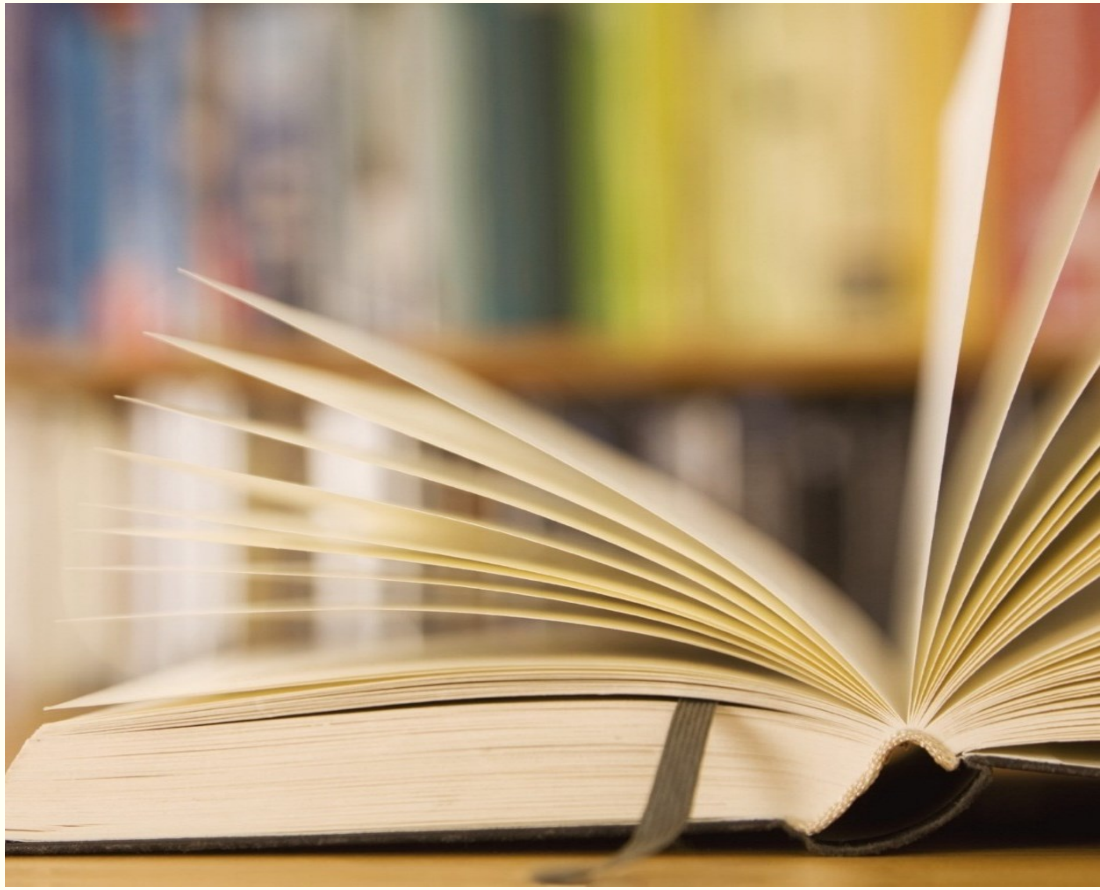
IL PROBLEMA DI FAGNANO

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore



Sui problemi di massimo e minimo

La leggenda narra che , nel secolo XIX a.C. la regina Didone, in fuga da Tiro, approdò sulle sponde dell'attuale Tunisia dove chiese al re Jarba che le fosse concesso un pezzo di terra per fondarvi il proprio regno. Il Re rispose che le avrebbe dato tutta la terra che lei fosse riuscita a circondare con una pelle di bue.

"taurino quantum possent circumdare tergo" (Eneide I, 367-368)

Taurino quantum possent circumdare tergo.
Sed vos qui tandem, quibus aut venistis ab oris,
Quove tenetis iter? Quaerenti talibus ille
Suspirans, imoque trahens a pectore vocem:
O Dea, si prima repetens ab origine pergam,
Et vacet annales nostrorum audire laborum:
Ante diem clauso componet vesper Olympo.
Nos Troia antiqua (si vestras forte per aures
Troiae nomen iit) diversa per aequora vectos
Forte sua libycis tempestas appulit oris.
Sum pius Æneas, raptos qui ex hoste Penates
Classe veho mecum,

Sui problemi di massimo e minimo

Didone si trovò dunque ad affrontare il seguente problema di ottimizzazione:

Data una retta r e una lunghezza L>0, tra tutte le curve piane di lunghezza L (la lunghezza del filo)che hanno entrambi gli estremi su r (il litorale), trovare quella che racchiude la massima area(l’appezzamento di terreno).

Astutamente Didone fece tagliare la pelle a strisce sottilissime con le quali formò un filo molto lungo , si pose su un tratto di litorale e delimitò un’area a semicerchio, avente come perimetro il nastro che aveva a disposizione. Ottenne così una superficie di terreno con la massima area sufficiente a fondare la nuova città che fu chiamata Cartagine.

Sui problemi di massimo e minimo

Il problema di Didone è noto come problema isoperimetrico:

Fra tutte le curve piane di ugual perimetro qual è quella che racchiude la massima area?

I Greci avevano capito che la soluzione era rappresentata dalla circonferenza (semicirconferenza nel caso di Didone), ma non ne possedevano una dimostrazione.

La soluzione geometrica rigorosa occupò i matematici per secoli. Vari tentativi di varia efficacia furono fatti da Archimede, Zenodoro, Pappo e poi in tempi più recenti da Eulero, Galileo, Legendre, L'Huilier, Riccati, Simpson, e, tra il 1838 e il 1841, Steiner fino a Hilbert.

Sui problemi di massimo e minimo

Le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore nell' interpretazione dei fenomeni naturali, sulla scia del principio aristotelico secondo cui

«la natura sceglie sempre la via più facile....nulla accade nell'universo che non faccia capo a qualche criterio di massimo o di minimo...» (Metafisica, Libro V)

Sui problemi di massimo e minimo

«Essendo la costruzione del mondo la più perfetta possibile, come quella di un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo» L. Eulero (1707-1783)

Nel ‘700 i problemi di massimo o di minimo divennero il perno delle discussioni matematiche.

