



# **Dalla Concept Definition alla Concept Image: Il percorso (non sempre lineare) dell'apprendimento matematico**

Lezione Didattica della Matematica 1 - Maria Lucia Bernardi

21/10/2025

# Una domanda per rompere il ghiaccio

Il numero  $0.999\dots$  (con il 9 periodico)

a) È uguale a 1?

b) È più piccolo di 1?

# Concept Image e Concept Definition (Tall e Vinner, 1981)

## Concept Definition

"L'insieme di parole usate per specificare un concetto."

- È la definizione da manuale, accettata dalla comunità matematica.
- È precisa, rigorosa, stabile.

*Esempio (Continuità):*

"Una funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che  $|x - x_0| < \delta$  implica  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ."

## Concept Image

"L'intera struttura cognitiva nella mente di un individuo associata a un concetto."

- Include:

Immagini mentali: grafici, diagrammi (es. una parabola per  $y=x^2$ ).

Proprietà: idee associate (es. 'continua = non ha buchi').

Processi: algoritmi, procedure (es. come si calcola una derivata).

Esempi e controesempi che vengono in mente.

- È personale, si evolve nel tempo e... non è necessariamente coerente!

- **Evoked Concept Image:** La parte della Concept Image attivata in un dato momento per risolvere un problema.
- **Personal Concept Definition:** Il tentativo dello studente di verbalizzare, con parole proprie, la sua comprensione del concetto. Spesso è una descrizione della sua Concept Image.

# Fattori di conflitto e Conflitto cognitivo

- **Potential conflict factor:** Una parte della Concept Image che è in contraddizione con la Concept Definition (o con un'altra parte dell'immagine).  
*Esempio:* L'idea che 'la divisione rende i numeri più piccoli'. Questa immagine, formata lavorando con interi  $> 1$ , diventa un fattore di conflitto potenziale quando si affronta la divisione per frazioni proprie (es.  $10 \div 0.5 = 20$ ).
- **Cognitive conflict:** Il momento in cui lo studente si accorge della contraddizione perché due fattori in conflitto vengono evocati simultaneamente.

# Come interagiscono CI e CD? Un esempio concreto

## *Situazione iniziale: la mente dello studente*

Concept Image: Forte e implicita: "Gli assi di un sistema di coordinate sono sempre perpendicolari".

Concept Definition: Vuota.

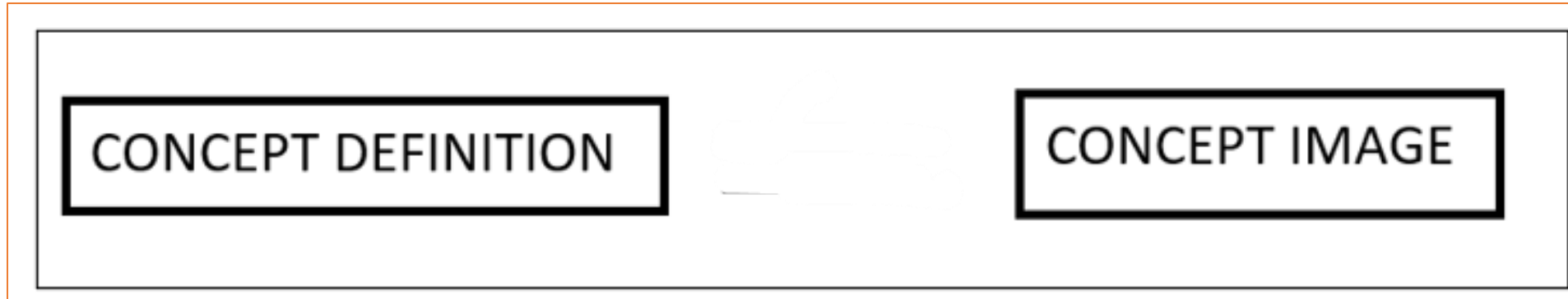
## *L'intervento: la definizione dell'insegnante*

"Un sistema di coordinate è l'intersezione di due qualsiasi rette nel piano."

