L’early algebra: una prospettiva per una didattica dell’aritmetica e dell’algebra che favorisca il superamento delle difficoltà nell’insegnamento / apprendimento delle due discipline

Giancarlo Navarra[1]
GREM, Università di Modena e Reggio Emilia[2]

Si presenta in sintesi un quadro teorico per il rinnovamento dell’insegnamento dell’algebra che privilegi un approccio linguistico a tale disciplina sin dalla scuola primaria e che favorisca negli allievi la costruzione dei significati degli oggetti dell’algebra. Si affronta la questione di come portare gli insegnanti ad acquisire concezioni e modelli di comportamento adeguati a favorire negli allievi una tale visione dell’algebra ed in particolare a sviluppare in questi abilità di modellizzazione, di interpretazione e di produzione di pensiero.

1. Premessa

L’insegnamento matematico-scientifico costituisce una delle chiavi di sviluppo di una società moderna e la matematica - in particolare il suo linguaggio - è fondamentale per lo sviluppo delle Scienze. È significativo in questo senso che in molti paesi industrializzati il mondo della ricerca stia investendo da decenni sull’educazione matematica attraverso l’attivazione continua e a lungo termine di processi di formazione degli insegnanti e la messa a punto e la sperimentazione di progetti di innovazione nelle classi. La sfida, pertanto – avvertita profondamente a livello internazionale – è rappresentata dalla necessità di valutare in prospettiva quali iniziative di carattere culturale, pedagogico, didattico possano contribuire a rinnovare metodi e finalità dell’insegnamento matematico. In tale quadro, anche contenuti fondanti il sapere matematico come l’aritmetica e l’algebra necessitano di una profonda ristrutturazione della loro usuale trasposizione didattica.

Nella quotidianità della prassi didattica della scuola non solo italiana, invece, prevalgono strategie educative di segno opposto, centrate sull’acquisizione passiva dei fatti matematici e sull’applicazione rigida delle regole, a scapito della *conquista del senso* di entrambi.

L’insegnante rappresenta quindi *l’elemento chiave* per una costruzione significativa di tali mutamenti di prospettiva.

---

[1] *Docente di scienze nella scuola secondaria di 1°, professore a contratto presso il Dipartimento di Matematica dell’università di Modena. giancarlonavarra@gmail.com.*
[2] *GREM: Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica, responsabile Nicolina A. Malara.*

2. Il progetto ArAl

Partendo da tali assunti, il progetto ArAl è specificamente dedicato al rinnovamento dell'insegnamento dell'area aritmetico algebrica nella scuola di base; negli ultimi cinque anni ha esteso la sua attenzione anche agli alunni 'grandi' della scuola dell'infanzia e agli studenti del primo anno della scuola secondaria di 2°.

Esso si colloca all'interno di quella cornice teorica che assume la denominazione di *early algebra*, e sostiene che *i principali ostacoli cognitivi nell'apprendimento dell'algebra nascono in modi spesso insospettabili in contesti aritmetici e possono condizionare lo sviluppo del pensiero matematico*.

Illustriamo brevemente i punti principali di questa ipotesi.

La letteratura internazionale nel campo delle ricerche sull'apprendimento della matematica, in particolare sull'apprendimento dell'algebra, e sulle difficoltà ad esso connesse - a livelli di età differenti, dagli inizi sino all'università - evidenzia la diffusione della crisi dell'insegnamento tradizionale di questa disciplina. L'algebra, in quanto linguaggio proprio di una matematica *alta*, può essere per gli studenti, allo stesso tempo, un *ponte* verso gli studi successivi o un *muro*, a causa soprattutto del fatto che molti di essi possiedono un controllo concettuale debole sui *significati* degli *oggetti* e dei *processi* algebrici.

La ricerca degli ultimi vent'anni si è focalizzata su un grande numero di approcci possibili per sviluppare tale controllo; fra gli altri, sta assumendo sempre più importanza l'approccio *linguistico*, che parte da una concezione dell'*algebra come linguaggio*. In questa prospettiva, l'ipotesi del progetto ArAl è che vi sia una *analogia forte* fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico; per spiegare questo punto di vista ricorriamo alla metafora del *balbettio*.