Sui problemi di massimo e minimo

Il primo problema di massimo esplicitamente formulato è contenuto negli Elementi di Euclide, matematico alessandrino vissuto nel III secolo a.C. Euclide, raccogliendo tutto il patrimonio di sapere costruito dagli studiosi che lo precedettero, ci offre, con la sua monumentale opera, il primo esempio di quello che oggi diremmo un trattato scientifico per il metodo rigorosamente deduttivo usato

Sui problemi di massimo e minimo

Nel Libro VI dei suoi Elementi scrive:

Proposizione 27.
Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta (costruiti su parte della retta) e deficienti (dal parallelogramma costruito sull'intera retta) di figure parallelogrammatiche simili e similmente situate rispetto al parallelogramma descritto su metà della retta, ha area maggiore quel parallelogramma che è applicato a metà della retta e che è simile al difetto.

Interdisciplinarità e STE(A)M education

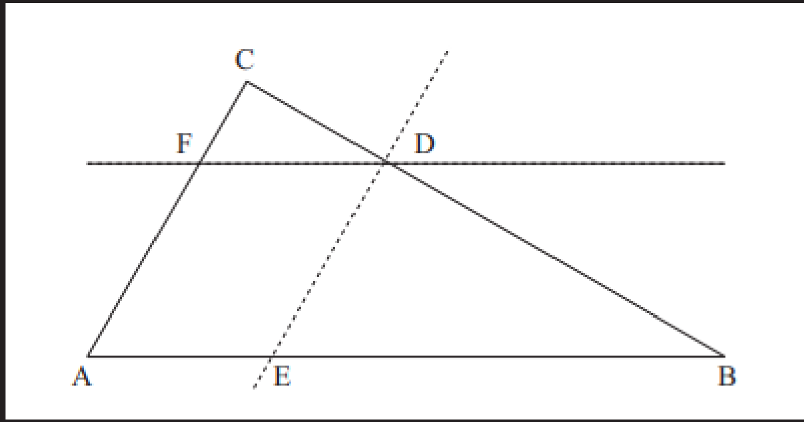
ESERCIZIO da proporre agli studenti

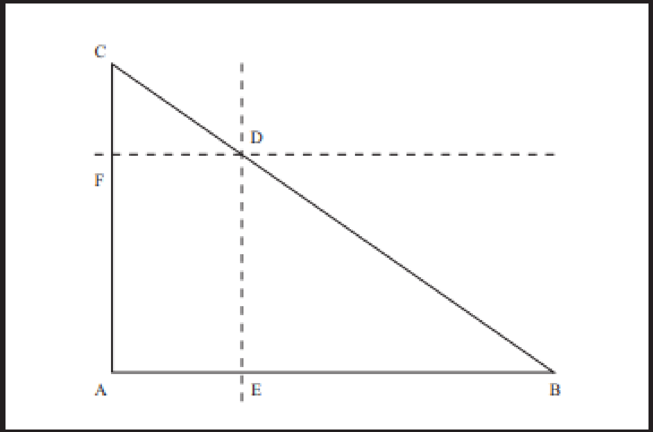
Tradurre con termini in uso nel linguaggio matematico attuale il teorema precedente e rappresentarlo graficamente.

Dato un triangolo ABC, se da un punto D del lato BC si tracciano le parallele ED ad AC, F D ad AB, l'area del parallelogramma AEDF è massima quando D è il punto medio di BC.

Sui problemi di massimo e minimo

La situazione è mostrata nella seguente Figura:





Nel caso particolare che AB = AC e l'angolo BAC è retto,allora tra tutti i rettangoli di perimetro dato, il quadrato è quello di area massima (nella Proposizione 27 equivale a richiedere che il parallelogramma dato sia un rettangolo), proprietà già implicitamente contenuta nella Proposizione 5 del Libro II degli Elementi.
Non è diffcile mostrare che fra tutti i triangoli con due lati assegnati, quello rettangolo avente per cateti tali lati ha area massima

Sui problemi di massimo e minimo

Ma tra le questioni note ai Greci si possono ricordare i seguenti problemi isoperimetrici:

fra tutti i poligoni convessi di n lati e di dato perimetro quello regolare racchiude l'area massima;

fra tutte le superfici piane, il cui contorno ha una data lunghezza, il cerchio ha l'area massima (problema di Didone);

fra tutti i solidi di data superficie la sfera ha il massimo volume.

Interdisciplinarità e STE(A)M education

Tra coloro che si interessarono di tali questioni ricordiamo Zenodoro (II secolo a.C.) che confrontò le superfici dei poligoni con ugual perimetro e dimostrò che l'area maggiore è racchiusa dai poligoni con maggior numero di lati e, fra tutti, dal cerchio, raggiungendo un'analoga conclusione (senza dimostrazione) per la sfera

Pappo nell'opera Collezioni matematiche il cui Libro V è dedicato proprio ai problemi di isoperimetria.

Si hanno anche altri risultati quali:
- fra tutti i triangoli di assegnato perimetro, con la stessa base, quello che ha area maggiore è il triangolo equilatero;
- fra i poligoni, quelli con area maggiore sono le gure convesse, in particolare i poligoni regolari;
- tutti i segmenti circolari limitati da un arco di data lunghezza il semicerchio ha l'area massima (ancora il problema di Didone)

Sui problemi di massimo e minimo

Successivamente all'opera di Euclide troviamo in Grecia il lavoro di Apollonio (circa 262 a.C. - 190 a.C.). L'opera che meritò ad Apollonio il titolo di Grande Geometra è intitolata Coniche. Di essa, però, nella lingua originale greca ci sono pervenuti soltanto i primi quattro degli otto libri di cui è composta, mentre degli altri si ha una traduzione araba

Nel I secolo d.C. Erone di Alessandria, interessato alle misure in ottica e in meccanica, trasse nella sua Catrottica un'importante conseguenza dalla legge della riflessione secondo cui **un raggio di luce proveniente da un punto P e incidente su uno specchio piano L in un punto R viene riflesso nella direzione di un punto Q tale che PR e QR formano con L angoli uguali**.

Erone mostrò che fra tutti i cammini possibili per andare da P a Q passando per lo specchio il cammino più breve è per cui gli angoli di incidenza e riessione sono uguali

Sui problemi di massimo e minimo

Dobbiamo attendere il XVII secolo per avere altri risultati interessanti; in quel periodo, infatti, Fermat dimostrò che anche la legge della rifrazione della luce può esser enunciata in termini di un principio di minimo

Nel secolo successivo Cramer mostrò che fra tutti i poligoni piani convessi aventi come lati n segmenti dati, ha area massima quello inscrivibile in un cerchio.

A Lhuilier, vissuto a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo, si deve l'opera di raccolta e riordino di quanto si conosceva no allora sui problemi degli isoperimetri nel piano e nello spazio.

