rettangoli aventi per altezza la stessa altezza (quella del prisma) e per basi i lati del poligono di base: perimetro

$$A_l = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h + d \cdot h = (a + b + c + d) \cdot h = 2p \cdot h.$$

L'area della **superficie totale** di un prisma retto si trova sommando all'area della superficie laterale l'area delle due basi:

$$A_t = A_l + 2A_b = 2p \cdot h + 2A_b.$$

Parallelepipedo rettangolo



È un caso particolare di prisma retto, in cui la superficie laterale è la somma di quattro rettangoli congruenti a due a due:

$$A_l = 2a \cdot c + 2b \cdot c = 2(a \cdot c + b \cdot c) = 2(a + b) \cdot c.$$

Essendo l'area della **superficie di base** $A_b = a \cdot b$, l'area della **superficie totale** è:

$$A_t = A_l + 2A_b = 2(a \cdot c + b \cdot c) + 2a \cdot b = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

PROVA SUBITO
Superficie totale di un parallelepipedo
Calcola l'area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 4 cm, 6 cm e 9 cm.

Cubo

Le facce del cubo sono sei quadrati congruenti, quindi, se indichiamo con s la misura dello spigolo, si ha:

$$A_b = s^2, \quad A_t = 6s^2.$$

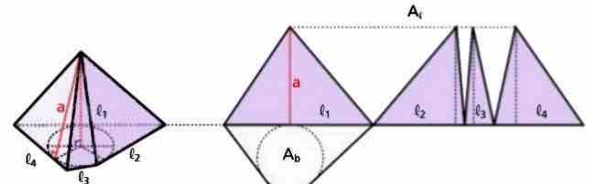
PROVA SUBITO
Area del cubo
Trova l'area della superficie totale di un cubo alto 5 cm.

Aree di piramidi

Esercizi a pagina 1211

Piramide retta

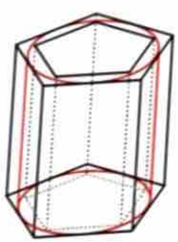
Consideriamo come esempio una piramide retta a base quadrangolare.



Lo sviluppo è formato da quattro triangoli di uguale altezza a, pari all'apotema della piramide, e dalla base della piramide stessa.
Se chiamiamo l_1, l_2, l_3, l_4 le misure dei lati del poligono di base e A_1, A_2, A_3, A_4 rispettivamente le misure delle aree delle facce laterali, otteniamo:

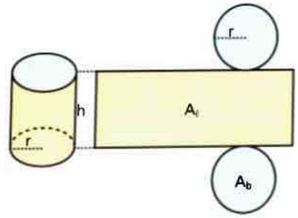
$$A_l = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} l_1 \cdot a + \frac{1}{2} l_2 \cdot a + \frac{1}{2} l_3 \cdot a + \frac{1}{2} l_4 \cdot a =$$
$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \cdot a = \frac{1}{2} 2p \cdot a = p \cdot a.$$

PROVA SUBITO
Superficie totale di una piramide
Una piramide retta a base quadrata ha lo spigolo di base di lunghezza 8 cm e l'altezza di 3 cm. Calcola l'area della superficie totale.



Risulta allora che lo sviluppo della **superficie laterale** del cilindro è un rettangolo che ha per base la circonferenza rettificata e per altezza l'altezza del cilindro stesso:

$$A_l = 2\pi \cdot r \cdot h.$$



La misura dell'area della **superficie di base** è: $A_b = \pi \cdot r^2$.

La misura dell'area della **superficie totale** è la somma delle misure dell'area laterale e delle aree delle due superfici di base:

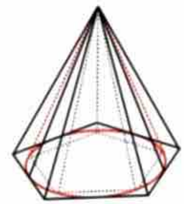
$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r).$$

PROVA SUBITO
Superficie totale di un cilindro
Determina la misura dell'area della superficie totale di un cilindro con raggio e altezza rispettivamente di lunghezza 2 cm e 7 cm.

Cono

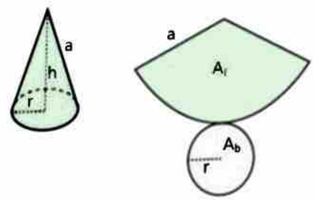
Una piramide retta è **inscritta** o **circoscritta a un cono** se il suo vertice coincide con il vertice del cono e la sua base è un poligono rispettivamente inscritto o circoscritto alla base del cono.
Una piramide regolare è sempre inscrivibile e circoscrivibile a un cono. La seguente definizione è analoga a quella data per il cilindro.

DEFINIZIONE
La **superficie laterale di un cono** è l'elemento separatore della coppia di classi contigue costituite dalle superfici laterali delle piramidi regolari inscritte nel cono e da quelle delle piramidi regolari circoscritte al cono.



La misura dell'area della superficie laterale della piramide è il prodotto delle misure della lunghezza del semiperimetro del poligono di base e dell'apotema.

Le classi dei perimetri dei poligoni di base delle piramidi hanno per elemento separatore la circonferenza di base del cono, quindi la misura dell'area della **superficie laterale** del cono è:



$$A_l = \cancel{2}\pi \cdot r \cdot a \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{\pi \cdot r \cdot a.}$$

La misura dell'area della **superficie di base** del cono è:

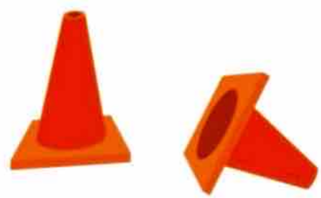
$$A_b = \pi \cdot r^2.$$

La misura dell'area della **superficie totale** del cono si trova sommando quelle dell'area della superficie laterale e dell'area di base:

$$A_t = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (a + r).$$

PROVA SUBITO
Superficie totale di un cono
Un cono ha il raggio di base lungo 5 cm e l'altezza lunga 12 cm. Determina l'area della superficie totale del cono.

ESEMPIO
Per segnalare la presenza di un cantiere stradale si usano file di coni segnaletici. Tali coni sono colorati con una vernice arancione riflettente per renderli più visibili agli automobilisti.



▶ **Quante bombolette spray sono necessarie per verniciare 15 coni stradali?**

> SEGUE

Un cono stradale è una struttura costituita da un cono cavo, con diametro di base di 19 cm e altezza 45 cm, appoggiato su una base quadrata di lato 26,5 cm. Ogni bomboletta spray da 400 mL di vernice riflettente copre una superficie di circa 1,5 m². Per determinare quante bombolette servono per verniciare 15 coni stradali, calcoliamo l'area della superficie totale esterna di ogni cono stradale.

1 Calcoliamo l'area di base, che è la differenza fra l'area della base quadrata e l'area della base circolare del cono.

$$A_{\text{base cono}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 \simeq 283{,}53\ \text{cm}^2,$$

$$A_{\text{base quadrata}} = l^2 = (26{,}5)^2 = 702{,}25\ \text{cm}^2,$$

$$A_{\text{base cono stradale}} = A_{\text{base quadrata}} - A_{\text{base cono}} \simeq 702{,}25 - 283{,}53 = 418{,}72\ \text{cm}^2.$$

2 Calcoliamo l'area laterale del cono e la sommiamo all'area della base del cono stradale.

$$A_{\text{lat cono}} = \pi r a = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \cdot \frac{19}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 45^2} \simeq 1372{,}58\ \text{cm}^2,$$

$$A_{\text{tot cono stradale}} = A_{\text{base cono stradale}} + A_{\text{lat cono}} \simeq 418{,}72 + 1372{,}58 = 1791{,}3\ \text{cm}^2.$$

Abbiamo trovato l'area della superficie da colorare per ogni cono stradale.

3 Moltiplichiamo l'area trovata per il numero di coni da verniciare e ricaviamo l'area totale della superficie da ricoprire:

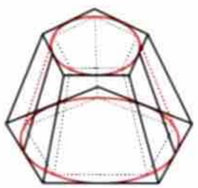
$$A_{15\ \text{coni stradali}} \simeq 15 \cdot 1791{,}3 \simeq 26870\ \text{cm}^2 \simeq 2{,}7\ \text{m}^2.$$

Siccome ogni bomboletta da 400 ml copre una superficie di circa 1,5 m², per verniciare 15 coni stradali saranno necessarie 2 bombolette.

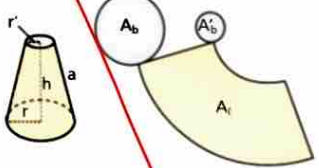
Tronco di cono

DEFINIZIONE

La **superficie laterale di un tronco di cono** è l'elemento separatore della coppia di classi contigue costituite dalle superfici laterali dei tronchi di piramide inscritti e da quelle dei tronchi di piramide circoscritti al tronco di cono.



Ricordiamo che la misura dell'area della superficie laterale del tronco di piramide è il semiprodotto delle misure della somma delle lunghezze dei perimetri dei poligoni di base e dell'apotema.



Le circonferenze di base del tronco di cono sono gli elementi separatori delle classi contigue delle lunghezze dei perimetri dei poligoni di base dei tronchi di piramide, quindi la misura dell'area della **superficie laterale** del tronco di cono è:

$$A_l = (2\pi \cdot r + 2\pi \cdot r') \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 2\pi \cdot (r + r') \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot a \cdot (r + r')$$

La misura dell'area della somma delle **superfici di base** del tronco di cono è:

$$A_b + A'_b = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2 = \pi \cdot (r^2 + r'^2).$$

La misura dell'area della **superficie totale** del tronco di cono è la somma delle misure delle aree della superficie laterale e delle superfici di base:

$$A_t = A_l + A_b + A'_b.$$

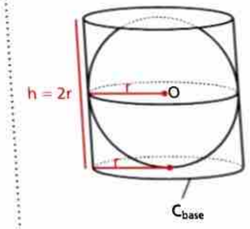
Superficie sferica

La misura dell'area della **superficie sferica** è uguale a quattro volte quella del suo cerchio massimo,

$$S_{\text{sfera}} = 4\pi r^2,$$

che si può anche scrivere $S_{\text{sfera}} = 2\pi r \cdot 2r$, espressione che rappresenta la superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera:

$$S_{\text{laterale cilindro}} = C_{\text{base}} \cdot h = 2\pi r \cdot 2r.$$



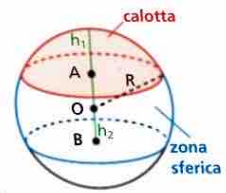
Possiamo quindi affermare che **la superficie di una sfera è equivalente alla superficie laterale del suo cilindro circoscritto**. Dimostreremo questa proprietà dopo aver determinato il volume della sfera.