3. Il balbettio algebrico e l'early algebra

Il bambino, nell'apprendimento del linguaggio, si appropria poco alla volta dei suoi *significati* e delle regole che lo supportano, che sviluppa gradualmente attraverso imitazioni e aggiustamenti sino agli approfondimenti dell'età scolare, quando imparerà a leggere e a riflettere sugli aspetti *grammaticali* e *sintattici* della lingua. Nella didattica tradizionale del linguaggio algebrico si comincia invece privilegiando lo studio delle regole, come se la manipolazione formale potesse precedere la comprensione dei significati. *Si tende quindi ad insegnare la sintassi dell'algebra trascurando la sua semantica*. I modelli mentali propri del pensiero algebrico dovrebbero essere costruiti invece in un ambiente aritmetico – sin dai primi anni della scuola elementare - attraverso forme iniziali di *balbettio algebrico,* insegnando al bambino a *pensare l'aritmetica algebricamente***.** In altre parole, costruendo in lui il pensiero algebrico progressivamente come strumento e oggetto di pensiero, in un fitto *intreccio con l’aritmetica*, partendo dai suoi significati. A questo scopo è necessario costruire un ambiente che stimoli in modo informale l’elaborazione autonoma del balbettio algebrico e che assecondi quindi l’appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio nel quale le regole possano trovare la loro collocazione gradualmente, all’interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente ‘promiscui’.

L’ipotesi dell’*approccio linguistico* diventa ancora più significativa se viene associata a quella di un *avvio precoce* all’educazione algebrica (nella ricerca internazionale si parla di *early algebra*) e quindi ad una rilettura delle relazioni fra l’aritmetica e l’algebra.

La prospettiva teorica dell’early algebra rovescia dunque la tendenza consolidata nella didattica tradizionale che pone la costruzione delle conoscenze algebriche *in successione temporale* rispetto a quella delle conoscenze aritmetiche. Il principio di fondo è: il controllo degli aspetti sintattici dei nuovi linguaggi non può avvenire se non è preceduto dalla lenta acquisizione *in profondità* di un loro controllo *semantico*. Il progetto ArAl affronta quindi la didattica della matematica nella prospettiva di una necessaria, *autentica continuità* fra ordini di scuola differenti.

Vediamo ora alcuni punti nodali di questa prospettiva: i concetti di *risolvere* e *rappresentare*, le forme *canonica* e *non canonica* di un numero naturale, il segno di *uguaglianza*, l’approccio al *codice algebrico*.

3.1 Risolvere e rappresentare: prodotto e processo

Una convinzione molto diffusa negli alunni è che la soluzione di un problema coincida con *il risultato*. Questo comporta che la loro attenzione si concentri sulle *operazioni*. Si consideri il seguente problema, contenente una consegna ‘classica’: *Sul ramo di un albero ci sono 13 corvi. Ne arrivano altri 9 e se ne volano via 6. Quanti sono i corvi rimasti?* Ora si modifichi la consegna in: ‘*Rappresenta in linguaggio matematico la situazione in modo da trovare il numero totale dei corvi rimasti’*. Cosa cambia?

Nel primo caso si enfatizza la ricerca del *prodotto (16)*, nel secondo quella del *processo (13+9–6)*, cioè della rappresentazione delle *relazioni* fra gli elementi in gioco. Questa differenza si collega ad uno fra gli aspetti più importanti del *gap epistemologico* fra aritmetica e algebra: mentre l'aritmetica comporta un'*immediata* ricerca della soluzione, l'algebra la *pospone* e comincia con una trasposizione formale della situazione problematica dal dominio del linguaggio naturale ad uno specifico sistema di *rappresentazione* (si pensi ad un problema risolvibile con un’equazione).

L’alunno, se viene guidato ad allontanare da sé la preoccupazione del risultato, raggiunge un livello superiore di pensiero, sostituendo al calcolare il ‘guardarsi’ mentre sta ragionando. Passa cioè ad un livello *metacognitivo*, in cui interpreta *la struttura* del problema.

A monte di tutto questo c’Ë un nodo molto delicato. Ad esempio, in ’15×(4+2)=90’ uno studente, operando una lettura sinistra/destra ‘vede’ ’15×(4+2)’ come ‘operazioni’ e ‘90’ come ‘risultato’. È molto difficile che sia stato educato a ‘vedere’ la scrittura come *uguaglianza fra due rappresentazioni dello stesso numero*.

A questi aspetti sono dedicati i prossimi due paragrafi.

3.2. Rappresentazione canonica e rappresentazioni non canoniche di un numero naturale

Tra le infinite rappresentazioni di un numero, quella *canonica* è la più ‘gettonata’. Pensare un numero significa, per chiunque, pensare alla *cardinalità che esso rappresenta*. Ma la rappresentazione canonica è *opaca di significati*, nel senso che *dice poco di sé*. Per esempio: la scrittura ‘12’ suggerisce un generico ‘numero di cose’, tutt’al più l’idea di ‘parità’. Altre rappresentazioni possono ampliare il campo delle informazioni sul numero stesso: ‘3×4’ evidenzia che si tratta di un multiplo di 3 e di 4; ‘$2^2\times 3$’, che è anche un multiplo di 2; ‘2×2×3’ conduce a ‘2×6’ e quindi al multiplo di 6, e così via.

Possiamo dire che ognuna delle *connotazioni* di un numero aggiunge informazioni utili per approfondire la sua conoscenza, un po’ come avviene per le persone: c’è il nome anagrafico, che è opaco rispetto ad altre connotazioni più espressive del soggetto, date in funzione di altri individui a cui è legato per relazioni familiari e sociali (il papà di …, l’insegnante di…, il marito del fratello di …). È importante portare gli allievi a concepire come legittime rappresentazioni del numero sia quella canonica che ogni altra espressione di cui esso sia il risultato (quella non canonica). Ciò non solo per la comprensione di scritture algebriche come ‘a+b’ o ‘x^2y’, ma soprattutto per facilitare l’individuazione di relazioni numeriche e la loro rappresentazione in termini generali.

3.3. Il segno di uguaglianza

Nell’insegnamento dell’aritmetica alla scuola primaria l’uguale è essenzialmente un *operatore direzionale*: 4+6=10 significa ‘4 più 6 *fa* 10’. Questa concezione è prevalente nei primi sette, otto anni di scuola durante i quali l’uguale possiede una valenza dominante *spazio temporale*, segnando i passi di un percorso operativo che privilegia la sua lettura da sinistra verso destra.

Poi, quando l’alunno incontra l’algebra, l’uguale improvvisamente assume un significato del tutto diverso, di tipo *relazionale*. In una scrittura come ‘$(a+1)^2=a^2+2a+1$’ esso veicola un’idea di *simmetria* fra le espressioni ai suoi lati: indica che queste, per ogni valore attribuito ad *a*, rappresentano lo stesso numero. Ancora, in ‘8+x=2x–5’ l’uguale indica l’ipotesi (da verificare) di una equivalenza tra le due scritture per qualche valore di x. Lo studente deve quindi improvvisamente muoversi - spesso senza che nessuno lo abbia ‘avvertito’ di questo ampliamento di significati - in un universo concettuale del tutto differente, nel quale è necessario andare *oltre* la familiare connotazione spazio-temporale. Ma se per lui il numero dopo l’uguale è *il risultato*, cosa significa la scrittura ’11 = n’, anche se sa risolvere l’equazione di primo grado che conduce ad essa?

In quanto stiamo dicendo sono evidenti gli aspetti *linguistici* legati all’*interpretazione*, alla *traduzione*, al confronto di *parafrasi*, al rispetto consapevole delle *regole*. E qui entra in scena un nuovo personaggio, divenuto *amico di penna* di migliaia di studenti italiani: Brioshi.

3.4. Brioshi ed il codice algebrico

Brioshi Ë un personaggio metaforico: un alunno giapponese *virtuale* di età variabile a seconda di quella dei suoi interlocutori, che conosce solo la sua lingua ma sa usare molto bene il linguaggio della matematica. Ama trovare classi di coetanei non giapponesi con le quali scambiare problemi matematici. Viene introdotto per avvicinare gli alunni fra i 6 e i 14 anni ad un concetto difficile da far comprendere: la necessità del *rispetto delle regole* nell’uso di un linguaggio, necessità ancora più forte nel caso di un linguaggio formalizzato, e questo in ragione dell’estrema sinteticità dei simboli usati. I messaggi, soprattutto con gli alunni più piccoli, possono anche contenere frasi ‘di contorno’ di sapore affettivo, che contribuiscono in modo significativo a far emergere il *cuore matematico.*

Brioshi viene introdotto attraverso attività strutturate - uno scambio di messaggi da tradurre di volta in volta in linguaggio naturale o in linguaggio matematico – dove l’amico giapponese (corretto *per definizione*) gioca il ruolo di controllore della traduzione. Se ‘non la capisce’, la traduzione va rimessa in discussione e ‘aggiustata’. Questo ‘gioco di ruolo’ funziona sempre, indipendentemente dall’età degli alunni, e rimane forte il ruolo *arbitrale* di Brioshi come richiamo alla correttezza o alla trasparenza.

Sinora abbiamo riflettuto su questioni matematiche e linguistiche concernenti l’early algebra; ora proseguiremo analizzando gli obiettivi del progetto soprattutto in relazione agli insegnanti, e alle metodologie messe a punto per la loro formazione.

4. Obiettivi

Come si è detto, l’obiettivo di fondo del progetto ArAl è quello di realizzare percorsi didattici innovativi in aritmetica - verso una *prospettiva che favorisca un approccio anticipato al pensiero algebrico* – finalizzati alla costruzione *progressiva* del linguaggio algebrico *in parallelo* con l’aritmetica e non *successivamente ad essa*. L’ipotesi è che, attraverso tali percorsi, si possano ridurre, al momento del loro insorgere nei primi anni della scuola elementare, quelle difficoltà (che a volte col tempo, come si è detto, rischiano di divenire insormontabili) che gli studenti incontrano nella scuola secondaria nello studio dell'algebra, e che si motivi ai loro occhi il ruolo che il linguaggio algebrico svolge nella modellizzazione di situazioni problematiche e nella produzione di pensiero.

Il perseguimento di tale obiettivo poggia su un programma i cui punti fondamentali sono[3]:

- costruire l'approccio all'algebra come ad un <u>linguaggio</u> dotato di una sua grammatica e una sua sintassi (segni, convenzioni di scrittura, ecc.) favorendo le operazioni di <u>traduzione</u> da un linguaggio all'altro;
- privilegiare la comprensione del <u>significato</u> delle scritture algebriche, evitando quindi che gli alunni pervengano ad una manipolazione non consapevole dei simboli (non è comunque obiettivo del progetto – soprattutto con gli allievi della scuola primaria – *costruire abilità di tipo strumentale)*;
- favorire un approccio all'algebra che, pure a livelli semplici, contenga tutte le caratteristiche di tale disciplina nella sua accezione più ampia e moderna, inserendo attività che la utilizzino non solo come analisi di procedure ma come linguaggio, strumento di pensiero, strumento matematico per potenziare la risoluzione di problemi, individuare e confrontare relazioni e strutture.

5. Il ruolo dell'insegnante e il problema della sua formazione

L'insegnante di matematica rappresenta dunque *l'elemento chiave* per l'attuazione dei mutamenti di prospettiva che stiamo illustrando. Su di lui oggi interviene, in un turbinio di cambiamenti imponenti, contraddittori, spesso difficilmente decifrabili, un grande numero di pressioni di natura psicologica, sociale, culturale, economica. L'insegnante – soprattutto quello della scuola primaria e secondaria di 1°, in particolare quello di matematica – proprio per il suo essere cerniera nella complessità delle relazioni fra *istanze sociali* e *saperi organizzati*, è soggetto alle attenzioni delle istituzioni preposte alla sua formazione e al suo aggiornamento. Fra queste, naturalmente, come nel caso del progetto ArAl, il mondo della ricerca e, quindi, l'università.

La sfida – dal nostro punto di vista – consiste oggi nel condurre l'insegnante ad una *rivisitazione* di ruoli *che già ricopre*. La partecipazione al progetto si propone quindi di rappresentare anche un importante momento di *riflessione su convinzioni e stereotipi* attorno alle questioni centrali: *Quale aritmetica insegno? Quale algebra?*

---

[3] L'impianto scientifico è illustrato nel Quadro teorico e nel Glossario (v. N.A. Malara, G.Navarra, *Quadro teorico di riferimento e glossario*, Pitagora Editrice Bologna, 2003). Il Glossario costituisce per molti aspetti il *cuore* del progetto ArAl; è composto attualmente da quasi 100 termini – connessi fra loro da una fitta rete di rimandi e di collegamenti ipertestuali – che rappresentano le parole chiave per la comprensione della sua impostazione generale.

In altre parole: anche se l'alunno rappresenta il referente naturale, è *l'insegnante* l'elemento centrale attorno al quale ruota la filosofia del progetto, e questa scelta è riconducibile ad una tendenza in atto a livello internazionale. Un gruppo di ricercatori coordinato dall'israeliana Anna Sfard, al convegno ICME 10 (International Congress on Mathematical Education) tenutosi a Copenhagen nel luglio 2004, ha posto in luce la linea di tendenza che sta caratterizzando la ricerca in didattica della matematica degli ultimi cinquant'anni: da quella che è stata chiamata la *'programs' era'* degli anni '60 - '70 si è passati alla *'students' era'* degli anni '80 - '90 per avviarci all'inizio del 2000 verso la *'teachers' era'*. In estrema sintesi: le 'buone pratiche', centrali nella *'programs' era'*, o la conoscenza degli stili cognitivi degli studenti e delle loro motivazioni, tipica della *'students' era'*, sono sì necessarie ma non sufficienti se i docenti non hanno l'opportunità di riflettere sulle loro personali *epistemologie*. Da qui la *'teachers' era'; si potrebbe dire:* per educare *studenti metacognitivi* è necessario preparare *insegnanti metacognitivi*.

6. L'insegnante e il progetto ArAl

Il docente della scuola primaria impegnato in queste riflessioni è in qualche modo favorito rispetto al collega della secondaria perché può avviare *ab ovo*, anche con alunni di 6-7 anni, un approccio nella direzione del rinnovamento, avviando delle attività che gli permettano di far maturare in modo graduale le sue conoscenze, lasciando decantare eventuali difficoltà e superandole con calma, sperimentando nuove dinamiche sociali con gli alunni e indagando punti di vista diversi dai quali affrontare l'insegnamento dell'aritmetica.

Allo stesso tempo, il docente della secondaria di primo grado che avvii un'analoga riflessione con le sue classi è in qualche modo sfavorito in quanto si accinge a sperimentare delle attività con alunni che probabilmente provengono, in larga maggioranza, da esperienze didattiche che li hanno condotti ad una concezione tradizionale dell'aritmetica e dell'algebra, e che quindi sono per molti aspetti lontani dall'ambiente verso il quale l'insegnante vorrebbe condurli. Si tratta quindi non solo di recuperare conoscenze e competenze acquisite dagli alunni negli anni precedenti, ma di ristrutturare, entro i limiti consentiti di volta in volta dalle circostanze, la loro stessa concezione dell'aritmetica.

L'obiettivo del progetto è quindi è di proporre delle *chiavi di lettura* che consentano al docente di pervenire gradualmente - attraverso percorsi pur eterogenei e frazionati nel tempo, e una riflessione anche *di rottura* sulle sue conoscenze e le sue convinzioni - ad una visione d'insieme sempre più organica e articolata dell'universo che sta esplorando. Si tratta quindi di organizzare delle informazioni che stimolino la costruzione di opportuni ambiti di lettura personali, che conducano a muoversi in modo significativo all'interno del triangolo costituito da (a) quella che Shoenfeld ha chiamato *epistemologia dell'insegnante* - conoscenze, convinzioni, abitudini, pregiudizi, stereotipi - ; (b) i temi della *pre-algebra*; (c) la *didattica* - programmi ministeriali, programmazione individuale, costruzione dei curricoli, valutazione.

Lo strumento più potente messo in atto dal Progetto ArAl per favorire questo processo nell'insegnante è la metodologia dei diari multi-commentati.

7. La metodologia dei diari multi-commentati nella formazione degli insegnanti

I docenti degli istituti che partecipano ad attività sperimentali-formative del Progetto ArAl (della durata media di un biennio) effettuano delle audioregistrazioni delle loro attività in classe, le trascrivono in *diari* (da uno a tre), vi inseriscono commenti e riflessioni e li inviano attraverso la posta elettronica a ricercatori-tutor, che vi aggiungono a loro volta dei meta-commenti e quindi li rinviano agli autori e agli altri componenti dei loro o di altri gruppi, che possono aggiungere a loro volta ulteriori commenti, creando le condizioni per l'organizzazione di una rete di gemellaggi inter-istituti.

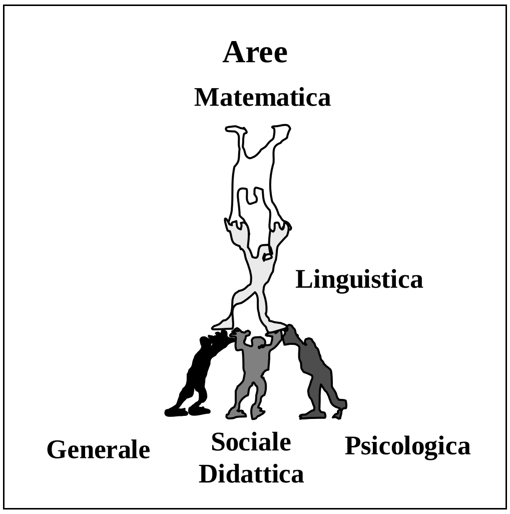
I diari così arricchiti si prefigurano come *strumento di mediazione fra teoria e prassi*. Questo comporta ricadute importanti sugli insegnanti.

Nel momento in cui redige il diario, l'autore non è più un 'semplice' insegnante, ma si colloca su un piano diverso. La sua classe (di cui conosce tutto – personalità degli alunni, metodi e strumenti impiegati nello svolgimento dell'attività, linguaggi non verbali usati mentre essi spiegano e così via) non è più soltanto 'sua', ma trasla verso una dimensione più ampia che coinvolge anche i ricercatori, molti altri insegnanti appartenenti allo stesso o ad altri istituti (che potrebbero avere interesse verso i suoi diari perché sono impegnati in attività analoghe) e così via. In altre parole, l'autore diventa un *insegnante sperimentatore*, e i suoi diari assumono importanza *a livello scientifico*. Per queste ragioni è necessario che, all'atto della stesura, avvenga un distacco dall'attività, e l'autore si ponga nella prospettiva di rileggere criticamente ciò che è avvenuto in classe e di analizzare i suoi stessi interventi e contributi dei suoi alunni, spesso incerti, frammentati, contraddittori. Il diario non è solo una 'narrazione', ma diventa soprattutto, anche prima di ricevere i Commenti del tutor, un oggetto di *autoformazione*. D'altro canto, è proprio l'inserimento in un quadro così articolato che conferisce significatività alla fatto di investire tempo ed energie intellettuali per registrare le lezioni, redigere i diari, riflettere sui Commenti e possibilmente replicare, scriverne di propri, confrontare i diari con quelli di altri insegnanti sperimentatori.

La finalità del progetto è, quindi, che l'insegnante, attraverso il quadro teorico, le attività e i diari propri e altrui, pervenga ad una rilettura delle proprie convinzioni, se necessario ad una rottura con esse, e si formi gradualmente una visione d'insieme della didattica dell'aritmetica e dell'algebra che coniughi in modo significativo prassi e riferimenti teorici.

La teoria del progetto ArAl ha come struttura portante il *Glossario* composto da un centinaio di parole chiave. La sua esplorazione è un'avventura intellettuale individuale, e *dipende dal modo in cui l'insegnante decide di interagire con esso*. Qualsiasi percorso egli compia conduce comunque, attraverso ampliamenti e approfondimenti successivi, ad una visione *relazionale* dei termini chiave, e quindi ad una *comprensione* della teoria di riferimento.

Quadro teorico e Glossario permettono di capire come l'approccio precoce all'aritmetica in una prospettiva algebrica poggi su una solida base costituita da presupposti di natura *sociale-didattica* e *psicologica* e su una serie di concetti di tipo *generale*, che a loro volta sorreggono una forte componente *linguistica* che si esplicita soprattutto attraverso *le dinamiche della comunicazione*.



L'insegnante deve imparare ad integrare questa impalcatura teorica con la realtà della classe e con le *micro-decisioni* che deve adottare di continuo nel corso di altrettante *micro-situazioni*. La metodologia dei diari commentati intende potenziare la sensibilità degli insegnanti nella realizzazione di questa integrazione.

I diari multi-commentati, in conclusione, sono strumenti importanti da quattro punti di vista:

- diagnostico: forniscono al ricercatore un quadro complessivo dell'azione didattica dell'insegnante attraverso l'analisi delle modalità della sua conduzione dell'attività in classe;
- formativo: consentono all'insegnante, attraverso i commenti che riceve, di sviluppare competenze e sensibilità, e quindi di migliorare la qualità complessiva della sua azione didattica;
- valutativo: forniscono sia all'insegnante che ai ricercatori elementi per potenziare l'efficacia degli interventi nei rispettivi ambiti;

- sociale: consentono, attraverso l'invio dei diari agli altri componenti del gruppo e le periodiche riflessioni in presenza dei brani più significativi, la condivisione dei saperi in gioco.

Hanno l'obiettivo di raggiungere tre risultati: il perfezionamento del quadro teorico e delle metodologie per la formazione, l'elaborazione di materiali efficaci per la formazione dei docenti, un miglioramento complessivo dell'attività didattica.

Bibliografia

Le pubblicazioni relative all'early algebra e al Progetto sono molto numerose. Ci limitiamo a citarne alcune edite dalla Pitagora Editrice Bologna, facenti parte della Collana ArAl, alle quali si aggiunge una Sitografia essenziale.

Malara N.A., Incerti, V., Fiorini, R., Nasi, R.: 2004, *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebrica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2003, *U1: Brioshi e l'approccio al codice algebrico*, Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2003, *U2: Rappresentazioni del numero: le Mascherine e il Domino,* Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2003, *U3: Verso il numero sconosciuto: il gioco della Matematòca,* Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2003, *U4: Ricerca di regolarità: la griglia dei numeri*, Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2003, *U5: Le piramidi di numeri*, Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2003, *U6: Dalla bilancia a piatti all'equazione,* Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2005, *U7: Studio di regolarità: dai fregi alle successioni aritmetiche,* Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Giacomin A.: 2005, *U8: Esplorazioni alla ricerca di leggi di corrispondenza,* Pitagora Editrice Bologna

Fiorini, R., Marchi S., Nasi R., Stefani P.: 2006, U9: *Verso le funzioni*, Pitagora Editrice Bologna

Navarra G., Zamboni M.T.: 2006b, *U10: Qual è il colore della sedia, Successioni modulari e forme embrionali di generalizzazione,* Pitagora Editrice Bologna

Sitografia

www.aralweb.it – Sito ufficiale del Progetto ArAl

http://gold.indire.it/nazionale/content/index.php?action=read_cnt&id_cnt=5986 – Sito del Progetto Gold; il progetto ArAl best practice della scuola italiana

http://www5.indire.it:8080/set/aral/aral.htm - Portale dell'INDIRE,Concorso SeT (Progetto Speciale per l'Educazione Scientifica e Tecnologica), Progetto vincitore