Sui problemi di massimo e minimo

Il famoso studioso di geometria **Jacob Steiner**, operante a Berlino nella prima metà dell'800, trattò numerose questioni di massimo e minimo utilizzando modi diversi per stabilire le proprietà isoperimetriche del cerchio e della sfera dalle quali dedusse numerosi applicazioni.

Tre villaggi A, B, C devono essere congiunti da un sistema stradale di minima lunghezza totale.

Matematicamente il problema si traduce nel cercare, nel piano in cui giacciono i punti dati, un punto P tale che sia minima la somma $a + b + c$ delle distanze di P rispettivamente da A, B e C.

Sui problemi di massimo e minimo

Sulla scia della dimostrazione delle proprietà tangenziali dell'ellisse si può vedere che la soluzione al problema è la seguente:

se nel triangolo ABC tutti gli angoli sono minori di 120°, P è il punto che proietta ciascuno dei tre lati AB, BC, AC, secondo un angolo di 120°.

Se un angolo è maggiore o uguale a 120°, il punto P coincide con il vertice di tale angolo

Sui problemi di massimo e minimo

Il risultato di Steiner più famoso ottenuto per via sintetica è il teorema sugli isoperimetri, ovvero che tra tutte le figure piane di dato perimetro il cerchio è quello che racchiude l'area massima.

Sfortunatamente, infatti, Steiner ipotizzava l'esistenza della curva massimizzante, mentre ciò che dimostrò è il fatto che se tale curva esiste allora è una circonferenza.

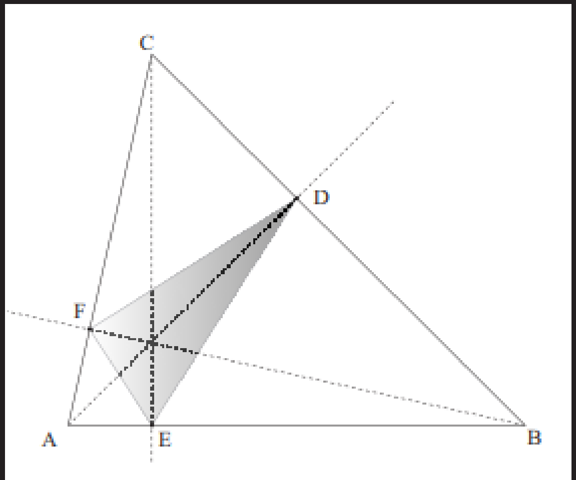
La dimostrazione di una curva massimizzante creò non pochi problemi ai matematici negli anni successivi fino a quando **Weierstrass** fece ricorso al calcolo delle variazioni.

Sui problemi di massimo e minimo

Hermann Schwartz, matematico di Berlino, che trattò e dimostrò il seguente problema (già noto e dimostrato geometricamente ma in maniera decisamente meno elegante):

dato un triangolo acutangolo ABC, iscrivere in esso un triangolo di perimetro minimo.

Egli dimostrò che esiste un solo triangolo di questo tipo e precisamente è quello avente i vertici ai piedi delle altezze del triangolo dato.



Sui problemi di massimo e minimo

IL PROBLEMA DI FAGNANO

Il **focus** di questa unità didattica interdisciplinare è un problema di minimo storicamente poco noto, detto **"Problema di Fagnano"**

Problema di minimo proposto da Giulio Carlo Fagnano nel 1775:

«Qual è il triangolo di perimetro minimo inscrivibile in un triangolo acutangolo?»

Geometria euclidea vs Analisi

Si dice che Fagnano lo risolse con l'analisi, ma di questa soluzione non ci sono tracce.

Il Problema di Fagnano

Partire dal contesto storico

Chi è Giulio Carlo Fagnano?

La sua attività matematica è principalmente legata allo studio di curve come la lemniscata. Ebbe 12 figli, tra cui vi era Giovanni. Quest'ultimo si interessò al problema sul triangolo posto dal padre.
L'unico documento dei Fagnano a noi giunto, nel quale si fa riferimento a tale problema, è riportato in
Giovanni Fagnano, *Nova Acta Eruditorum*, 1775, p. 281-303

Il Problema di Fagnano

Partire dal contesto storico

PROBLEMATA QVAEDAM AD METHODVM maximorum et minimorum ſpectantia: Auctore Archidiacono IOHANNE FRANCISCO de TVSCHIS a FAGNANO, ex S. Honorii Marchionibus, Patricio Romano et Senogallienſi.

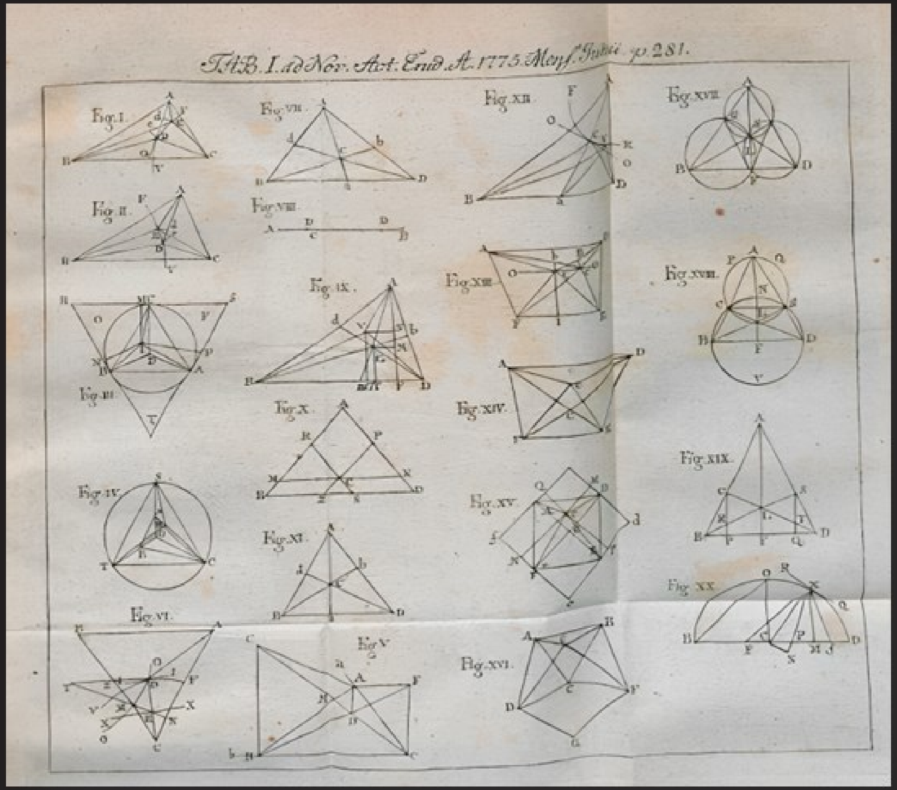
Articulus VIII. Tomi I. Eruditorum Diarii, quod Mutinae editur, occaſionem praebuit ſequentia publicandi Problemata, quae ſi communi infinitorum methodo tractarentur, vix ſine ambagibus expediri poſſent. Placuit quoque ſolutiones ex ſimplici Geometria depromptas adiungere, vt videant in ſublimiori Analyſi initiati, non eſſe illam omnino negligendam; aliquando enim euenit, vt illius ope elegantius et facilius quaedam ſoluantur problemata, quae aliter impervia credas.