Parti della superficie della sfera

- **Calotta e zona sferica**
  Le aree di una calotta e di una zona sferica si calcolano mediante la stessa formula:

  $$S = 2\pi R h,$$

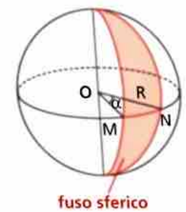
  dove R è il raggio della sfera e h è l'altezza della calotta o della zona.
  L'area di una calotta, o di una zona, può quindi essere pensata come quella della superficie laterale di un cilindro che ha raggio congruente a quello della sfera e altezza congruente a quella della calotta o della zona.



- **Fuso sferico**
  Si può dimostrare che i fusi appartenenti a una stessa sfera, o a sfere di raggio congruente, sono proporzionali ai diedri corrispondenti. Indicata con S_{fuso} l'area del fuso, con R il raggio della sfera, con α_{rad} e $\alpha°$ le ampiezze del diedro in radianti e gradi, si ha:

  $$S_{\text{fuso}} : 4\pi R^2 = \alpha_{\text{rad}} : 2\pi \;\rightarrow\; S_{\text{fuso}} = 2\alpha_{\text{rad}} R^2;$$

  $$S_{\text{fuso}} : 4\pi R^2 = \alpha° : 360° \;\rightarrow\; S_{\text{fuso}} = \frac{\alpha°}{90°}\pi R^2.$$

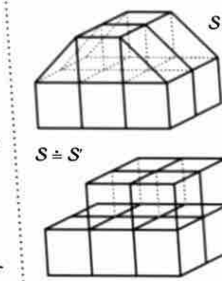


8 Estensione ed equivalenza dei solidi

Esercizi a pagina 1215

Estensione dei solidi

Il concetto di **estensione** spaziale è un concetto primitivo, che deriva dalle nostre esperienze concrete. Siamo abituati a considerare un oggetto grande o piccolo a seconda che occupi più o meno spazio, o, come spesso diciamo, sia più o meno voluminoso. Se consideriamo poi due solidi di forma diversa ma realizzati con lo stesso materiale e dello stesso peso, diciamo che hanno la stessa estensione.
In matematica, due solidi che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti**. Indichiamo l'equivalenza con il **simbolo** $\doteq$.



L'equivalenza tra solidi gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una *relazione di equivalenza*.

Possiamo allora ripartire i solidi in classi di equivalenza.

DEFINIZIONE

Data la relazione di equivalenza tra solidi, definiamo **volume di un solido** la classe di equivalenza alla quale il solido appartiene.

Classi di equivalenza
A ogni classe di equivalen…
appartengono tutti i solid…
che hanno lo stesso volu…
cioè uguale estensione.

Confronto fra solidi

POSTULATO
Postulato di De Zolt
Un solido non può essere equivalente a una sua parte.

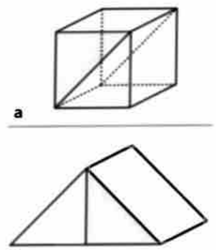
Un solido $\mathcal{A}$ è **maggiore** di un solido $\mathcal{B}$ se $\mathcal{B}$ è equivalente a una parte di $\mathcal{A}$. In tal caso si può dire che $\mathcal{A}$ è **prevalente** a $\mathcal{B}$. Scriviamo: $\mathcal{A} > \mathcal{B}$. Possiamo anche dire che $\mathcal{B}$ è **minore** di $\mathcal{A}$, o anche che $\mathcal{B}$ è **suvvalente** ad $\mathcal{A}$.

POSTULATO
Legge di esclusione
Dati due solidi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, o $\mathcal{A}$ è equivalente a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \doteq \mathcal{B}$) oppure $\mathcal{A}$ è prevalente a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} > \mathcal{B}$) o $\mathcal{A}$ è suvvalente a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} < \mathcal{B}$) e ciascun caso esclude gli altri due.

Solidi congruenti

POSTULATO
Due solidi congruenti sono sempre equivalenti.

Non è invece sempre vero che due solidi equivalenti siano congruenti.
Dato per esempio un cubo (figura **a**), se lo tagliamo lungo un piano che passa per le diagonali di due facce opposte, otteniamo due solidi che possiamo disporre come in figura **b**. Il cubo e il solido sono equivalenti ma *non* congruenti.



Somma e differenza di solidi

Definiamo **somma di due solidi** $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$, privi di punti comuni o aventi in comune solo punti del loro contorno, il solido $\mathcal{P}$ ottenuto come unione dei punti di $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$. Scriviamo: $\mathcal{P} = \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$. I solidi $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ sono le **parti** di $\mathcal{P}$.

La somma di due o più solidi gode delle proprietà commutativa e associativa:

$$\mathcal{P}' + \mathcal{P}'' \doteq \mathcal{P}'' + \mathcal{P}',$$
$$(\mathcal{P} + \mathcal{P}') + \mathcal{P}'' \doteq \mathcal{P} + (\mathcal{P}' + \mathcal{P}'').$$

Se $\mathcal{P}' + \mathcal{P}'' = \mathcal{P}$, diciamo che $\mathcal{P}'$ è la **differenza** fra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}''$ e la indichiamo con $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \mathcal{P}''$.

POSTULATO
Solidi ottenuti come somma o differenza di solidi congruenti o equivalenti sono equivalenti.

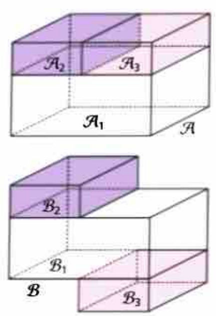
Solidi equicomposti

DEFINIZIONE
Due solidi si dicono **equicomposti** (o equiscomponibili) se sono scomponibili in solidi rispettivamente congruenti.

Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA
Due solidi equicomposti sono equivalenti.

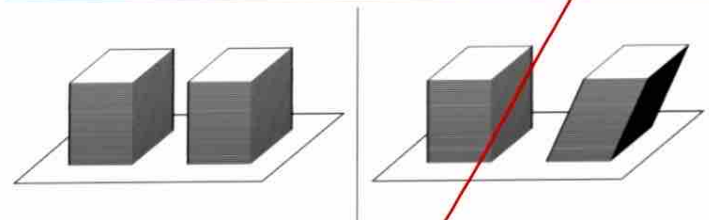
ESEMPIO
Consideriamo i solidi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ della figura a lato.
Ciascuno di essi può essere pensato come la somma di poliedri.
$\mathcal{A}$ è la somma di $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$, mentre $\mathcal{B}$ è la somma di $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$.
- Se $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$; $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{B}_2$; $\mathcal{A}_3 \cong \mathcal{B}_3$;
  allora $\mathcal{A}_1 \doteq \mathcal{B}_1$; $\mathcal{A}_2 \doteq \mathcal{B}_2$; $\mathcal{A}_3 \doteq \mathcal{B}_3$;



perché solidi congruenti sono equivalenti.
- I solidi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ risultano somme di poliedri equivalenti e sono equivalenti in virtù del teorema che abbiamo enunciato.

Principio di Cavalieri

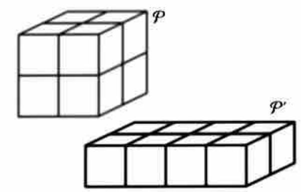
Consideriamo due pile di fogli a forma di parallelepipedo rettangolo (figura **a**), formate dalla sovrapposizione dello stesso numero di fogli: i solidi così ottenuti sono congruenti e quindi equivalenti.



Possiamo far scorrere i fogli di uno di questi parallelepipedi in modo che la sua forma cambi (figura **b**). L'intuizione ci dice che l'estensione dei due solidi rimane la stessa e quindi essi sono ancora equivalenti.
Potremmo anche ripetere le considerazioni dell'esperienza precedente prendendo, al posto di pile di fogli uguali, pile di fogli che abbiano a due a due la stessa area ma forma diversa.
Passando dal mondo concreto alla geometria, possiamo pensare i fogli sostituiti dalle sezioni ottenute intersecando i solidi con piani tutti paralleli a uno scelto come riferimento. Comprendiamo così il seguente principio.

POSTULATO
Principio di Cavalieri
Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro piano fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti.

Il principio di Cavalieri fornisce una condizione *sufficiente* ma *non necessaria* per l'equiestensione dei solidi. Per esempio, i solidi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono solidi equivalenti a cui non è possibile applicare il principio di Cavalieri.



Listen to it
Cavalieri's principle, named after Bonaventura Cavalieri, states that if two solids are laced between two parallel planes and every plane parallel to these intersects the solids in sections of equal area, then the two solids are equivalent.

Una condizione è **sufficiente** se non servono altre ipotesi affinché la tesi valga; è **necessaria** se, quando la tesi vale, tale ipotesi è soddisfatta.

PROVA SUBITO
Principio di Cavalieri
Si può applicare il principio di Cavalieri a solidi con altezze diverse rispetto al comune piano di appoggio? Perché?

Equivalenza di solidi notevoli

Prismi, piramidi, cilindri, coni

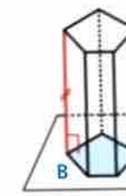
TEOREMA
Due prismi che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo due prismi con basi equivalenti che appartengono allo stesso piano α e posti dalla stessa parte rispetto al piano. Il piano α' è un qualsiasi piano parallelo ad α che interseca i due solidi.

> SEGUE

Quindi sono equivalenti: $BCB'A' \doteq A'B'C'C$.

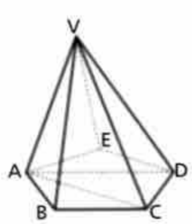
Per la proprietà transitiva, le piramidi $A'B'C'C$, $ABCA'$, $BCB'A'$ sono equivalenti e perciò ciascuna piramide, in particolare $ABCA'$, è equivalente alla terza parte del prisma.

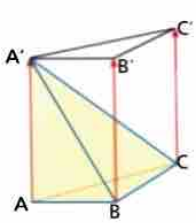


TEOREMA
Un prisma e un cilindro che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.

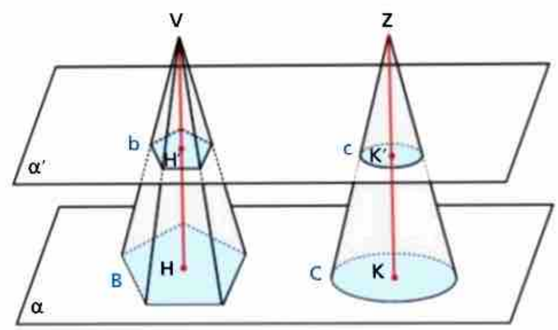
La dimostrazione di questo teorema è del tutto analoga a quella del teorema relativo a due prismi di base equivalente e altezza congruente.