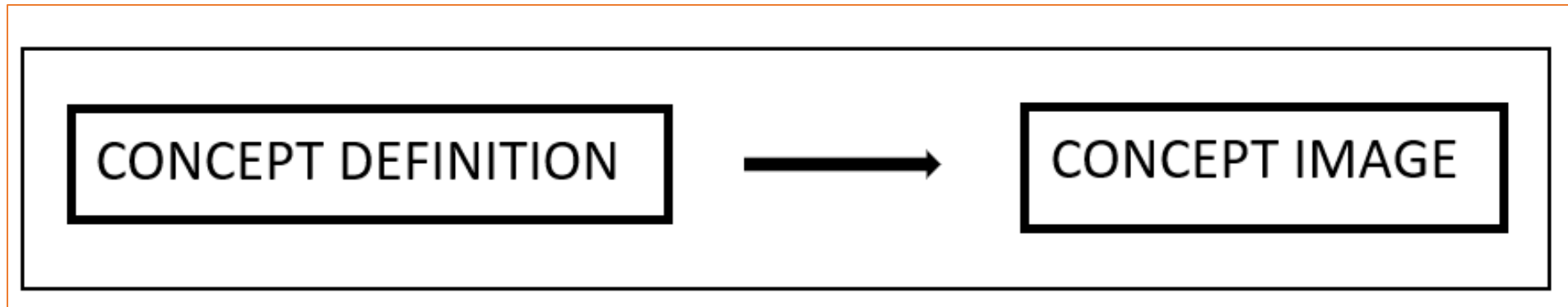
## *Cosa succede nella mente dello studente?*

1. Apprendimento significativo : La Concept Image si espande per includere assi obliqui.
2. Apprendimento mnemonico: La Concept Image non cambia; la definizione è immagazzinata a memoria e destinata a svanire.
3. Il doppio binario: Le due celle coesistono ma non comunicano.

# Modelli di apprendimento - 1

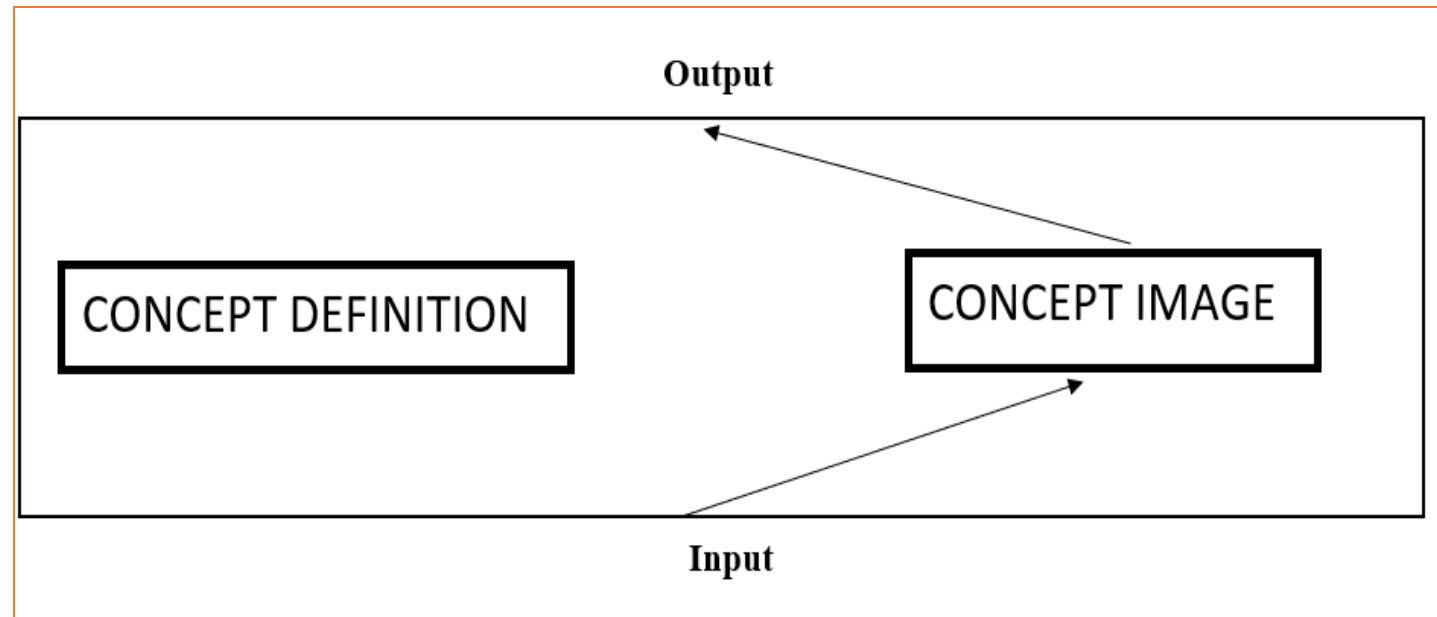


*Figura 1*



*Figura 2*

# Modelli di apprendimento - 2



*Figura 3*



# Modelli di apprendimento - 3

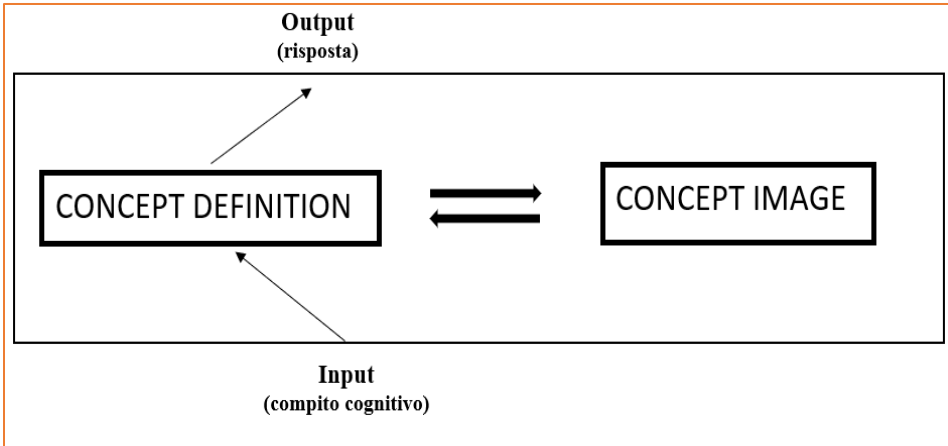


Figura 4

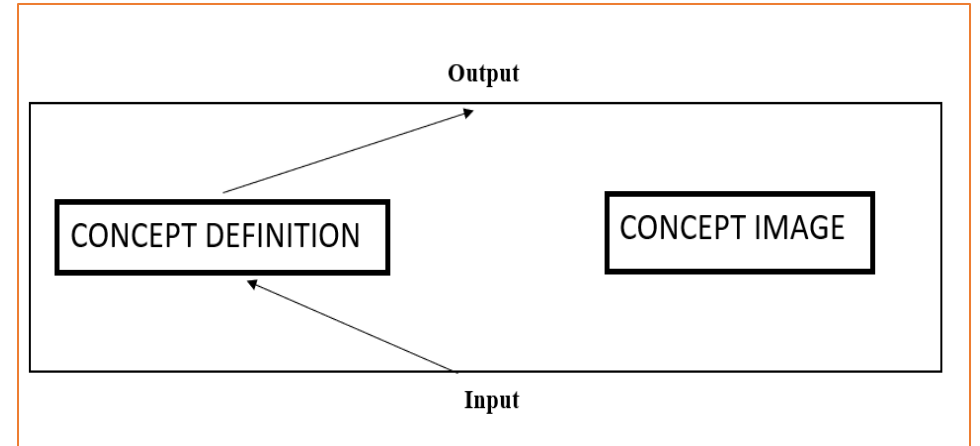


Figura 5

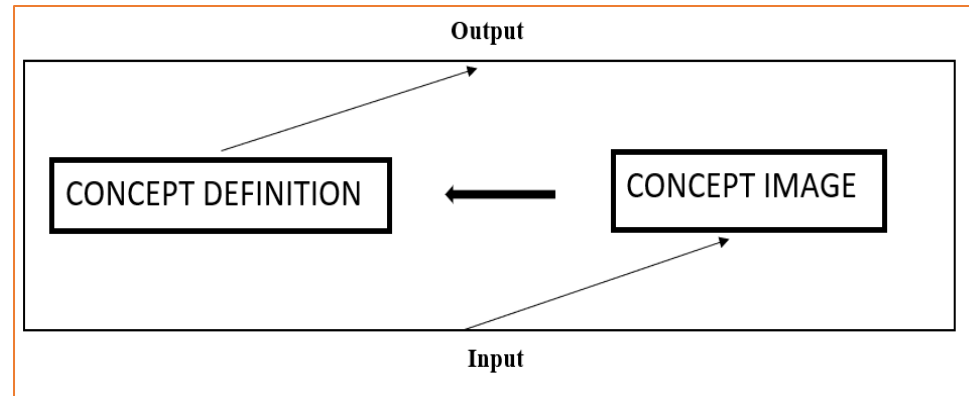


Figura 6

# Caso di studio 1: Il concetto di limite di una successione

**Concept Definition formale:** La definizione statica con  $\varepsilon$  e  $N$ . "Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $k$  tale che per ogni  $n > k$ ,  $|a_n - L| < \varepsilon$ ".

**Concept Image comune:** Un processo dinamico di avvicinamento.  
"Avvicinarsi sempre di più, senza mai raggiungere".

**Conflitto:** Cosa succede con la successione  $a_n = 5$  per ogni  $n$ ? Il suo limite è 5, ma lo raggiunge ad ogni termine. E la successione  $a_n = \sin(n\pi)/n$ ? Si avvicina a 0, ma lo raggiunge per ogni  $n$ .

# Caso di Studio 2: Il Concetto di Continuità

**Concept Definition formale:** Sia  $f$  una funzione definita in un intervallo  $I$  aperto, e sia  $x_0 \in I$ .  
La funzione  $f$  è continua nel punto  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Concept Image comune:** "Si può disegnare il grafico senza staccare la penna dal foglio".

"Non ha buchi, non ha salti".