Traduciamo il testo dal latino all’italiano:
«Alcuni problemi riguardanti il metodo dei massimi e dei minimi, di cui è autore l’arcidiacono Giovanni Francesco dei Toschi di Fagnano ... patrizio romano e di Senigallia.
L’articolo VIII del tomo I del diario degli Eruditi, che è stato edito a Modena, ha offerto l’occasione per pubblicare i seguenti problemi, che, se fossero trattati con il metodo degli infiniti, a stento potrebbero essere risolti senza incertezze.
È sembrato opportuno aggiungere anche soluzioni ricavate dalla geometria semplice, affinché gli iniziati all’analisi superiore si rendano conto che quella (cioè la geometria) non deve essere disprezzata del tutto; talvolta, infatti, capita che grazie ad essa si risolvano più facilmente ed elegantemente alcuni problemi che altrimenti si potrebbero ritenere impervi.»

Il Problema di Fagnano

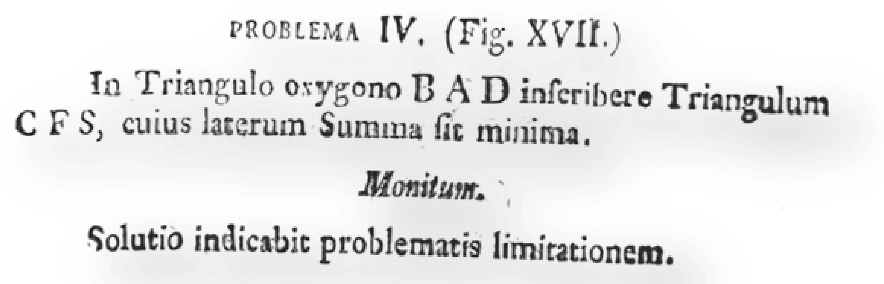
Partire dal contesto storico

L'articolo presenta dunque una raccolta di problemi, inclusi anche problemi di minimo/massimo, che Fagnano risolve utilizzando la geometria euclidea. In figura sono riassunti tutti i problemi affrontati nel paper.



Problemi risolti da Giovanni Fagnano utilizzando la geometria euclidea
Giovanni Fagnano, Nova Acta Eruditorum, 1775

Il Problema di Fagnano



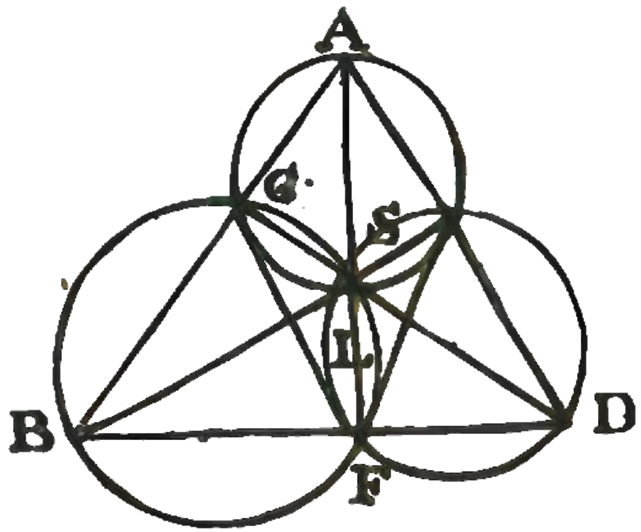
PROBLEMA IV. (Fig. XVII.)

In Triangulo oxygono B A D inſcribere Triangulum C F S, cuius laterum Summa ſit minima.

Monitum.

Solutio indicabit problematis limitationem.

Il problema di Fagnano è etichettato come «problema IV, Fig. XVII: In un triangolo acutangolo ABD inscrivere un triangolo CFS, la cui somma dei lati sia minima» (traduzione figura). Tuttavia, la risoluzione riportata da Fagnano al problema è alquanto complessa e, come tipico dell'epoca, utilizza le proprietà dei cerchi.



Problemi risolti da Giovanni Fagnano utilizzando la geometria euclidea
Giovanni Fagnano, Nova Acta Eruditorum, 1775

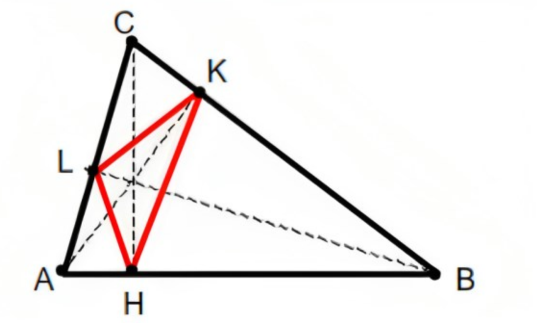
Il Triangolo ortico

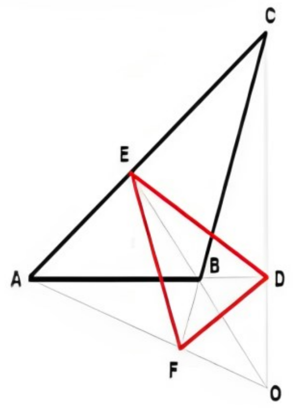
Dato un triangolo ABC, si definisce triangolo ortico la figura che si ottiene tracciando i tre segmenti che congiungono a due a due i piedi delle tre altezze del triangolo dato. Ci sono tre casi, a seconda del tipo di triangolo ABC:

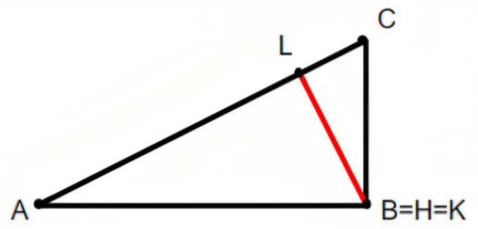
a) Triangolo ABC acutangolo: il Triangolo Ortico è interno al triangolo di riferimento

b) Triangolo ABC ottusangolo: il Triangolo Ortico è esterno al triangolo di riferimento

c) Triangolo ABC rettangolo: Il Triangolo Ortico degenera nell’altezza relativa all’ipotenusa