TEOREMA
Una piramide e un cono che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.





DIMOSTRAZIONE
Consideriamo una piramide e un cono con basi equivalenti che appartengono allo stesso piano α e posti dalla stessa parte rispetto al piano. Il piano α' è un qualsiasi piano parallelo ad α che interseca i due solidi.
Siano B la misura dell'area della base della piramide, b quella dell'area della sezione della piramide con il piano α', C la misura dell'area del cerchio di base del cono e c quella dell'area della sezione del cono con il piano α'.



In base ai teoremi riguardanti le proprietà delle sezioni di una piramide e di un cono con un piano parallelo alla base è vero che:

$$B : b = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2; \qquad C : c = \overline{ZK}^2 : \overline{ZK'}^2.$$

Per ipotesi $VH \cong ZK$ e $VH' \cong ZK'$, quindi $B : b = C : c$.

Essendo $B = C$, allora $b = c$.

Poiché i due solidi hanno altezze congruenti, ogni piano che interseca la piramide interseca anche il prisma e le sezioni sono equivalenti per quanto appena dimostrato. Quindi, per il principio di Cavalieri, i due solidi sono equivalenti.

Sfera e anticlessidra

DEFINIZIONE
Data una sfera di centro O, a essa circoscriviamo un cilindro equilatero e consideriamo i due coni di vertice O con le basi coincidenti con quelle del cilindro. Definiamo **anticlessidra** il solido ottenuto dalla differenza fra il cilindro e i due coni.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA
La sfera è equivalente alla sua anticlessidra.

Dim
Dimostraz

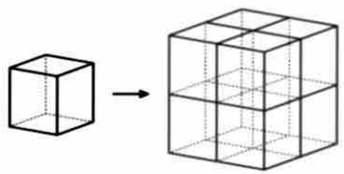
IDEE E PROBLEMI

MATEMATICA E REALTÀ

Bambole dalla Russia

La *matrioska* è un insieme di bambole della tradizione russa, ciascuna composta da 2 pezzi di legno che si incastrano. Ogni bambola ne contiene un'altra più piccola, che a sua volta ne contiene un'altra ancora e così via fino all'ultima, il «seme», un pezzo unico e indivisibile. Ci sono matrioske composte da più di 50 pezzi e altre alte 30 m, ma tutte hanno una caratteristica comune: in un set ogni bambola è simile a quella immediatamente più piccola, con un rapporto di similitudine all'incirca costante. Ci chiediamo qual è il rapporto tra i loro volumi.

Si può dimostrare che, se S' è un solido simile a S con rapporto di similitudine $k > 0$, allora il volume di S' è k^3 volte il volume di S.
Per esempio, se raddoppiamo lo spigolo di un cubo, otteniamo un cubo otto volte più grande del cubo di partenza (figura a lato).



Consideriamo una matrioska composta da 5 bambole e ipotizziamo che il rapporto tra le loro dimensioni sia costante e pari a $k = 1{,}5$ e che il volume della bambola più grande sia $V_1 = 400\ \text{cm}^3$. La bambola immediatamente più piccola, allora, ha volume, in cm^3:

$$V_2 = \frac{1}{k^3} \cdot V_1 = \frac{1}{1{,}5^3} \cdot 400 \simeq 118{,}52.$$

Possiamo continuare così fino a calcolare il volume del seme:

$$V_5 = \frac{1}{k^3} \cdot V_4 = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{k^3} \cdot V_3 = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{k^3} \cdot V_2 = \frac{1}{1{,}5^3} \cdot \frac{1}{1{,}5^3} \cdot \frac{1}{1{,}5^3} \cdot 118{,}52 \simeq 3.$$

Il volume del seme è di circa $3\ \text{cm}^3$.

SPUNTI DI RICERCA Cerca nel Web informazioni sui giochi per bambini che possono aiutare a sviluppare il pensiero matematico.

9 Volumi dei solidi

Ricordiamo che, date due grandezze omogenee A e U, si definisce misura di A rispetto a U il numero reale m tale che $A = mU$, dove U rappresenta l'unità di misura fissata, che vale 1.

Nel caso dei solidi si sceglie come unità di misura U dei volumi il volume di un cubo che ha per spigolo il segmento di lunghezza u, unità di misura delle lunghezze.

Volumi di prismi

Esercizi a pagina 1216

Parallelepipedo rettangolo con basi congruenti

Per poter esprimere la misura del volume di un parallelepipedo rettangolo in funzione delle misure delle sue dimensioni, premettiamo il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

STORIE DI MATEMATICA

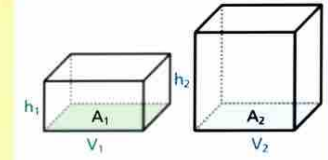
▸ Archimede e i volumi dei solidi

Il grande matematico siracusano del III secolo a.C. riprende gli studi dei suoi predecessori geometri e sviluppa il metodo di esaustione per il calcolo delle aree e dei volumi. I suoi risultati sono contenuti nel prezioso trattato *Sulla sfera e sul cilindro*.

Podcast

TEOREMA

I volumi dei parallelepipedi rettangoli che hanno basi congruenti sono proporzionali alle relative altezze.



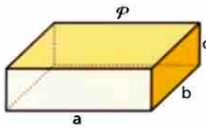
$A_1 = A_2 \longrightarrow V_1 : V_2 = h_1 : h_2$

Parallelepipedo rettangolo

TEOREMA

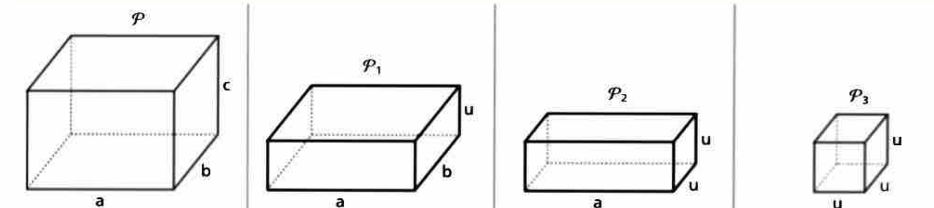
La misura del **volume di un parallelepipedo rettangolo** di dimensioni a, b, c è:

$V = a \cdot b \cdot c$.



DIMOSTRAZIONE

Siano u e U le unità di misura, rispettivamente, delle lunghezze e dei volumi.



a. Sia $\mathcal{P}$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure a, b, c e volume V.

b. Sia $\mathcal{P}_1$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure a, b, u e volume V_1.

c. Sia $\mathcal{P}_2$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure a, u, u e volume V_2.

d. Sia $\mathcal{P}_3$ il parallelepipedo rettangolo con dimensioni di misure u, u, u e volume $V_3 = U$.

Per il teorema precedente, volumi di parallelepipedi rettangoli aventi le basi congruenti stanno tra loro come le corrispondenti altezze.

Scriviamo allora:

$$V : V_1 = c : u \ \rightarrow\ V = cV_1;$$

$$V_1 : V_2 = b : u \ \rightarrow\ V_1 = bV_2 \ \rightarrow\ V = c \cdot b \cdot V_2;$$

$$V_2 : V_3 = a : u \ \rightarrow\ V_2 = aV_3 \ \rightarrow\ V = c \cdot b \cdot a \cdot V_3 \ \rightarrow\ V = a \cdot b \cdot c \cdot V_3.$$

Poiché $V_3 = U$, otteniamo: $V = a \cdot b \cdot c \cdot U$.

Concludiamo che la misura del volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle misure delle sue dimensioni.

Il teorema precedente può essere espresso anche nel modo seguente:
la misura del volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della misura dell'area di base per la misura della relativa altezza:

$$V = A_b \cdot h.$$

PROVA SUBITO

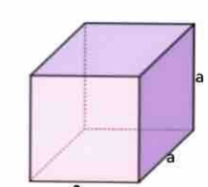
Volume di un parallelepipedo

Trova la misura del volume di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3 cm, 4 cm e 11 cm.

Cubo

Il cubo è un parallelepipedo rettangolo che ha tutte le dimensioni congruenti. Pertanto, il **volume di un cubo** con spigolo di lunghezza a è:

$$V = a^3.$$

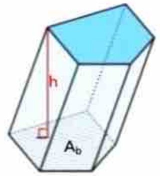


TEORIA

Prisma

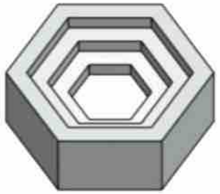
Sappiamo che due prismi sono equivalenti se hanno basi equivalenti e altezze congruenti. Essendo il parallelepipedo rettangolo un particolare prisma, la misura del volume del prisma è uguale a quella del parallelepipedo rettangolo che ha base equivalente e altezza congruente.
Quindi il volume di un prisma con base di area A_b e altezza di lunghezza h è:

$$V = A_b \cdot h.$$



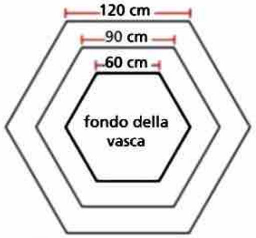
ESEMPIO

Ad Aquileia, in Friuli Venezia Giulia, si trova un antico fonte battesimale di forma esagonale regolare. Chi veniva battezzato qui doveva salire sul bordo della vasca e raggiungere il centro scendendo tre gradini, ciascuno alto circa 50 cm.



▶ **Quanti litri d'acqua poteva contenere il fonte di Aquileia se riempito fino al bordo?**

La quantità di litri d'acqua che poteva contenere il fonte battesimale è data dalla somma dei volumi delle tre vasche, ciascuna delle quali ha la forma di un prisma retto regolare a base esagonale.
Calcoliamo l'area dell'esagono di base della prima vasca. Per fare ciò, determiniamo il suo apotema: $a = \frac{\sqrt{3}}{2} l \to a = \frac{\sqrt{3}}{2} 120 = 60\sqrt{3}$.



L'area di base è

$$A_b = p_b \cdot a \quad \to \quad A_b = 120 \cdot 3 \cdot 60\sqrt{3} = 21600\sqrt{3}.$$

Il volume della prima vasca è quindi

$$V_1 = A_b \cdot h = 21600\sqrt{3} \cdot 50 \simeq 1870\,614{,}87.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due vasche, otteniamo:

$$V_2 \simeq 1052220{,}87 \quad \text{e} \quad V_3 \simeq 467653{,}72.$$

Il volume totale del fonte battesimale è quindi, in cm^3:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3390489{,}46.$$

Esso corrisponde a una capacità complessiva di circa 3390 L.