A volte: "È definita da una singola formula".

# Caso di Studio 2: Il Concetto di Continuità

## *Controesempi che generano conflitto*

- $f(x) = \frac{1}{x}$ : È continua nel suo dominio ( $\mathbb{R}^*$ ), ma il grafico è in due pezzi. L'immagine della "penna" fallisce.
- Funzione di Dirichlet:  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ . Discontinua ovunque. Impossibile da disegnare. Sfida l'idea di continuità come proprietà "visibile".
- $f(x) = x$  definita solo su  $\mathbb{Q}$ . È formalmente continua su  $\mathbb{Q}$ , ma il suo grafico è una "polvere di punti". Non c'è nessuna linea da disegnare.

# Ora tocca a voi!

Dividetevi in tre gruppi

**Obiettivo:** Analizzare la Concept Image e i potenziali conflitti di un concetto matematico.

## Gruppo A: Funzioni

*Qual è la Concept Image più comune di "funzione" per uno studente liceale? (Probabilmente "una formula con la x"). In che modo questa immagine crea problemi con le funzioni definite a tratti, la funzione di Dirichlet, o le funzioni definite da grafici?*

## Gruppo B: Derivata

*La Concept Image di derivata è spesso "il coefficiente angolare della retta tangente". Come entra in conflitto questa immagine con le funzioni non derivabili in un punto (es.  $y = |x|$ ) o con la derivata come funzione a sua volta?*

## Gruppo C: Numeri reali

*La Concept Image della retta reale è quella di un "continuum" senza buchi. Come si può far capire a uno studente la differenza tra  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  usando questa teoria? Perché l'esistenza dei numeri irrazionali è così contro-intuitiva all'inizio?*

- Come lente di analisi didattica (per l'insegnante)
- Come framework di ricerca (per il ricercatore)

# La lente di analisi didattica

## *Analizzare gli errori degli studenti*

Spostare la domanda da "Cosa ha sbagliato?" a "Quale Concept Image ha generato questo errore?"

*Esempio:* Uno studente dice che  $f(x) = |x|$  non è derivabile in 0 "perché c'è una punta". Non sta sbagliando, sta descrivendo la sua Concept Image di derivabilità come qualcosa di "liscio" (assenza di spigoli), che si scontra con la definizione formale basata sul limite del rapporto incrementale.

## *Valutare criticamente i materiali didattici*

Chiedersi: "Quale Concept Image costruisce implicitamente questo libro di testo?"

Se un manuale presenta per 50 pagine solo funzioni continue, definite da una singola formula, sta involontariamente rafforzando un'immagine concettuale ristretta. La colpa non è dello studente se poi entra in crisi di fronte a una funzione definita a tratti.

## *Progettare interventi didattici mirati*

Anticipare i potenziali conflitti e progettare attività per farli emergere in un ambiente controllato.

*Esempio:* Sapendo che l'idea di limite come "processo che non raggiunge mai" è molto forte, un insegnante può introdurre presto una successione costante o una a termini alterni che tocca il limite, forzando una rinegoziazione della Concept Image iniziale.



# La lente di analisi didattica

- L'insegnante deve essere consapevole delle Concept Images degli studenti. Non sono "vasi vuoti".
- Insegnare solo la definizione formale è inefficace. Bisogna collegarla all'intuizione.
- I controesempi sono strumenti didattici fondamentali, non pignolerie. Servono a sfidare e arricchire le immagini mentali.
- È essenziale creare attività che facciano emergere le immagini concettuali degli studenti (discussioni, domande aperte).
- Il conflitto cognitivo non è un fallimento, ma un'opportunità d'oro per l'apprendimento.

## *Formulare domande di ricerca*

- Descrittive: "Qual è la Concept Image del concetto di infinito attuale tra gli studenti del primo anno di università?"
- Comparative: "La Concept Image di funzione continua è diversa tra studenti di ingegneria e studenti di matematica?"
- Sperimentali: "Un intervento didattico che utilizza software di visualizzazione dinamica modifica la Concept Image di convergenza in modo più efficace di un approccio tradizionale?"

## *Scegliere una metodologia di raccolta dati*

- Questionari mirati: Non domande di calcolo, ma domande che rivelano il pensiero (es. "Spiega con parole tue cos'è un limite", "Quale di queste funzioni è continua? Perché?").
- Interviste cliniche e "think-aloud protocols": Si chiede a uno studente di risolvere un problema pensando ad alta voce. L'obiettivo non è la soluzione, ma il processo di pensiero, le esitazioni, le immagini che evoca.
- Analisi di testi e discussioni in classe: Trascrivere e analizzare ciò che gli studenti dicono spontaneamente.

## *Analizzare i dati*

La teoria fornisce le categorie per l'analisi. Le risposte degli studenti non vengono classificate come "giuste" o "sbagliate", ma come "evidenza di una Concept Image di tipo A" o "manifestazione di un conflitto cognitivo tra l'immagine B e la definizione formale".

# Conclusione

Il numero  $0.999\dots$  (con il 9 periodico)

a) È uguale a 1?

b) È più piccolo di 1?

**GRAZIE PER L'ATTENZIONE**

*marialucia.bernardi@uniba.it*