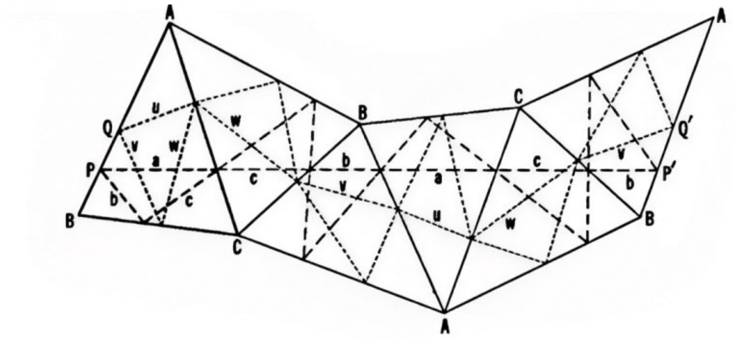
Dimostrazione geometrica I

The properties of the mirror image can be used to derive many interesting theorems simply and in a striking fashion. We shall use these properties to solve the problem of finding the triangle of minimal perimeter inscribed in a given acute-angled triangle. This is known as Fagnano's problem†.

† Proposed in 1775 by Fagnano, who solved it by calculus. The proof shown here is due to H. A. Schwarz. For another proof, also using reflections, see Coxeter [**6**, p. 21] or Kazarinoff [**18**, pp. 76–77] or Courant and Robbins [**4**, p. 347]. Schwarz's treatment was extended from triangles to $(2n + 1)$-gons by Frank Morley and F. V. Morley, *Inversive Geometry* (Ginn, Boston, 1933), p. 37.

“Geometry revisited” di Coxeter (Coxeter, 1967), pp.88 «due possibili risoluzioni, L. Fej´er e While H. A. Schwarz fornirono una dimostrazione indipendente del problema di Fagnano, utilizzando la geometria euclidea»

- Nel testo di Coxeter è riportata la soluzione di Schwarz, detta delle “riflessioni multiple”

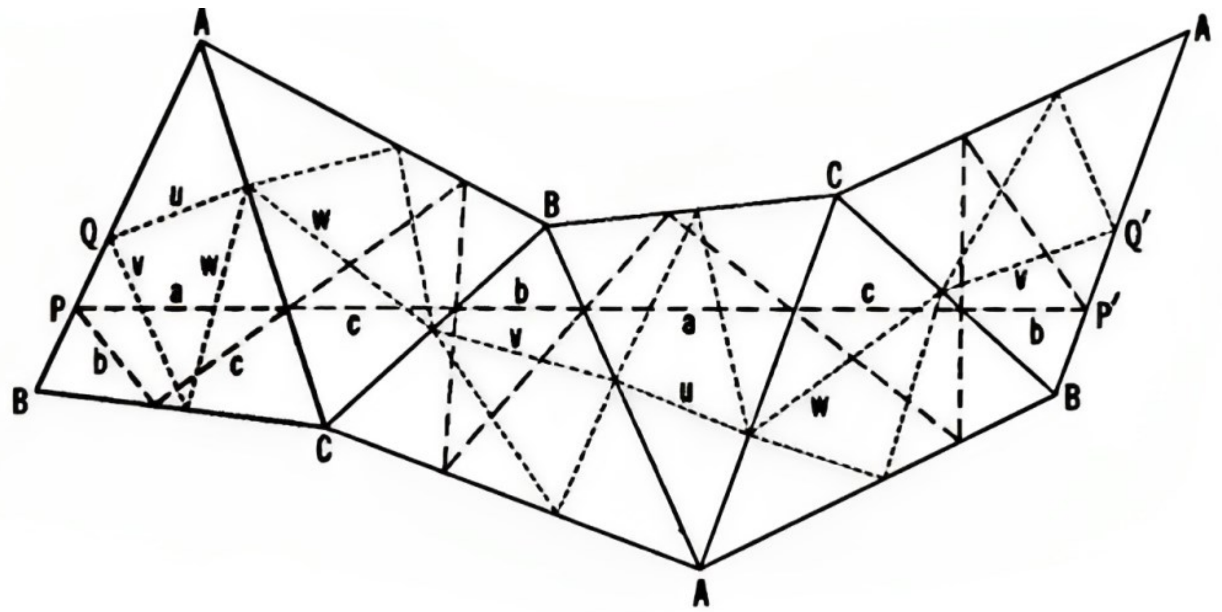


Dimostrazione geometrica I

For a solution (see Figure 4.5A), we begin with the arbitrary acute-angled triangle ABC, in which we have inscribed two triangles: the orthic triangle (dashed lines) and any other triangle (dotted lines). Let us reflect $\triangle ABC$, with contents, in its sides AC, CB, BA, AC, CB in succession. Now we inspect the diagram to see what this continued sequence of reflections has done to our triangles.

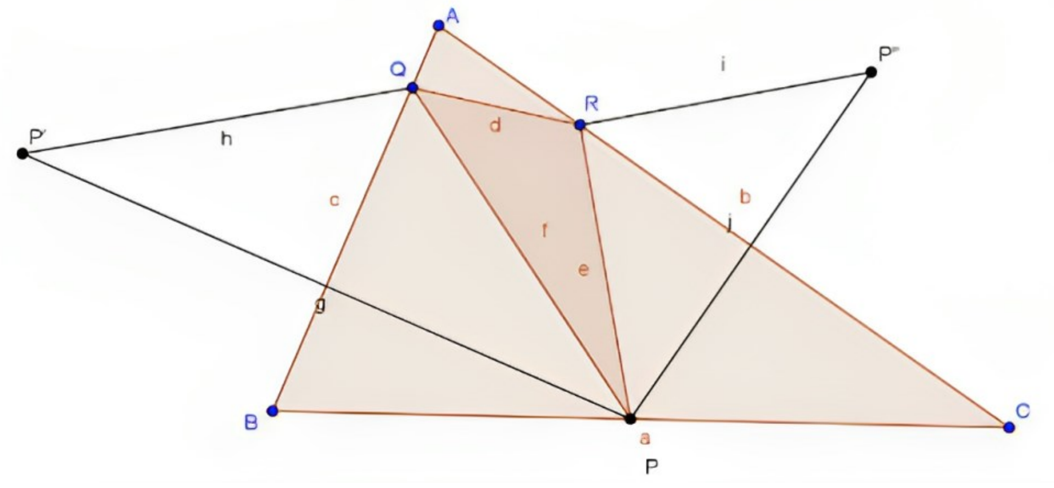
The zero sum of these four angles indicates that the final side BA is congruent *by translation* to the original side BA, and that pairs of corresponding points on these two sides will form a parallelogram such as $PP'Q'Q$.

It follows that, after the indicated reflections, the sides of the orthic triangle will, in order, lie on the straight line PP', shown in Figure 4.5A. Analogously, the sides of any other triangle, such as the dotted triangle in the figure, will form a broken line reaching from Q (on the original AB) to Q' (on the final AB). Since PQ is equal and parallel to $P'Q'$, the straight segment QQ' is equal to PP', which is twice the perimeter of the orthic triangle. This is clearly shorter than the broken line from Q to Q', which is twice the perimeter of the other triangle. Hence the triangle of minimal perimeter is the orthic triangle.



Dimostrazione geometrica II

Fissiamo un **punto** P sul **segmento** BC. Costruiamo P' per **simmetria assiale** di P rispetto ad AB e P'' per simmetria assiale di P rispetto ad AC. Il triangolo PQP' è isoscele, quindi $\boldsymbol{P'Q \cong PQ}$; analogamente $\boldsymbol{PR \cong P''R}$.
Pertanto, il perimetro del triangolo PQR è congruente a $P'Q + QR + RP''$. Tra tutti i triangoli inscritti in ABC, fissato P su BC, quelli con vertici Q ed R che appartengono alla retta PP' saranno i **triangoli di perimetro minimo**. Ovviamente questa proprietà è speculare anche per i vertici Q ed R. Pertanto, per ogni posizione di P su BC esiste ed è unico un triangolo di perimetro minimo. La soluzione al problema è da ricercare pertanto nella famiglia di triangoli con questa caratteristica, ottenuti al variare di P su BC.



Problema di Fagnano → Biliardo

Two Applications of Calculus to Triangular Billiards
Author(s): Eugene Gutkin
Reviewed work(s):
Source: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 7 (Aug. - Sep., 1997), pp. 618-622

We assume that the triangle T is acute, and view it as a billiard table. The pedal triangle T_1, which is inscribed in T, is then a periodic billiard orbit (see §2). Moreover, T_1 is the shortest such orbit. Even more remarkable, for the general triangular table, the pedal triangle is the only closed (prime) billiard orbit known!

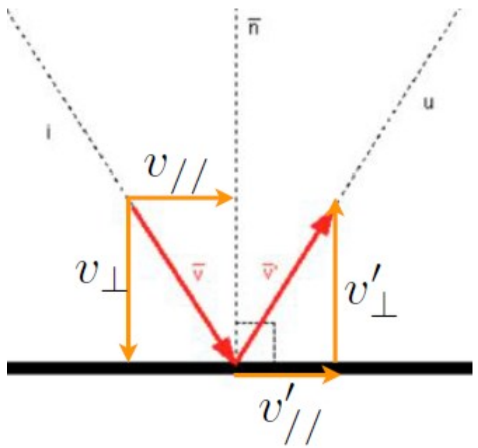
The first proof, by calculus, that among all inscribed triangles the pedal triangle has the least perimeter, is attributed to J. F. F. Fagnano, ca. 1775. In his honor, the problem just stated is often called the *Fagnano problem* [**4**], [**5**], [**15**]. Elementary geometric solutions were later given independently by H. A. Schwarz and L. Fejer [**14**]. Schwarz and Fejer did their work at the end of the 19-th century and in the beginning of the current one. Thus, along with Fagnano, they are the primeval researchers in polygonal billiards! Following tradition, we will call T_1 the *Fagnano orbit*. We reserve the name *Fagnano geodesic* for the Fagnano orbit, traced twice.

Problema di Fagnano → Biliardo

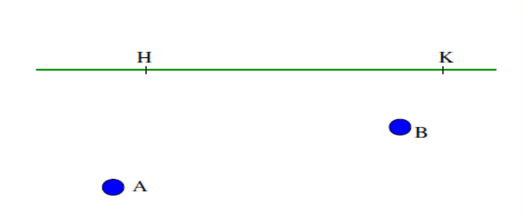
- Un **biliardo piano** è il sistema meccanico costituito da un **punto di massa *m*** che si muove in una **regione limitata R del piano**, con **R semplicemente connessa** e il bordo **dR** una **curva chiusa piana regolare**, tranne al più qualche punto.
- Si suppone che il **moto** all'interno di R sia **rettilineo e uniforme** (senza attrito) e che il punto, quando **urta** contro il bordo, rimbalzi in maniera **elastica** verso l'interno, seguendo le leggi dell'ottica geometrica, in particolare **le leggi di Snell per la riflessione**:

$x(t)=x_0+V_x t$
$y(t)=y_0+V_y t$
$V=\text{cost.}$
$a=0$

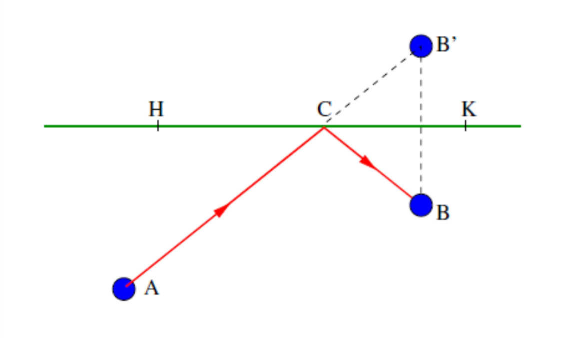
Prima legge di Snell
*Il raggio incidente, [il raggio rifratto], il raggio riflesso e la normale alla superficie che separa i due mezzi appartengono allo stesso piano, chiamato **piano di incidenza***
Seconda legge di Snell
L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenzav

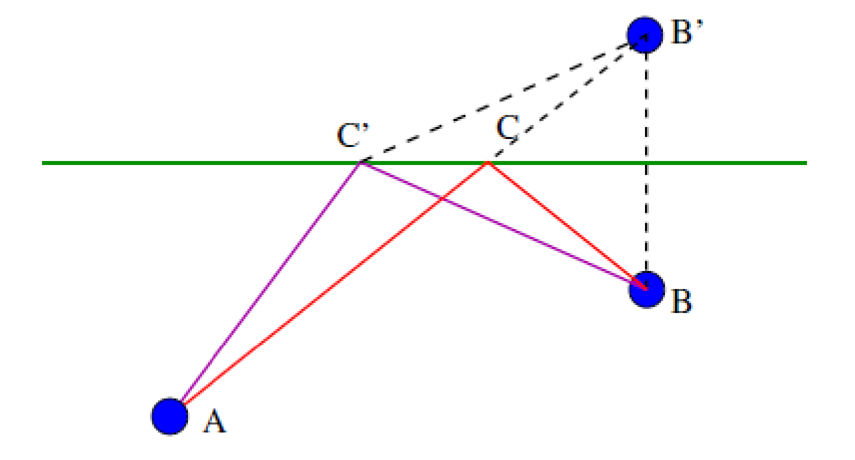


Giocare… “di sponda”



"Su quale punto della sponda HK occorre mirare in modo che la palla inizialmente in A raggiunga la posizione B?"





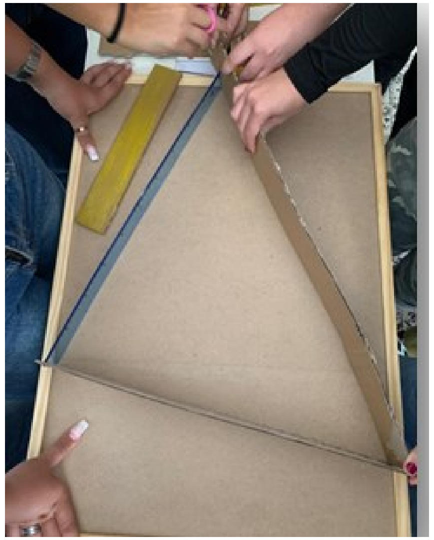
Principio di Minimo

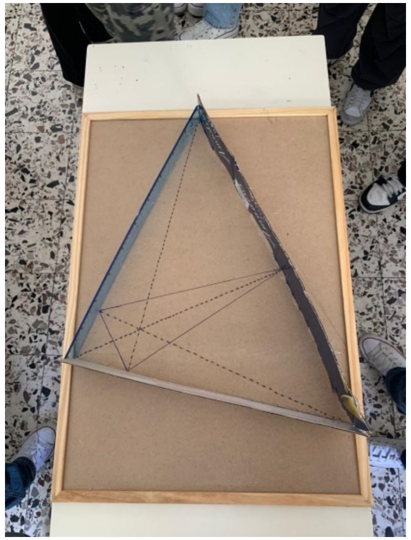
Il percorso ACB su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i percorsi che partono da A, toccano la sponda e raggiungono B; in Fig. è stato rappresentato anche un altro possibile percorso AC'B, per il quale non è rispettata la condizione di urto elastico (ossia non è valida la II legge di Snell).

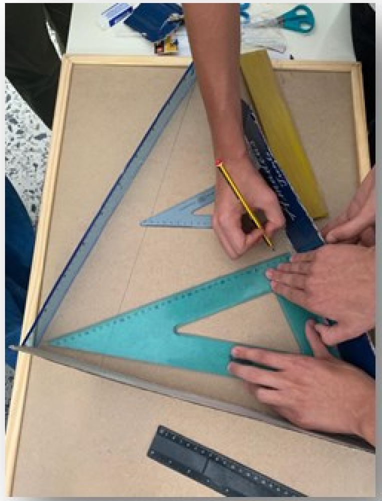
Nell'ottica geometrica, il **principio di Fermat** afferma che i raggi luminosi, nell'attraversare una sostanza, percorrono, fra tutte le traiettorie possibili, la curva che minimizza il tempo di percorrenza. Nelle sostanze il cui indice di rifrazione è costante, i raggi luminosi si propagano allora rettilinearmente e, quando incidono su una superficie che separa una sostanza omogenea da un'altra essi vengono riflessi secondo la legge di Snell.

Biliardo Triangolare

Per verificare che il triangolo ortico sia l’orbita chiusa di un biliardo triangolare, è stato realizzato con materiale povero un biliardo triangolare, con dei pennarelli è stato disegnato su di esso un triangolo ortico e, successivamente, è stata lanciata una biglia da un vertice del triangolo
È stato utilizzato il software Tracker per analizzare il moto della biglia lungo il percorso.



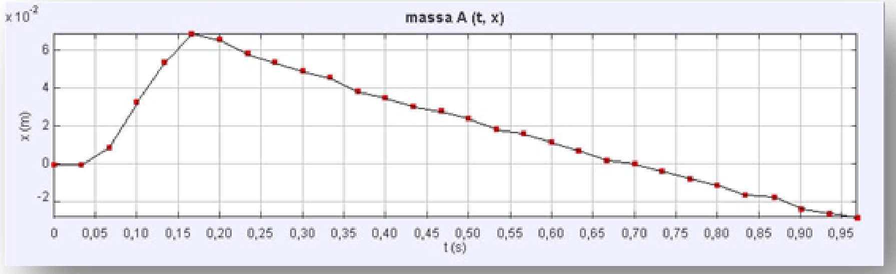


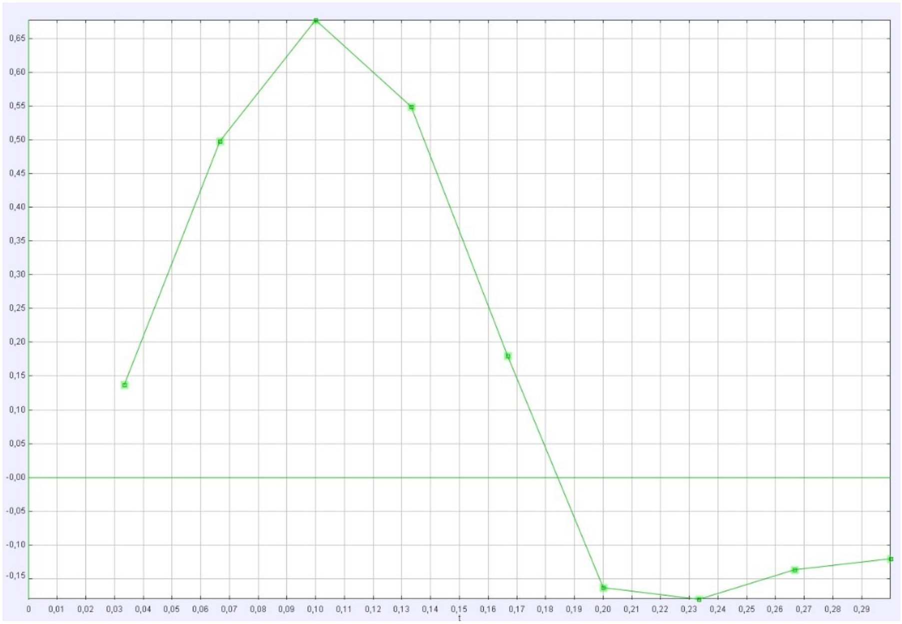


Biliardo Triangolare

Biliardo Triangolare

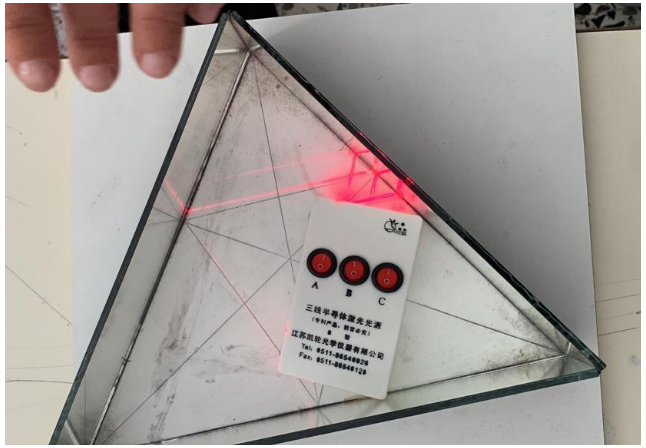
Verifichiamo la legge oraria della biglia (considerata punto materiale) utilizzando il software Tracker. Dall'analisi si può osservare che lungo i singoli tratti il moto è, entro gli errori sperimentali, un moto rettilineo uniforme, tuttavia la velocità del primo tratto non è uguale ed opposta a quella del secondo tratto, dunque non è rispettata la condizione di urto elastico, ciò a causa principalmente dell'attrito.



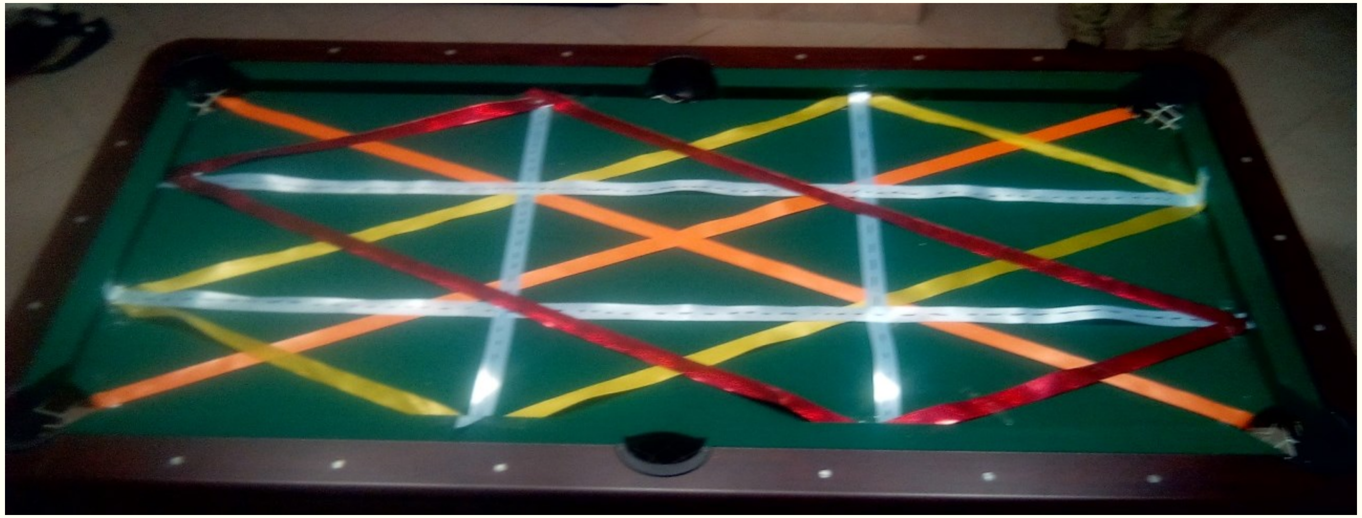


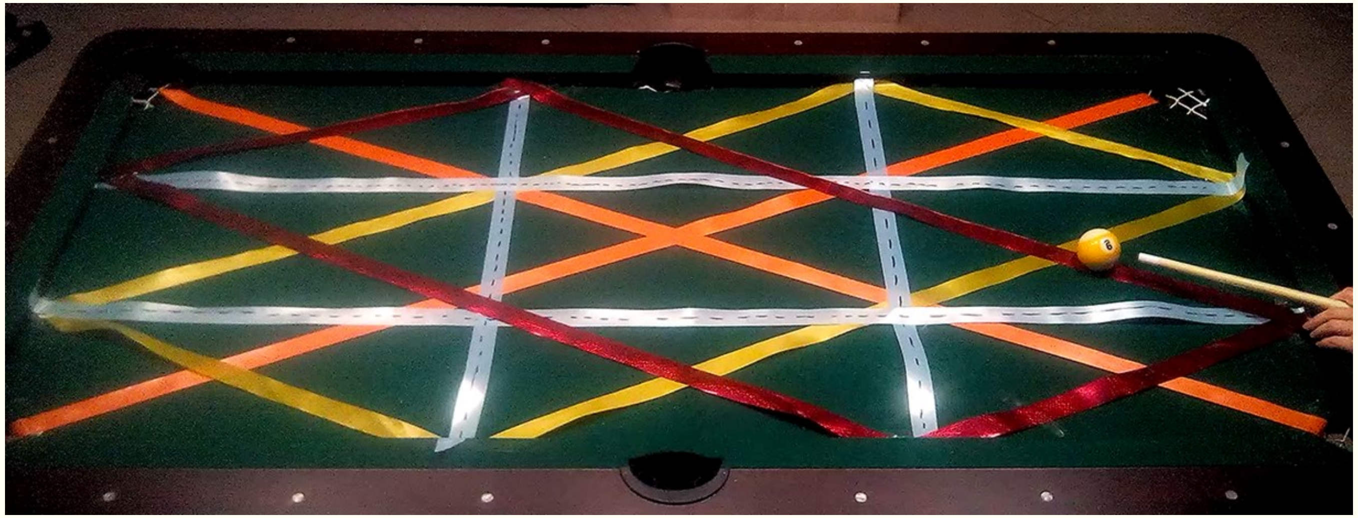
Biliardo di luce

E’ stato pertanto realizzato un biliardo triangolare le cui sponde sono degli specchi e la cui “pallina” è la luce laser, abbiamo denominato questo oggetto “biliardo di luce”. Abbiamo verificato che la luce segue il percorso del triangolo ortico, verificando dunque, per il principio di Fermat, che l’unica orbita chiusa di perimetro minimo è proprio il triangolo ortico



Costruiamo i quadrilateri ortici…. Sul biliardo!





Quadrilatero Ortico