PROVA SUBITO
Volume di un prisma
Calcola il volume di un prisma che ha per base un triangolo equilatero con il lato di 5 cm e ha l'altezza di 12 cm.

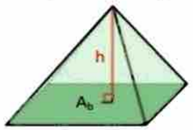
Volumi di piramidi

Esercizi a pagina 1219

Piramide

La piramide è equivalente alla terza parte di un prisma di base equivalente e uguale altezza, quindi il suo volume misura un terzo rispetto al volume del prisma. Allora il **volume di una piramide** con base di area A_b e altezza di lunghezza h è:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h.$$

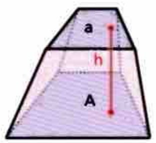


PROVA SUBITO
Volume di una piramide
Trova il volume di una piramide che ha base rettangolare di dimensioni 10 cm e 15 cm e altezza di 30 cm.

Tronco di piramide

TEOREMA
La misura del **volume di un tronco di piramide** con basi di area A e a e altezza di lunghezza h è:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A + a + \sqrt{a \cdot A}).$$

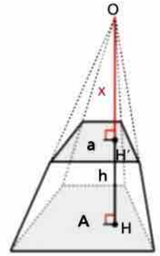


TEORIA

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con x la misura di OH'. La misura del volume del tronco di piramide si calcola come differenza delle misure dei volumi delle piramidi di vertice O e basi coincidenti con quelle del tronco:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (h + x) - \frac{1}{3} \cdot a \cdot x = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h + \frac{1}{3} \cdot x \cdot (A - a).$$



Poiché le misure delle aree delle sezioni sono direttamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide, possiamo scrivere:

$$A : a = (h + x)^2 : x^2 \ \to\ \sqrt{A} : \sqrt{a} = (h + x) : x.$$

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$(\sqrt{A} - \sqrt{a}) : \sqrt{a} = h : x \quad \to \quad x = \frac{\sqrt{a} \cdot h}{\sqrt{A} - \sqrt{a}}.$$

Razionalizziamo,

$$x = \frac{\sqrt{a} \cdot h}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{a}}{\sqrt{A} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot h \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{a})}{A - a},$$

e sostituiamo nella relazione iniziale:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot h \cdot (\sqrt{A} + \sqrt{a})}{\cancel{A - a}} \cdot (\cancel{A - a}).$$

Essendo $A - a \neq 0$, semplifichiamo e svolgiamo i calcoli:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h + \frac{1}{3} \cdot h \cdot \sqrt{a \cdot A} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot a = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A + a + \sqrt{a \cdot A}).$$

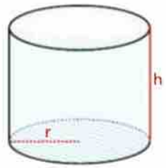
Volumi di solidi di rotazione

Esercizi a pagina 1221

Cilindro

Sappiamo che un cilindro è equivalente a un prisma con base equivalente e altezza congruente. Allora il **volume di un cilindro** con raggio di base di lunghezza r e altezza di lunghezza h è:

$$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

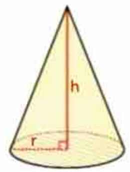


PROVA SUBITO
Volume dei solidi di rotazione
Determina il volume di un cono e di un cilindro con raggio di base di 4 cm e altezza di 15 cm.

Cono

Analogamente, per l'equivalenza tra coni e piramidi, il **volume di un cono** con raggio di base che misura r e altezza h è:

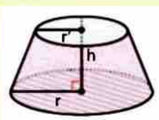
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$



Tronco di cono

TEOREMA
La misura **del volume di un tronco di cono** con raggi di base di lunghezze r e r' e con altezza di lunghezza h è:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r^2 + r'^2 + r \cdot r').$$



DIMOSTRAZIONE

Calcoliamo il volume con un ragionamento analogo a quello fatto per il tronco di piramide.

> SEGUE

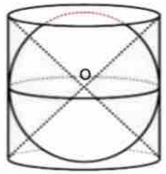
$$V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot(\pi\cdot r^2+\pi\cdot r'^2+\sqrt{\pi\cdot r^2\cdot\pi\cdot r'^2}) =$$
$$\frac{1}{3}\cdot h\cdot(\pi\cdot r^2+\pi\cdot r'^2+\sqrt{\pi^2\cdot r^2\cdot r'^2}) =$$
$$\frac{1}{3}\cdot h\cdot(\pi\cdot r^2+\pi\cdot r'^2+\pi\cdot r\cdot r') = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(r^2+r'^2+r\cdot r').$$

Sfera

Per il teorema di equivalenza tra sfera e anticlessidra, possiamo scrivere

$$V_{\text{sfera}} = V_{\text{cilindro circoscritto}} - V_{\text{doppio cono}} = \pi\cdot r^2\cdot 2r - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot r =$$
$$2\pi\cdot r^3 - \frac{2}{3}\pi\cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3,$$

ossia il **volume di una sfera** di raggio r è: $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$.



Video
Il volume della sfera secondo Archimede
La geometria solida fu uno dei temi studiati da Archimede, matematico e scienziato greco vissuto nel III secolo a.C. In particolare, ricavò il volume della sfera unendo i concetti di matematica e fisica. Vediamo quale fu il suo ragionamento.

Area della superficie sferica

Possiamo ora dimostrare il teorema relativo all'area della superficie della sfera.

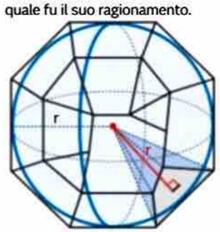
TEOREMA
La misura dell'**area della superficie sferica** è uguale a quattro volte quella del suo cerchio massimo:
$$S_{\text{sfera}} = 4\cdot\pi\cdot r^2.$$

DIMOSTRAZIONE
Data una sfera di raggio r, consideriamo una qualunque superficie poliedrica a essa circoscritta. Le facce di tale superficie poliedrica rappresentano le basi di tante piramidi con vertice nel centro della sfera. Queste facce sono tangenti alla sfera, quindi sono perpendicolari al raggio r nel punto di tangenza e perciò tutte queste piramidi hanno r come altezza.

Deduciamo allora che il volume del poliedro è uguale alla somma di tutti i volumi delle piramidi di uguale altezza, cioè al volume di una piramide di altezza r che ha per base la superficie poliedrica.

Se si aumenta il numero delle facce del poliedro, la misura della superficie poliedrica si avvicina sempre più alla misura della superficie della sfera e il volume della piramide che ha per base la superficie poliedrica si avvicina sempre più a quello della sfera. Quindi

$$V_{\text{piramide}} = V_{\text{sfera}} \;\rightarrow\; \frac{1}{3}\cdot S_{\text{sfera}}\cdot r = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \;\rightarrow\; S_{\text{sfera}} = 4\cdot\pi\cdot r^2.$$

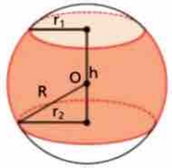


PROVA SUBITO
Area della superficie e volume della sfera
Determina l'area della superficie e la misura del volume della Luna, sapendo che è approssimabile a una sfera di raggio 1737 km.

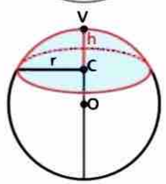
Parti della sfera

Ci limitiamo a enunciare i teoremi e le formule utili per calcolare i volumi delle parti della sfera.

- **Volume del segmento sferico a due basi**
Il segmento sferico a due basi è equivalente alla somma fra una sfera di diametro congruente all'altezza del segmento e due cilindri con altezza congruente alla metà di quella del segmento e con basi congruenti a quelle del segmento:
$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2\cdot\frac{h}{2} + \pi r_2^2\cdot\frac{h}{2}.$$

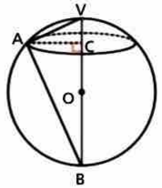


- **Volume del segmento sferico a una base**
Il segmento sferico a una base è equivalente alla somma fra una sfera di diametro congruente all'altezza del segmento e un cilindro con altezza congruente alla metà di quella del segmento e con base uguale a quella del segmento:
$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2\cdot\frac{h}{2}.$$



Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo VAB (figura a lato), scriviamo la relazione fra il raggio di base r, l'altezza h del segmento e il raggio della sfera R:

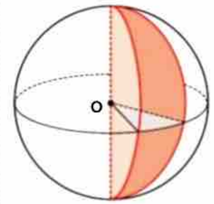
$$\overline{AC}^2 = \overline{CB}\cdot\overline{VC} \;\rightarrow\; r^2 = (2R-h)\cdot h.$$



Sostituendo nella formula precedente, deduciamo una formula più semplice:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).$$

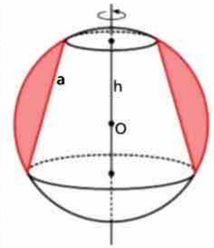
- **Volume dello spicchio sferico**
Si può dimostrare che i volumi degli spicchi appartenenti a una stessa sfera, o a sfere di raggio congruente, sono proporzionali ai diedri corrispondenti. Indicato con V_s il volume dello spicchio, con R il raggio della sfera, α_{rad} e $\alpha°$ le ampiezze del diedro in radianti e in gradi, si ha:
$$V_s : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha_{\text{rad}} : 2\pi \;\rightarrow\; V_s = \frac{2}{3}\alpha_{\text{rad}}R^3;$$
$$V_s : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha° : 360° \;\rightarrow\; V_s = \frac{\alpha}{270°}\pi R^3.$$



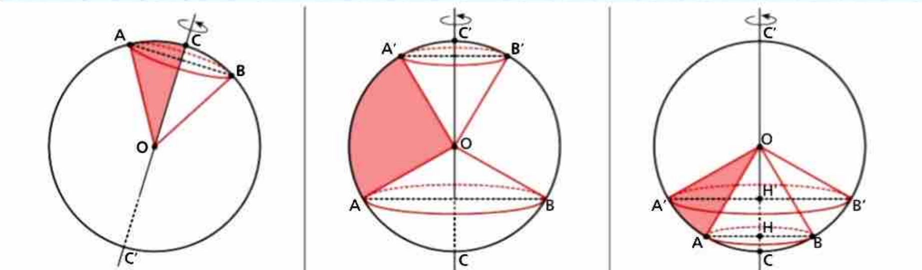
- **Volume dell'anello sferico**
In una sfera, facendo ruotare di 360° un segmento circolare attorno a un diametro del cerchio di appartenenza che non attraversi il segmento stesso, si ottiene un solido detto **anello sferico**. Possiamo ottenerlo anche considerando un segmento sferico a due basi e il tronco di cono inscritto le cui basi coincidono con quelle del segmento: la parte di sfera limitata dalla superficie laterale del tronco e dalla zona sferica corrispondente al segmento è un anello sferico.

Indicato con a l'apotema del tronco e con h l'altezza, sottraendo il volume del tronco a quello del segmento, è possibile ricavare la formula del **volume dell'anello sferico**:

$$V = \frac{1}{6}\pi a^2 h.$$



- **Volume del settore sferico**
Il **settore sferico** è quel solido che si ottiene facendo ruotare di un angolo giro un settore circolare attorno a un diametro del cerchio a cui appartiene ma che non lo attraversa. Il volume di un settore si può ottenere come somma o differenza del volume di altri solidi. Possiamo distinguere tre casi.



a. Il volume del settore sferico $OACB$ è la somma dei volumi del segmento sferico ACB e del cono AOB.

b. Il volume del settore sferico $AOBB'A'$ è la differenza fra il volume del segmento sferico $ABB'A'$ e i volumi dei due coni AOB e $A'OB'$.

c. Il volume del settore sferico $OBB'AA'$ è la differenza fra il volume del settore sferico $OA'CB'$ e quello del settore sferico $OACB$.

TEORIA IN SINTESI

Mappa dei fondamentali
Mappa interattiva

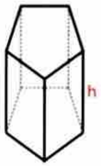
- **Rette e piani nello spazio** possono essere tra loro **incidenti**, **paralleli** o **coincidenti** a seconda che abbiano, rispettivamente, un solo punto (o una sola retta) in comune, non abbiano punti in comune o abbiano tutti i punti in comune.
  - Una retta incidente a un piano in un punto è **perpendicolare** al piano quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per quel punto.
  - **Teorema delle tre perpendicolari**: se dal piede di una perpendicolare a un piano si manda la perpendicolare a una qualunque retta del piano, quest'ultima è perpendicolare al piano contenente le prime due.

- Dati due semipiani dello spazio aventi la stessa origine, un **diedro** è ognuna delle due parti, compresi i semipiani, in cui essi dividono lo spazio.
La **sezione** di un diedro è *l'angolo ottenuto dall'intersezione del diedro con un piano che interseca il suo spigolo*. Una sezione è **normale** se ottenuta come intersezione tra il diedro e un piano perpendicolare al suo spigolo.

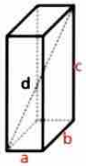
- Un **poliedro** è una figura solida delimitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni poligono non attraversi il solido.
  - Un **prisma** è un poliedro delimitato da due **basi** che sono poligoni congruenti posti su piani paralleli e da **facce laterali** che sono parallelogrammi. La distanza fra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma.
  - Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, la **base**, e da **facce laterali** triangolari che hanno in comune il **vertice della piramide** e hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base. La distanza fra il vertice e il piano della base è l'**altezza** della piramide.
  - Un **tronco di piramide** è limitato da due poligoni simili fra loro e posti su piani paralleli (le **basi** del tronco) e da **facce laterali** che sono trapezi.

- I **solidi di rotazione** sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta.
  - Un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un **rettangolo** attorno a uno dei suoi lati.
  - Un **cono** è generato dalla rotazione completa di un **triangolo rettangolo** attorno a uno dei suoi cateti.
  - Una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un **semicerchio** attorno al suo diametro.

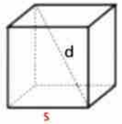
- **Aree e volumi dei solidi**



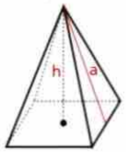
Prisma retto
$A_\ell = 2p \cdot h$
$A_t = A_\ell + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$



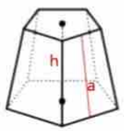
Parallelepipedo rettangolo
$A_t = 2(ac + ab + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



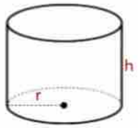
Cubo
$A_t = 6s^2$
$V = s^3$
$d = s\sqrt{3}$



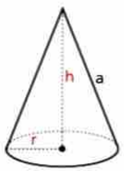
Piramide retta
$A_\ell = p \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b$
$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$



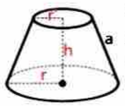
Tronco di piramide retta
$A_\ell = (p + p') \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} h(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b})$



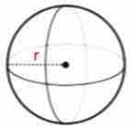
Cilindro
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = 2\pi r \cdot h$
$A_t = 2\pi r(h + r)$
$V = \pi r^2 \cdot h$



Cono
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = \pi r a$
$A_t = \pi r(a + r)$
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$



Tronco di cono
$A_\ell = \pi a(r + r')$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$



Sfera
$A = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

ESERCIZI

11 Attività interattive, 6 Prova tu
1 Attività con la calcolatrice grafica

1 Punti, rette, piani nello spazio

1 attività interattiva

Teoria a pagina 1155

1 **VERO O FALSO?**
a. Dati due piani che si intersecano, per la loro intersezione passano infiniti piani. V F
b. Se due rette nello spazio non si intersecano, allora sono parallele. V F
c. Due rette parallele a uno stesso piano sono parallele. V F
d. Se due piani hanno in comune tre punti non allineati, allora coincidono. V F
e. Se due piani hanno in comune due punti, allora ne hanno infiniti. V F

2 **TEST** Le rette *r* e *s* sono parallele, mentre le rette *r* e *t* sono incidenti. Allora *s* e *t* sono:
A incidenti.
B sghembe.
C parallele o incidenti.
D incidenti o sghembe.

3 **TEST** Il piano α e i due piani distinti β e γ sono incidenti. Allora:
A β e γ sono incidenti.
B $\alpha \cap \beta \cap \gamma$ è una retta.
C β e γ possono essere paralleli o incidenti.
D $\alpha \cap \beta \cap \gamma$ può essere una retta o l'insieme vuoto.

4 **VERO O FALSO?** Nello spazio:
a. due punti individuano sempre una retta. V F
b. tre punti individuano un piano o una retta. V F
c. una retta è parallela a un piano se non ha punti in comune con esso. V F

SPIEGA PERCHÉ

5 Tre punti dello spazio appartengono contemporaneamente a due piani incidenti α e β. Cosa si può dire dei tre punti?

6 Considera due rette complanari *a* e *b*. Se una retta *c* è complanare ad *a*, è complanare anche a *b*? Esamina i casi possibili.

7 Considera due rette sghembe *r* e *s*. Se una retta *t* è sghemba con *r*, è sghemba anche con *s*? Illustra i casi possibili.

8 Sono dati tre piani distinti α, β e γ. Cosa rappresenta $\alpha \cap \beta \cap \gamma$? Illustra tutti i casi possibili.

9 Tre punti non allineati *A*, *B* e *C* appartengono a un piano α. Siano *D* un punto esterno ad α, *E* un punto appartenente al segmento *AD* e *F* un punto interno al segmento *BC*. Qual è l'intersezione dei piani *ADF* e *BCE*?

Dimostrazioni

I FONDAMENTALI — **Prova tu** *fai un esercizio simile interattivo*

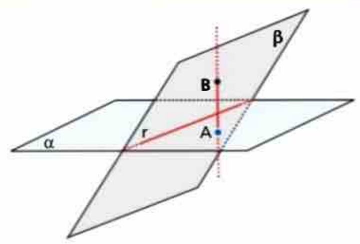
Dimostrare nello spazio

Siano α e β due piani incidenti e *r* la loro retta intersezione. Scelti sul piano α un punto *A* e sul piano β un punto *B*, non appartenenti a *r*, dimostriamo che la retta *AB* e la retta *r* sono sghembe.

> SEGUE

Nel procedimento della dimostrazione per assurdo si suppone che la tesi non sia valida, con l'obiettivo di contraddire l'ipotesi.

Ragioniamo per assurdo. Se le due rette non fossero sghembe, allora sarebbero complanari.
Supponiamo che AB e r appartengano a uno stesso piano: questo dovrebbe contenere r e i due punti A e B.
Poiché $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, i due piani α e β dovrebbero coincidere, contro l'ipotesi che α e β siano incidenti lungo una retta e quindi distinti. Pertanto la retta AB è sghemba rispetto a r.



10 Dati una retta r e un punto $P \notin r$, dimostra che esiste uno e un solo piano passante per r e P.

11 Dimostra che, se due rette si incontrano in un punto, allora sono complanari.

12 Dati due piani α e β incidenti nella retta r, da un punto P non appartenente ai piani conduci una retta parallela a r. Dimostra che tale retta è parallela sia ad α sia a β.

13 Sono dati quattro punti non complanari. Dimostra che tre qualunque di essi non possono essere allineati.

14 Dimostra che un semispazio è una figura convessa.

15 Due rette parallele a e b intersecano una terza retta c. Dimostra che a, b e c sono complanari.

16 Due rette r e s appartenenti al piano α si intersecano nel punto P. Dimostra che, se una retta t che non giace su α interseca sia r sia s, allora t deve passare per P.

17 Sono dati due punti P e Q appartenenti al piano α e un punto R non appartenente ad α. Dimostra che esiste un unico piano β contenente P, Q e R.

2 Perpendicolarità e parallelismo

1 attività interattiva

Perpendicolarità tra retta e piano

Teoria a pagina 1157

18 **TEST** Siano dati nello spazio una retta r ed un suo punto A. Di rette passanti per A e perpendicolari alla retta r ne esistono:

A una sola.
B due sole.
C tre sole.
D infinite, tutte appartenenti ad uno stesso piano.
E infinite, non tutte appartenenti ad uno stesso piano.

(Università di Roma, Facoltà di Ingegneria, Corso propedeutico di Matematica)

19 **TEST** Se le rette a e b si incontrano in P, le rette perpendicolari ad a e b passanti per P sono:

A una.
B due.
C infinite.
D bisogna sapere se $a \perp b$ o no.

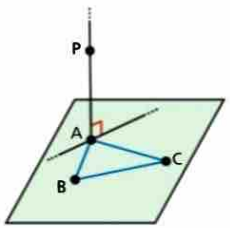
20 **TEST** Se, nello spazio, le tre rette r, s, t sono tali che $r \perp s$ e $s \perp t$, allora:

A $r \perp t$.
B s è perpendicolare al piano formato dalle rette r e t.
C r e t sono sghembe.
D $r \,//\, t$.

21 Dati un punto P e una retta r nello spazio, stabilisci quante rette passanti per P e perpendicolari e incidenti a r esistono se:
a. $P \in r$; **b.** $P \notin r$.

22 Un rettangolo $ABCD$ giace sul piano α. Traccia la retta a perpendicolare ad α e passante per A e considera su di essa un punto P. Di che tipo sono i triangoli PBC e PDC?

23 Nella figura, la retta PA è perpendicolare al piano in cui giace il triangolo ABC. Di che tipo sono i triangoli APC e APB?

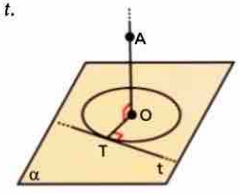


Dimostrazioni

24 Su un piano α sono date una circonferenza di centro O e una retta t tangente in T alla circonferenza. Preso un punto A sulla retta perpendicolare ad α e passante per O, dimostra che $AT \perp t$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO
Rappresentiamo la situazione nella figura e tracciamo il raggio OT.
- $AO \perp OT$ perché ____ è perpendicolare ad α;
- ____ $\perp t$, essendo t la tangente in T alla circonferenza.

Allora, per il teorema delle tre perpendicolari, la retta t è perpendicolare al piano ____; in particolare $AT \perp t$.



25 Considera una circonferenza di diametro AB su un piano α. Traccia per A la perpendicolare ad α e considera su di essa un punto P. Preso un punto C sulla circonferenza, dimostra che $PC \perp BC$.

26 Considera una circonferenza di centro O su un piano α e traccia la perpendicolare ad α passante per O. Presi due punti P e Q sulla circonferenza e un punto A sulla perpendicolare, dimostra che $AP \cong AQ$.

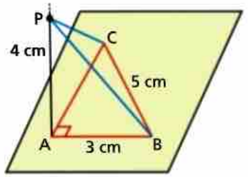
27 Due rette incidenti, a e b, sono perpendicolari a una retta c nel loro punto di intersezione P. Dimostra che, se una retta d passante per P non è complanare ad a e b, allora non può essere perpendicolare a c.

28 Considera due piani, α e β, incidenti in r e un punto $P \in r$. Detta t la perpendicolare ad α condotta da P, dimostra che t non può essere perpendicolare a β.

29 Considera due piani, α e β, incidenti in r e un punto P esterno ai due piani. Traccia da P le perpendicolari PH e PK ai due piani e da H e K le perpendicolari alla retta r. Dimostra che tali perpendicolari intersecano r in uno stesso punto A.

Con le misure

30 Nella figura, la retta PA è perpendicolare al piano in cui giace il triangolo rettangolo ABC. Calcola la lunghezza di PB e PC. [5 cm; $4\sqrt{2}$ cm]



31 Il quadrato $ABCD$ di lato 6 cm giace sul piano α. Traccia la retta per A perpendicolare ad α e considera su di essa il punto P tale che $AP = 6$ cm. Determina la lunghezza del segmento PC. [$6\sqrt{3}$ cm]

32 Il punto A appartiene alla perpendicolare al piano α condotta per il centro O di una circonferenza C giacente su α. Sapendo che $AO = 12$ cm e che la distanza di A da un punto $B \in C$ è di 13 cm, calcola la lunghezza del raggio di C. [5 cm]

Parallelismo tra retta e piano

Teoria a pagina 1159

33 **TEST** r e s sono rette parallele al piano α, allora:

A $r \,//\, s$.
B r e s sono complanari.
C r e s sono parallele a tutte le rette di α.
D nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

34 **TEST** La retta r è parallela al piano α e la retta s è perpendicolare a r. Allora:

A $s \,//\, \alpha$.
B $s \perp \alpha$.
C s interseca sicuramente α.
D s può essere incidente o parallela ad α.

35 **VERO O FALSO?**

a. Se $a \,//\, b$ e $b \,//\, c$, allora le rette a, b e c sono complanari. V F
b. Se due piani α e β sono paralleli, allora ogni retta di α è parallela a ogni retta di β. V F
c. Esistono infiniti piani paralleli a un dato piano α. V F
d. Due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele tra loro. V F
e. Due piani perpendicolari a una stessa retta sono paralleli tra loro. V F

97 TEST È un prisma regolare:
- A ogni parallelepipedo.
- B un prisma che ha per base un triangolo equilatero.
- C un prisma che ha gli spigoli laterali perpendicolari alla base.
- D un prisma retto che ha per base un pentagono regolare.

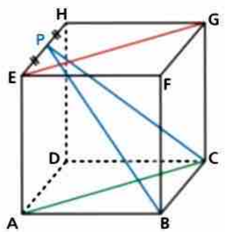
98 TEST Una piramide può essere regolare se:
- A ha base rettangolare.
- B la proiezione del vertice sulla base cade fuori dalla base.
- C ha base quadrata.
- D uno spigolo laterale è perpendicolare alla base.

SPIEGA PERCHÉ

99 Una piramide a base romboidale può essere retta? Può essere regolare?

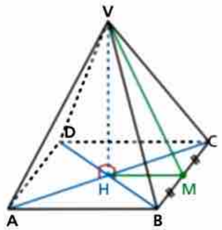
100 Una piramide avente come base un trapezio isoscele può essere retta? In quale caso?

101 Osserva il cubo nella figura.



a. AC e CG sono perpendicolari?
b. Qual è l'angolo formato dai piani ABC e PBC?
c. Le rette AC e PC sono complanari?
d. Le rette AC ed EG sono sghembe?
e. Qual è l'intersezione tra il piano ABP e la faccia $ADHE$?

102 Osserva la piramide a base rettangolare nella figura.



a. VH e HM sono perpendicolari? HM e BC sono perpendicolari? Che cosa deduci su VM e BC?
b. Qual è l'angolo formato dal piano VBD con la base della piramide?
c. VM è l'apotema?
d. Cosa puoi dire dei piani VBD e VAC?
e. La retta BC è parallela al piano ADV?

103 Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria, 2003, quesito 2)

Simmetrie

104 TEST I solidi seguenti hanno tutti un centro di simmetria, tranne uno. Quale?
- A Cubo.
- B Ottaedro regolare.
- C Tetraedro regolare.
- D Prisma esagonale regolare.

105 TEST I solidi seguenti ammettono tutti almeno un piano di simmetria, tranne uno. Quale?
- A Parallelepipedo.
- B Prisma retto.
- C Piramide quadrangolare regolare.
- D Piramide pentagonale regolare.

106 Un cubo ammette 9 assi e 9 piani di simmetria. Individuali e rappresentali graficamente.

107 Individua i piani e gli assi di simmetria di un prisma regolare con n facce laterali quando n è pari e quando è dispari.

108 Quanti piani di simmetria ammette un parallelepipedo rettangolo?

109 In quali casi una piramide regolare con n facce laterali ammette un asse di simmetria?

Dimostrazioni

110 Dimostra che in un parallelepipedo retto le diagonali sono congruenti a due a due.

111 Disegna un parallelepipedo e un piano che incontra i quattro spigoli laterali del parallelepipedo. Dimostra che la sezione ottenuta (ossia la figura intersezione fra il solido e il piano) è un parallelogramma.

112 Dimostra che le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli fra loro congruenti.

113 Dimostra che la somma delle facce di un triedro è minore di un angolo giro. Estendi la dimostrazione al caso di un angoloide.

114 Disegna una piramide $VABC$ a base triangolare ABC, in modo tale che VA sia l'altezza della piramide. Traccia l'altezza AH del triangolo. Dimostra che VH è l'altezza del triangolo BCV. (*Suggerimento*. Utilizza il teorema delle tre perpendicolari.)

115 Dal vertice A del quadrato $ABCD$ traccia la retta perpendicolare al piano su cui giace il quadrato. Scegli un punto V su tale retta. Dimostra che le facce laterali della piramide $ABCDV$ sono triangoli rettangoli a due a due congruenti.

RISOLVI IN 3 PASSI

1. Disegna la figura e dimostra che i triangoli ABV e ADV sono rettangoli e congruenti per il primo criterio di congruenza.
2. Dimostra che i triangoli BCV e CDV sono congruenti per il terzo criterio.
3. Dimostra che $V\widehat{B}C$ è un angolo retto considerando che il segmento BC è parallelo ad AD e che AD è perpendicolare al piano ABV.

116 Dimostra che un parallelepipedo è rettangolo se e solo se le diagonali sono congruenti.

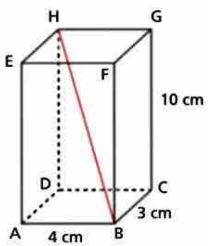
117 Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2002, quesito 9)

118 Dimostra che il solido ottenuto congiungendo i centri delle facce di un tetraedro è un tetraedro.

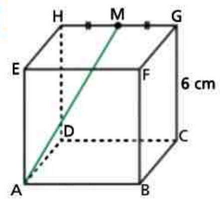
Con le misure

119



Trova la lunghezza della diagonale BH del parallelepipedo rettangolo in figura. $[5\sqrt{5}$ cm$]$

120



Dato il cubo nella figura, calcola la lunghezza del segmento AM. [9 cm]

121 Una piramide regolare a base quadrata ha lo spigolo laterale congruente allo spigolo di base lungo 18 cm. Calcola la lunghezza dell'apotema e dell'altezza della piramide. $[9\sqrt{3}$ cm; $9\sqrt{2}$ cm$]$

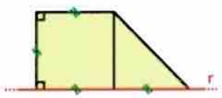
122 Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D. $\left[\frac{s}{\sqrt{3}}\right]$

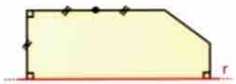
(Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2005, quesito 2)

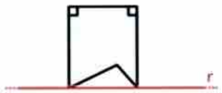
143 Rotazione di un quadrato intorno alla retta:
a. passante per i punti medi di due lati opposti (rotazione di 180°);
b. passante per un vertice e parallela alla diagonale opposta a quel vertice.

144 Rotazione di un rettangolo intorno alla retta:
a. di un lato;
b. parallela a un lato e non intersecante il rettangolo.

Disegna e descrivi i solidi ottenuti dalla rotazione di 360° delle seguenti figure intorno all'asse *r*.

145


146


147


148 Determina quanti e quali sono gli assi di simmetria di cono, cilindro e sfera.

149 Descrivi la figura che si ottiene intersecando un cilindro con un piano parallelo:
a. all'asse del cilindro;
b. alle basi del cilindro.

150 Un cono può avere centro di simmetria? E un cilindro?

151 Descrivi la figura che si ottiene sezionando un cono con un piano passante per il vertice e che interseca la base del cono.

Dimostrazioni

152 Dimostra che un piano che interseca una sfera individua sulla superficie della sfera una circonferenza.

153 Dimostra che, sezionando una sfera con due piani equidistanti dal suo centro, si ottengono due cerchi congruenti.

154 Dimostra che ogni cono può essere inscritto e circoscritto a una sfera.

155 Dimostra che ogni cilindro può essere inscritto in una sfera. In quale caso può anche essere circoscritto a una sfera?

Con le misure

156 Determina la lunghezza dello spigolo di un cubo inscritto in una sfera con raggio lungo 7 cm. $\left[14\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ cm}\right]$

157 Una sfera di raggio 30 cm è tagliata da un piano che dista 5 cm dal centro della sfera. Trova la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio determinate dall'intersezione tra piano e sfera. $[10\sqrt{35}\pi\text{ cm}; 875\pi\text{ cm}^2]$

158 Un cilindro con raggio di base di 4 cm e altezza di 14 cm è inscritto in un parallelepipedo. Di che parallelepipedo si tratta? Calcola la lunghezza di una sua diagonale. [18 cm]

159 Sezionando un cilindro di raggio 3 cm con un piano perpendicolare alle basi e passante per i loro centri, si ottiene un rettangolo di area 36 cm^2. Calcola l'altezza del cilindro. Di che tipo di cilindro si tratta? [6 cm]

160 Calcola il rapporto tra l'apotema di una piramide regolare quadrangolare e l'apotema del cono equilatero circoscritto a essa. $\left[\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$

RISOLVI IN 4 PASSI

1. In un cono equilatero indica con *r* il raggio di base e scrivi altezza e apotema in funzione di *r*.
2. Osserva che una piramide quadrangolare regolare, inscritta in un cono, ha come base un quadrato inscritto nel cerchio di base del cono. Calcola il lato del quadrato inscritto.
3. Calcola l'apotema della piramide che ha la stessa altezza del cono.
4. Determina il rapporto tra l'apotema della piramide e l'apotema del cono.

161 Un cono con raggio di base di 5 cm ha altezza doppia rispetto al diametro di base. Calcola la lunghezza del suo apotema. $[5\sqrt{17}\text{ cm}]$

FAI IL PUNTO SULLE COMPETENZE

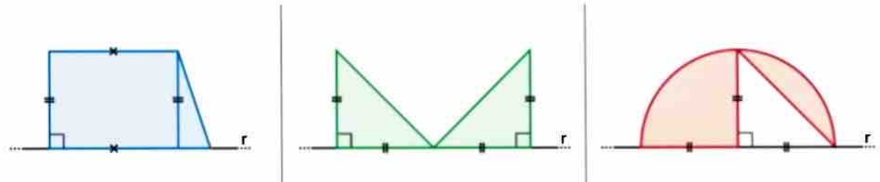
Prima di iniziare, esercitati su laZ Esercizi

Poliedri e solidi di rotazione

1 VERO O FALSO?
a. La somma degli angoli delle facce di un poliedro è sempre maggiore di 360°. V F
b. Un ottaedro regolare ha 8 facce, 12 spigoli e 6 vertici. V F
c. Un solido di rotazione ha tutte le superfici curve. V F
d. Se un triangolo rettangolo viene ruotato attorno a uno dei suoi lati, si ottiene sempre un cono. V F

2 TEST Considera il triangolo che ha un lato coincidente con la diagonale della faccia di un cubo e un vertice nel centro della faccia opposta. Di che tipo di triangolo si tratta?
A Triangolo rettangolo e isoscele.
B Triangolo scaleno e rettangolo.
C Triangolo isoscele e non rettangolo.
D Triangolo equilatero.

3 Disegna e descrivi i solidi ottenuti dalla rotazione di 360° intorno all'asse *r* delle seguenti figure.



a b c

4 Calcola il raggio di una sfera in cui è inscritto un cono con l'altezza congruente al diametro di base, sapendo che il raggio di base del cono misura 6 cm. [7,5 cm]

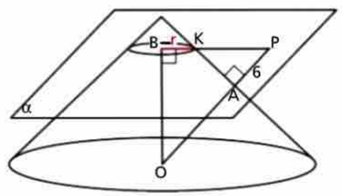
5 Considera un solido composto da due piramidi rette e congruenti le cui basi coincidono. Tagliando il solido con un piano che passa per i vertici delle piramidi e per due punti di tangenza della circonferenza inscritta nella base, si ottiene una sezione di area 108 m^2. La figura sezionata ha le diagonali che sono una i $\frac{2}{3}$ dell'altra. Determina la lunghezza dell'apotema delle piramidi. $[3\sqrt{13}\text{ m}]$

6 Un cilindro alto 12 cm è inscritto in un parallelepipedo rettangolo la cui diagonale è lunga 18 cm. Calcola il raggio di base del cilindro. $\left[\frac{3\sqrt{10}}{2}\text{ cm}\right]$

7 Considera un parallelepipedo rettangolo in cui i lati di base sono $AB = 8$ cm e $BC = 5$ cm e l'altezza è $CG = 12$ cm. Se K è il punto di incontro delle diagonali di una faccia, qual è l'ampiezza dell'angolo $G\widehat{K}B$, dove GB è la diagonale della faccia opposta a quella in cui giace K? [78°]

8 La base $ABCD$ della piramide $ABCDE$ è un rettangolo di lati $AB = CD = 4$ cm e $BC = AD = 12$ cm. Lo spigolo AE è lungo 3 cm ed è perpendicolare al piano della base.
Verifica che le facce laterali della piramide sono triangoli rettangoli.

9 Nel cono in figura, la sezione tagliata da un piano α parallelo alla base ha il raggio r di 4 dm. Considera un punto P che giace sul piano α tale che il segmento OP, con O centro del cerchio di base, è un segmento perpendicolare all'apotema del cono nel punto A e che $PA = 6$ dm. Inoltre, indicati con B il centro della sezione e con K l'intersezione del segmento PB con la superficie laterale del cono, si ha $\overline{PB} = 2\overline{AK}$. Determina la distanza del piano α dalla base del cono. [13,6 dm]



7 Aree dei solidi

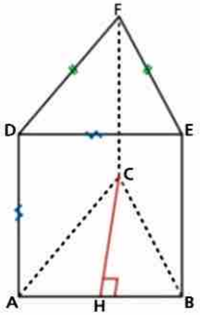
Aree di prismi

Teoria a pagina 1176 1 attività interattiva

Prisma retto

Determina l'area della superficie totale dei seguenti prismi retti.

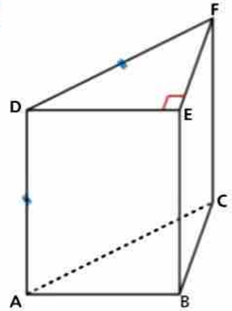
162



$AB = 16$ cm
$CH = 15$ cm

[1040 cm^2]

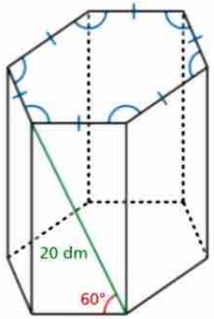
163



$AD = 20$ cm
$DF \cong 2EF$

[$300(\sqrt{3}+2)$ cm^2]

164



[$900\sqrt{3}$ dm^2]

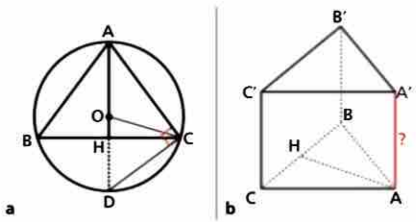
165 SPIEGA PERCHÉ Due prismi con area totale rispettivamente di 100 cm^2 e 400 cm^2 sono simili tra loro. Qual è il rapporto tra le loro altezze?

166 Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio 6 dm. Sapendo che l'altezza relativa alla base del triangolo è lunga 8 dm e l'area della superficie totale del prisma è $112\sqrt{2}$ dm^2, calcola l'altezza del solido.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Consideriamo il triangolo isoscele, di altezza $AH = 8$ dm, che è la base del prisma ed è inscritto nel cerchio di raggio $CO = 6$ dm. Prolunghiamo l'altezza AH fino a incontrare in D la circonferenza (figura **a**). Il triangolo ACD è ______ in quanto inscritto in una semicirconferenza.

Applichiamo il primo teorema di Euclide (un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa) al triangolo ACD, ponendo $\overline{AC} = x$:



$\_\_\_ : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD} \quad \rightarrow \quad 8 : x = x : 12,$

$x^2 = 96 \quad \rightarrow \quad x = 4\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = 4\sqrt{6}.$

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo ACH:

$\overline{CH}^2 = \_\_\_ - \overline{AH}^2 = (4\sqrt{6})^2 - 8^2 = 96 - 64 = 32 \quad \rightarrow \quad \overline{CH} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = 8\sqrt{2}.$

Per calcolare l'altezza del prisma dobbiamo conoscere la superficie laterale, che si calcola con la formula $A_l = \_\_\_ - 2A_b$:

$A_b = 8\sqrt{2}\cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 32\sqrt{2}, \qquad A_l = 112\sqrt{2} - 64\sqrt{2} = 48\sqrt{2}.$

Calcoliamo l'altezza $\overline{AA'} = \frac{A_l}{\_\_\_}$:

$$\overline{AA'} = \frac{48\sqrt{2}}{8\sqrt{6}+8\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{6}\ \_\_\ \sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{12}-2)}{4} = \frac{3(2\sqrt{3}-2)}{2} = 3(\sqrt{3}-1).$$

L'altezza del prisma è $3(\sqrt{3}-1)$ dm.

167 Un prisma regolare ha per base un triangolo equilatero, il cui lato è i $\frac{2}{7}$ dell'altezza del solido. Sapendo che la superficie totale del prisma è $(168+8\sqrt{3})$ dm^2, determina la lunghezza degli spigoli del prisma. [4 dm; 14 dm]

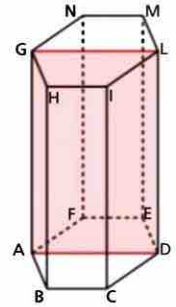
168 Un prisma esagonale regolare ha l'apotema della base di $10\sqrt{3}$ dm. Determina la superficie totale del solido, sapendo che la sua altezza è i $\frac{9}{5}$ dello spigolo di base. [$240(5\sqrt{3}+18)$ dm^2]

169 Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele le cui basi sono lunghe 18 dm e 12 dm, mentre i lati obliqui formano un angolo di 60° con la base maggiore. Determina l'altezza del solido, sapendo che la superficie totale è $370\sqrt{3}$ dm^2. [$\frac{20\sqrt{3}}{3}$ dm]

170 Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele in cui la base minore sta alla maggiore come 1 sta a 8. L'altezza del solido è metà della base minore e $\frac{1}{8}$ dell'altezza del trapezio, e l'area della superficie laterale è $2(9+\sqrt{113})$ cm^2. Determina la lunghezza della base maggiore del trapezio. [16 cm]

171 Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele in cui i lati congruenti stanno alla base come 13 sta a 10. L'altezza del solido è 3 cm e l'area della superficie totale è 696 cm^2. Determina l'altezza relativa ai lati congruenti del triangolo di base. [$\frac{240}{13}$ cm]

172 Nel prisma regolare in figura, il rettangolo $ADLG$ ha area di 160 cm^2 e il rapporto tra AD e AG è $\frac{5}{8}$. Trova l'area della superficie totale del prisma. [$(480+75\sqrt{3})$ cm^2]



Parallelepipedo retto e cubo

173 VERO O FALSO?

a. Raddoppiando l'altezza di un parallelepipedo rettangolo, la superficie totale raddoppia. V F
b. Raddoppiando lo spigolo di un cubo, la superficie totale quadruplica. V F
c. Due cubi hanno superfici totali uguali se e solo se hanno lo spigolo congruente. V F
d. Due parallelepipedi con diagonali congruenti hanno la stessa superficie totale. V F

174 Un cubo di spigolo 1 m ha la superficie totale equivalente all'area di un quadrato di lato l. Quanto misura l? [$\sqrt{6}$ m]

175 ARCHITETTURA La *Kaaba*, che significa «cubo», è un edificio sacro dell'Islam che si trova a La Mecca. Ha i lati di circa 11,3 m e 12,9 m e un'altezza di 13,1 m. Le sue pareti laterali sono ricoperte da un tessuto pregiato detto *kiswa*. Determina la superficie della stoffa, supponendo che ricopra esattamente le pareti. [634 m^2]

176 EDUCAZIONE FINANZIARIA COSTI Mario vuole ritinteggiare la cameretta di suo figlio, che ha i lati di 4 m e il soffitto a un'altezza di 2,7 m. Ha inoltre una porta di 80 cm per 2 m e una finestra quadrata di lato 1,5 m. Se l'imbianchino chiede 4 €/m^2, quanto spenderà Mario? [221,40 €]

48 **FISICA** DILATAZIONE TERMICA Un cubo di rame ha un volume di $1{,}72 \cdot 10^{-3}$ m^3 quando la temperatura è di 12 °C. Se la temperatura aumenta di 400 K, qual è, con tre cifre significative, la nuova lunghezza dello spigolo del cubo? Qual è stato il suo aumento percentuale?

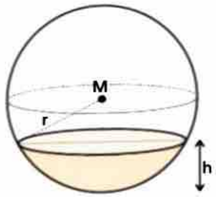
Coefficiente di dilatazione lineare del rame: $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

[0,121 m; 0,68%]

49 In un parco giochi viene posizionato un parasole triangolare, per ombreggiare una sabbiera. Sotto la pioggia battente, il tendone si deforma e si crea una sacca d'acqua che non può defluire. La parte superiore della sacca è orizzontale e approssimativamente circolare, con un diametro di 50 cm. Nel suo punto più basso è profonda 5 cm. Per semplicità la sacca d'acqua è considerata un segmento sferico. Indica quanti litri d'acqua si trovano nella sacca.

(Germania, Baviera, *Abitur, Gymnasium, 2018, prova* B, *Geometria, gruppo* 1, *esercizio* 1)

[$\simeq$ 5 L]

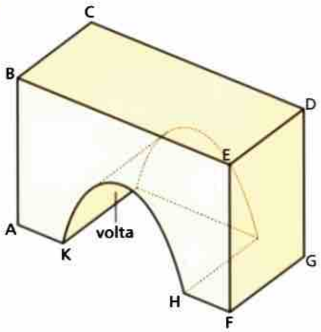


50 Tra i giocattoli di Lucia ci sono dei mattoncini per le costruzioni, come quello schematizzato in figura, a forma di parallelepipedo e con una sezione semicilindrica circolare. Le sue lunghezze sono:

$AB = 4$ cm, $BE = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $AK = HF = 2$ cm.

a. Calcola il volume del mattoncino.
b. Per poter costruire un tunnel, Lucia pittura di grigio la volta di alcuni mattoncini.
Con un decilitro di colore è possibile colorare una superficie di 40 decimetri quadrati. Calcola quanti mattoncini Lucia riesce a pitturare con mezzo decilitro di vernice.

[a) $10(16 - \pi)$ cm^3; b) 63 mattoncini]



51 **TECNOLOGIA** Un sistema di pannelli solari verrà installato su un terreno rettangolare lungo 25 m e largo 10 m. Ciascun pannello ha una forma rettangolare di dimensioni 2 m e 1 m. I pannelli devono essere disposti inclinati di 30° per massimizzare l'assorbimento della luce del Sole, in modo che il lato inclinato risulti quello di 2 m, ed essere rialzati rispetto al terreno di 50 cm nel loro punto più basso, come in figura.

a. Calcola il numero massimo di pannelli solari che possono essere installati sul terreno, considerando che devono essere disposti in file parallele, affiancati senza sovrapporsi e mantenendo uno spazio di 50 cm tra le file per la manutenzione. Osserva inoltre che ci sono più possibilità per la disposizione dei pannelli in file.
b. Calcola il volume totale dello spazio sottostante un singolo pannello.

[a)110 pannelli; b) $\sqrt{3}$ m^3]

52 **FISICA** TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE Un cilindro contiene 2 moli di gas perfetto monoatomico alla temperatura $T = 15$ °C. Il cilindro è chiuso con un tappo che può scorrere senza attrito; inizialmente il tappo si trova a 15 cm dalla base del cilindro. Tramite una trasformazione isobara il gas viene portato alla temperatura di 120 °C. Determina lo spostamento del tappo e il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione.

[5,5 cm; $1{,}7 \cdot 10^3$ J]

Accetti la sfida?

Altri esercizi simili su **laZ Tutor di matematica**

53 Da un cilindro di altezza 5 e raggio 12 viene sottratto un cono che ha per base una delle due basi del cilindro e per vertice il centro dell'altra base. All'interno del solido così ottenuto sono inserite alcune sfere tali che, se il loro raggio fosse più grande anche di pochissimo, non ce ne starebbe neppure una all'interno del solido. Qual è il massimo numero di sfere che si possono inserire all'interno del solido?

(*Olimpiadi della matematica, fase nazionale a squadre, semifinale*, 2019)

[15]

PROVE DI VERIFICA

Risultati delle prove

Prova A 1 ora

Il tuo punteggio: .... / 100

1 VERO O FALSO?

a. Due rette parallele non sempre sono complanari. V F
b. Esiste almeno un poliedro regolare con facce esagonali. V F
c. Ogni prisma retto ha un centro di simmetria. V F
d. Un cubo ha 12 diedri retti. V F
e. Raddoppiando l'altezza di un prisma, il suo volume raddoppia. V F .... / 15

2 Disegna e definisci il solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo intorno alla retta passante:
a. per il lato perpendicolare alle basi;
b. per la sua base maggiore. .... / 15

3 Considera gli estremi non in comune dei tre spigoli uscenti da uno stesso vertice di un cubo con spigolo di lunghezza 7 cm. Calcola il perimetro del triangolo che definiscono. .... / 20

4 Calcola l'area della superficie e il volume della sfera inscritta in un cubo con spigolo di 6 cm. .... / 15

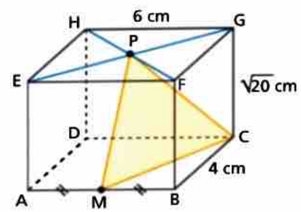
5 **FISICA** FLUIDOSTATICA Una sfera di massa $m = 1{,}8$ kg è completamente immersa nell'olio senza affondare. Sapendo che la densità dell'olio è di $8{,}0 \cdot 10^2$ kg/m^3, calcola il raggio della sfera. .... / 15

6 Un prisma retto ha per base un rombo con le diagonali di 3 cm e 8 cm e l'altezza lunga il doppio della diagonale maggiore del rombo. Calcola l'area di base di un cilindro alto 12 cm ed equivalente al prisma dato. .... / 20

Prova B 1 ora

Il tuo punteggio: .... / 100

1 Osserva il parallelepipedo rettangolo a fianco.
a. Calcola il perimetro del triangolo *PMC*.
b. I punti *P*, *M*, *C* e *G* sono complanari?



.... / 20

2 Un prisma esagonale retto ha la base di 50 cm^2. Calcola l'area di base di un cono equivalente al prisma e avente altezza doppia rispetto al prisma. .... / 15

3 Una sfera e un cono equilatero sono equivalenti. Determina il rapporto fra i loro raggi. .... / 15

4 **FISICA** DILATAZIONE TERMICA Una sfera di ottone ha un raggio di 3 mm quando la temperatura è di 16 °C. La sfera viene riscaldata fino a raggiungere la temperatura di 180 °C. Calcola la variazione del volume e quella del diametro, sapendo che il coefficiente di dilatazione lineare dell'ottone è di $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}. .... / 15

5 In un cilindro l'altezza è i $\frac{3}{2}$ del diametro di base e la superficie laterale è equivalente alla superficie di una sfera di raggio $\frac{5}{6}\sqrt{6}$ cm. Calcola il volume del cilindro. .... / 15

6 In una piramide quadrangolare regolare gli spigoli laterali formano angoli di 60° con il piano della base. Il volume della piramide è di $18\sqrt{3}$ cm^3. Calcola l'area del triangolo ottenuto sezionando la piramide con un piano passante per il vertice della piramide e per due vertici opposti del poligono di base. .... / 20

MINISIMULAZIONE DI MATEMATICA

Risultati della minisimulazione

Testo e risultati della minisimulazione di matematica e fisica

Problema

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

a. Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrivibile in una circonferenza γ.

b. Tale quadrilatero è anche circoscrivibile ad una circonferenza?

c. Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *dal problema* 2)

Quesiti

1 Un piccolo fermacarte di rame, di densità $\rho = 8{,}96\ \text{g/cm}^3$, ha la forma di un cono retto. Sulla base è presente una cavità di forma semisferica; il centro della base del cono e quello della semisfera coincidono.
Il raggio di base R del cono è lungo 2 cm e la sua altezza h è lunga 3 cm. Il raggio r della semisfera è la metà di R.
Determina la superficie totale e la massa dell'oggetto.

2 Un cono rotondo ha altezza $h = 5$ dm e raggio $r = 3$ dm. Si vuole diminuire la prima di quanto si aumenta il secondo in modo che il volume del cono aumenti del 30%. Si dica se la questione ammette soluzioni e, in caso affermativo, si dica quali sono.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria*, 2013, *quesito* 6)

3 Una piramide a base quadrata ha tutti gli spigoli uguali tra loro. Determina il rapporto tra il volume della piramide e quello di un cubo con lo stesso spigolo.

4 Il rapporto tra i volumi dei due solidi ottenuti dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno, rispettivamente, all'ipotenusa e al cateto minore è $\frac{1}{2}$.
Determina l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo.