Evoluzione del concetto di funzione: una breve indagine

Israele Kleiner

The College Mathematics Journal, settembre 1989, Volume 20, Numero 4, pp. 282-300.

Israel Kleiner ha ricevuto il suo dottorato di ricerca nella teoria degli anelli alla McGill University, ed è stato alla York University per oltre venti anni. È stato coinvolto nella formazione degli insegnanti a livello universitario e post-laurea e ha tenuto numerosi colloqui con studenti e insegnanti delle scuole superiori. Uno dei suoi principali interessi è la storia della matematica e il suo uso nell'insegnamento della matematica.

Introduzione. L'evoluzione del concetto di funzione risale a 4000 anni fa; 3700 di questi consistono in anticipazioni. L'idea si è evoluta per quasi 300 anni in intima connessione con problemi di calcolo e analisi. (Una definizione di "analisi" in un'unica frase come "studio delle proprietà di varie classi di funzioni" non sarebbe molto lontana dal segno.) In effetti, il concetto di funzione è una delle caratteristiche distintive della matematica "moderna" rispetto alla matematica "classica" .
W. L. Schaaf [24, p. 500] fa un passo in più:

La nota chiave della cultura occidentale è il concetto di funzione, una nozione neanche lontanamente suggerita da alcuna cultura precedente. E il concetto di funzione è tutt'altro che un'estensione o un'elaborazione di precedenti concetti numerici: è piuttosto una completa emancipazione da tali nozioni.

L'evoluzione del concetto di funzione può essere vista come un tiro alla fune tra due elementi, due immagini mentali: quella geometrica (espressa nella forma di una curva) e quella algebrica (espressa come una formula prima finita e successivamente che consente infiniti termini, la cosiddetta "espressione analitica"). (Vedi [7, pagina 256]).
Successivamente, entra un terzo elemento, cioè la definizione "logica" di funzione come corrispondenza (con un'immagine mentale di una macchina input-output). Sulla scia di questo sviluppo, la concezione geometrica della funzione viene gradualmente abbandonata. Un nuovo tiro alla fune presto (ed è, in una forma o nell'altra, ancora con noi tutt'oggi) tra questa nuova concezione "logica" ("astratto", "sintetico", "postulatorio") della funzione quella vecchia "algebrica" (Concezione "concreta", "analitica", "costruttiva").

In questo articolo, elaboreremo questi punti e cercheremo di dare al lettore un'idea dell'eccitazione e della sfida che alcuni dei migliori matematici di tutti i tempi hanno affrontato nel tentativo di confrontarsi con la concezione di base di funzione che oggi accettiamo come all'ordine del giorno.

1. Sviluppo Pre-calcolo. La nozione di funzione in forma esplicita non è emersa fino all'inizio del XVIII secolo, sebbene le manifestazioni implicite del concetto risalgano al 2000 a.C. I motivi principali per cui il concetto di funzione non è emerso prima erano:

- mancanza di prerequisiti algebrici: il venire a patti con il continuum di numeri reali e lo sviluppo della notazione simbolica;

- mancanza di motivazione. Perché definire una nozione astratta di funzione a meno che non si abbiano molti esempi da cui astrarre?

Nel corso di circa duecento anni (1450-1650 circa), si sono verificati numerosi sviluppi che sono stati fondamentali per l'affermazione del concetto di funzione:

- Estensione del concetto di numero per abbracciare numeri reali e (fino a un certo grado) anche complessi (Bombelli, Stifel, et al.);
- La creazione di un'algebra simbolica (Viète, Descartes, et al.);
- Lo studio del moto come problema centrale della scienza (Kepler, Galileo, et al.);
- Il matrimonio di algebra e geometria (Fermat, Descartes, et al.).

Il 17 ° secolo vide l'emergere della moderna scienza matematica e l'invenzione della geometria analitica. Entrambi questi sviluppi suggerivano una visione dinamica e continua della relazione funzionale rispetto alla visione statica e discreta degli antichi.

Nella fusione di algebra e geometria, gli elementi chiave erano l'introduzione di variabili e l'espressione della relazione tra variabili mediante equazioni. Quest'ultimo ha fornito un gran numero di esempi di curve (funzioni potenziali) per lo studio e ha impostato la fase finale per l'introduzione del concetto di funzione. Quello che mancava era l'identificazione delle variabili indipendenti e dipendenti in un'equazione:

Le variabili non sono funzioni. Il concetto di funzione implica una relazione unidirezionale tra una variabile "indipendente" e una variabile "dipendente". Ma nel caso delle variabili come si presentano in problemi matematici o fisici, non c'è bisogno di una tale divisione dei ruoli. E finché non viene assegnato alcun ruolo speciale indipendente a una delle variabili coinvolte, le variabili non sono funzioni ma semplicemente variabili [2, p. 348].

Vedi [6], [15], [27] per i dettagli.

Il calcolo sviluppato da Newton e Leibniz non aveva la forma che gli studenti vedono oggi. In particolare, non era un calcolo di funzioni. I principali oggetti di studio nel calcolo del XVII secolo erano le curve (geometriche). (Ad esempio, la cicloide è stata introdotta geometricamente e ampiamente studiata prima prima che ne fosse fornita l'equazione). Infatti, l'analisi del XVII secolo è nata come una raccolta di metodi per risolvere problemi relativi alle curve, come trovare tangenti alle curve, aree sotto curve, lunghezze delle curve e velocità dei punti che si spostano lungo le curve. Poiché i problemi che hanno dato origine al calcolo erano di natura geometrica e cinematica, e poiché Newton e Leibniz erano preoccupati di sfruttare lo strumento meraviglioso che avevano creato, sarebbe necessario tempo e riflessione prima che il calcolo potesse essere riformulato in forma algebrica.

Le variabili associate a una curva erano le ascisse geometriche, le ordinate, le sottotangenti, le subnormali e i raggi di curvatura di una curva. Nel 1692 Leibniz introdusse la parola "funzione" (vedi [25, p.227]) per designare un oggetto geometrico associato ad una curva. Ad esempio, Leibniz ha affermato che "una tangente è una funzione di una curva" [12 p. 85].

Il "metodo delle flussioni" di Newton si applica ai "fluenti", non alle funzioni. Newton chiama le sue variabili "fluenti" - l'immagine (come in Leibniz) è geometrica, di un punto che "scorre" lungo una curva. Il principale contributo di Newton allo sviluppo del concetto di funzione fu il suo uso delle serie di potenze. Questi erano importanti per il successivo sviluppo di quel concetto.

Con l'aumento delle enfasi sulle formule e le equazioni relative alle funzioni associate a una curva, l'attenzione si focalizzò sul ruolo dei simboli che appaiono nelle formule e nelle equazioni e quindi sulle relazioni che appaiono tra questi simboli, indipendentemente dalla curva originale . La corrispondenza (1694-1698) tra Leibniz e Johann Bernoulli evidenzia la mancanza di un termine generale per rappresentare quantità dipendenti da altre quantità in tali formule ed equazioni portò all'uso del termine "funzione" come appare nella definizione di Bernoulli del 1718 (vedi [3, 9) e [27, pagina 57] per i dettagli):

Si chiama qui Funzione di una variabile, una quantità composta in qualunque modo da questa variabile e dalle costanti [23, p. 72].

Questa fu la prima definizione formale di funzione, sebbene Bernoulli non spiegasse cosa significava "composto in qualsiasi modo". Vedi [3], [6], [12], [27] per i dettagli di questa sezione.

2. Introductio di Eulero in Analysin Infinitorum. Nella prima metà del XVIII secolo, assistiamo a una graduale separazione dell'analisi del XVII secolo dalla sua origine e sfondo geometrico. Questo processo di "degeometrizzazione dell'analisi" [2, p. 345] ha visto la sostituzione del concetto di variabile, applicato agli oggetti geometrici, con il concetto di funzione come una formula algebrica. Questa tendenza è stata incarnata nel classico Introductio di Eulero in Analysin Infinitorum del 1748, inteso come una panoramica dei concetti e dei metodi di analisi e geometria analitica necessari per uno studio del calcolo.

L'introduzione di Eulero è stata la prima opera in cui il concetto di funzione ha un ruolo esplicito e centrale. Nella prefazione, Eulero afferma che l'analisi matematica è la scienza generale delle variabili e delle loro funzioni. Inizia definendo una funzione come "espressione analitica" (cioè una "formula"):

Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in qualsiasi modo da quella quantità variabile e numeri o quantità costanti [23, p. 72].

Eulero non definisce il termine "espressione analitica"[1], ma cerca di dargli un significato spiegando che le "espressioni analitiche" ammissibili implicano le quattro operazioni algebriche, radici, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, derivate e integrali. Egli classifica le funzioni come algebriche o trascendentali; a valore singolo o multivalore; e implicite o esplicite. L'Introductio contiene uno dei primi trattati sulle funzioni trigonometriche come rapporti numerici (si veda [13]), nonché il primo trattato algoritmico sui logaritmi come esponenti. L'intero approccio è algebrico. Non appare una singola immagine o disegno (in v. 1).

Le espansioni di funzioni in serie di potenze svolgono un ruolo centrale in questo trattato. Infatti, Eulero afferma che qualsiasi funzione può essere espansa in una serie di potenze: "Se qualcuno dubita di ciò, questo dubbio verrà rimosso dall'espansione di ogni funzione" [3, p. 10] .[2] Questa osservazione fu certamente in linea con lo spirito della matematica nel XVIII secolo.

Hawkins [10, p. 3] riassume il contributo di Eulero all'emergere della funzione come concetto importante:

Sebbene la nozione di funzione non sia originata da Eulero, fu lui a darle il primo risalto trattando il calcolo come una teoria formale delle funzioni.

Come vedremo, la visione delle funzioni di Eulero si è presto evoluta. Vedi [2], [3], [6], [27] per i dettagli in proposito.

---

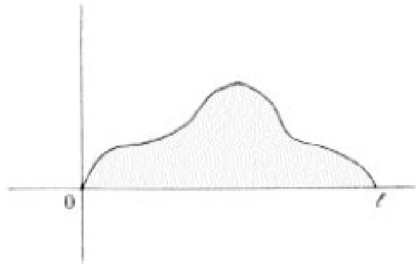
1 Questo termine, che apparirà spesso in questo articolo, è stato formalmente definito solo alla fine del XIX secolo (vedi 7).

2 Youschkevitch [27, p. 54] afferma che "a causa delle serie di potenze il concetto di funzione come espressione analitica occupava il posto centrale nell'analisi matematica".

3. La controversia sulla corda vibrante.

Di cruciale importanza per la successiva evoluzione del concetto di funzione fu il problema delle corde vibranti:

> "Una stringa elastica con estremità fisse (0 e L) viene deformata in una forma iniziale e quindi rilasciata per vibrare. Il problema è determinare la funzione che descrive la forma della stringa al tempo t."



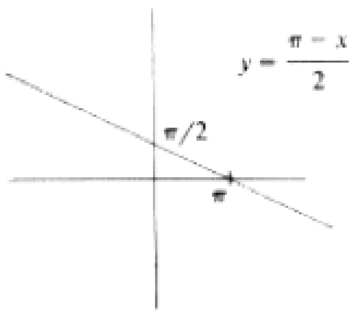
La controversia era incentrata sul significato di "funzione". In realtà, Grattan-Guinness suggerisce che nella controversia sulle varie soluzioni di questo problema, "L'intera analisi del XVIII secolo è stata sottoposta ad ispezione: la teoria delle funzioni, il ruolo di algebra, il continuum della linea reale e la convergenza delle serie. . . "[9, p. 2].
Per comprendere i dibattiti che circondavano il problema delle corde vibranti, dobbiamo prima menzionare un "articolo di fede" della matematica del XVIII secolo:

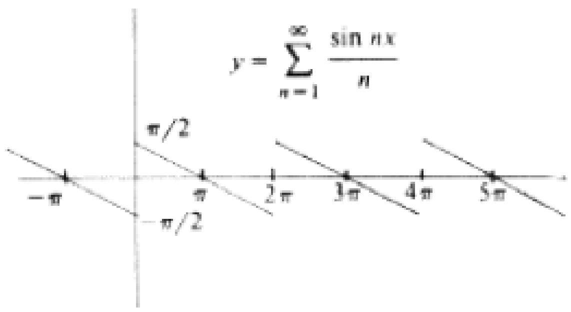
Se due espressioni analitiche coincidono su un intervallo, coincidono ovunque.

Questa non era un'ipotesi innaturale, dato il tipo di funzioni (espressioni analitiche) considerate in quel momento. In quest'ottica, l'intero corso di una curva data da un'espressione analitica è determinato da qualsiasi piccola parte della curva. Ciò presuppone implicitamente che la variabile indipendente in un'espressione analitica spazia sull'intero dominio dei numeri reali, senza restrizioni.

In considerazione di ciò, è sconcertante (per noi) che già nel 1744 Eulero scrivesse a Goldbach affermando che

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$





(Vedi [27], pagina 67.) Qui, infatti, c'è un esempio di due espressioni analitiche che concordano sull'intervallo (0 , 2π), ma in nessun altro luogo[3].

Nel 1747, d'Alembert risolse il problema delle corde vibranti dimostrando che il movimento della corda è governato dall'equazione differenziale parziale

---

3 Eulero ne era sicuramente a conoscenza, ma "Questa non è l'unica occasione in cui Eulero fosse a conoscenza di esempi che non rispettavano le sue concezioni, ma che egli considerava un'insignificante eccezione alla regola generale" [27, p. 67]. Vedi anche [19].

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}=a^2\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$, con “a” costante

la cosiddetta “*equazione d'onda*”. Usando le condizioni al contorno $y(0,t)=0$, $y(L,t)=0$ e le condizioni iniziali

$$y(0,t)=f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\delta y}{\delta t}_{t=0}=0$$

ha risolto questa equazione differenziale parziale per ottenere $y(x,t)=\frac{[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]}{2}$ come la soluzione "più generale" del problema delle corde vibranti, essendo φ una funzione "arbitraria". Ne segue prontamente che

$$y(x,0)=f(x)=\varphi(x) \quad \text{su} \quad (0,L)$$
$$\varphi(x+2\mathrm{L})=\varphi(x)$$
$$\varphi(-x)=-\varphi(x)$$

Così φ è determinata su (0,L) dalla forma iniziale della corda, ed continua (grazie all' “*atto di fede*”) come una funzione periodica dispari del periodo 2L.

D'Alembert riteneva che la funzione φ(x) (e quindi f(x)) dovesse essere una "espressione analitica"; cioè, deve essere data da una formula. (Per d'Alembert, queste erano le uniche funzioni consentite.) Inoltre, poiché questa espressione analitica soddisfa l'equazione delle onde, deve essere doppiamente differenziabile.

Nel 1748, Eulero scrisse un articolo sullo stesso problema in cui concordava completamente con d'Alembert sulla soluzione, ma differiva da lui per la sua interpretazione. Eulero sosteneva che la soluzione di d'Alembert non era la "più generale", come sosteneva quest'ultimo. Avendo risolto egli stesso il problema matematicamente, Eulero sosteneva che i suoi esperimenti mostravano che la soluzione $y(x,t)=\frac{[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]}{2}$ fornisse le forme della stringa per diversi valori di t, anche quando la forma iniziale non è data da una (singola) formula. Da considerazioni fisiche, Eulero sosteneva che la forma iniziale della stringa potesse essere data

(a) da diverse espressioni analitiche in diversi sottointervalli di (0, L) (per esempio, archi circolari di differenti raggi in diverse parti di (0, L) o , più in generale,

(b) da una curva disegnata a mano libera.[4]

Ma secondo l' "*atto di fede*" prevalente al momento, nessuno di questi due tipi di forme iniziali poteva essere dato da una singola espressione analitica, poiché tale l'espressione determina la forma dell'intera curva in base al suo comportamento su qualsiasi intervallo, non importa quanto sia piccolo. Pertanto, la soluzione di d'Alembert non poteva essere la più generale.

D'Alembert, che era molto meno interessato alle vibrazioni della stringa piuttosto che alla matematica del problema, sostenne che l'argomento di Eulero fosse “contro tutte le regole dell'analisi.” (Eulero credeva che fosse ammissibile applicare alcune delle operazioni dell'analisi

4Eulero chiamava le funzioni dei tipi (a) e (b) "discontinue", riservando la parola "continuo" per le funzioni date da una singola espressione analitica. (Così, considerava i due rami di un'iperbole come una singola funzione continua! [18, p.301]). Questa concezione di "continuità" persistette fino al 1821, quando Cauchy diede la definizione usata al giorno d'oggi.

anche alle curve arbitrarie.)[5] Langer [16, p.17] spiega le diverse opinioni di Eulero e d'Alembert riguardo al problema delle corde vibranti in termini di approccio generale alla matematica:

Il temperamento di Eulero era fantasioso. Egli fu una guida in larga misura sia per le considerazioni pratiche che per l'intuizione fisica; combinata con un'ingenuità fenomenale, una fede quasi ingenua nell'infallibilità delle formule matematiche e dei risultati delle manipolazioni su di loro. D'Alembert era una mente più critica, molto meno suscettibile alla convinzione dai formalismi. Una personalità di impeccabile integrità scientifica, non fu mai incline a minimizzare le mancanze che riconobbe, fossero esse nel suo lavoro o in quello degli altri.

Daniel Bernoulli entrò in scena nel 1753 offrendo un'altra soluzione del problema delle corde vibranti. Bernoulli, che era essenzialmente un fisico, basava la sua argomentazione sulla fisica del problema e sui fatti noti sulle vibrazioni musicali (scoperti prima da Rameau et al.). A quel tempo era generalmente riconosciuto che i suoni musicali (e, in particolare, le vibrazioni di una stringa "musicale") fossero composti da frequenze fondamentali e dai loro toni armonici. Questa evidenza fisica e alcuni ragionamenti matematici "sciolti" convinsero Bernoulli che la soluzione al problema delle corde vibranti doveva essere data da

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)$$

Questo, ovviamente, significava che una funzione arbitraria f (x) poteva essere rappresentata su (0,L) da una serie di seni,

$$y(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(Bernoulli era interessato solo a risolvere un problema fisico e non dava una definizione di funzione. Con una "funzione arbitraria" intendeva una "forma arbitraria" della corda vibrante).

Sia Eulero che d'Alembert (così come altri matematici dell'epoca) trovarono assurda la soluzione di Bernoulli. Basandosi sul "atto *di fede*" del XVIII secolo, sostennero che dal momento che f(x) e la serie dei seni $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ concordavano su (0, L), dovevano coincidere ovunque. Poi si arrivò alla conclusione manifestamente assurda che una funzione "arbitraria" f(x) è dispari e periodica. (Poiché la forma iniziale di Bernoulli della corda era data da un'espressione analitica, Eulero respinse la soluzione di Bernoulli come la soluzione più generale.) Bernoulli ribatté che le soluzioni di d'Alembert e di Eulero costituivano "una bella matematica, ma cosa c'entra con le corde vibranti? "[22, p. 78].

Il dibattito è durato per diversi anni (si aggiunse più tardi anche Lagrange) e poi si spense senza essere risolto. Ravetz [22, p. 81] caratterizzò l'essenza del dibattito come un tutt'uno tra il mondo matematico di d'Alembert, il mondo fisico di Bernoulli e la "terra di nessuno" di Eulero tra i due. Il dibattito, tuttavia, ha avuto conseguenze importanti per l'evoluzione del concetto di funzione. Il suo effetto principale era estendere tale concetto per includere:

5 Le “regole” di Eulero, ma non quelle "dell'analisi" di d'Alembert, gli permetteranno di ammettere, ad esempio, una curva di forma tringolare come la forma iniziale di una corda vibrante. Infatti, Eulero sosteneva che si potesse cambiare la forma della curva nella "cima" di una quantità infinitamente piccola e quindi "lisciare". Poiché le variazioni infinitesime sono state ignorate nell'analisi, ciò non avrebbe avuto alcun effetto sulla soluzione.

- Funzioni definite a tratti per espressioni analitiche in intervalli diversi. (Così,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

era ora, per la prima volta, considerata una funzione).

- Funzioni disegnate a mano libera e possibilmente non fornite da alcuna combinazione di espressioni analitiche.

Come diceva Lützen [17]:

D'Alembert lascia che il concetto di funzione limiti i possibili valori iniziali, mentre Eulero lascia che la varietà di valori iniziali estenda il concetto di funzione. Vediamo quindi che questa estensione del concetto di funzione è stata imposta a Eulero dal problema fisico in questione.

Per capire come la visione delle funzioni di Eulero si è evoluta in un periodo di diversi anni, basta confrontare la definizione di funzione che dette nella sua Introductio nel 1748 con quella seguente, data nel 1755, in cui il termine "espressione analitica" non appare [23, pp 72-73]:

Se, tuttavia, alcune quantità dipendono da altre in modo tale che se queste ultime vengono modificate, le prime subiscono modifiche stesse, allora le prime quantità sono chiamate funzioni di queste ultime quantità. Questa è una nozione molto completa e comprende in sé tutte le modalità attraverso le quali una quantità può essere determinata dalle altre. Se, quindi, x denota una quantità variabile, tutte le quantità che dipendono da x in qualsiasi modo o sono determinate da essa sono chiamate sue funzioni ...

La visione di Eulero delle funzioni fu rinforzata più tardi in quel secolo dal lavoro sulle equazioni differenziali alle derivate parziali:

Il lavoro di Monge negli anni 1770, dando un'interpretazione geometrica all'integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali, sembrava fornire una prova conclusiva del fatto che le funzioni "più generali di quelle espresse da un'equazione" erano legittimi oggetti matematici ... [22 , p. 86].

Vedi [3], [4], [9], [16], [18], [19], [22], [27] per dettagli sulla sezione 3.

4. Serie Fourier e Fourier. Il lavoro di Fourier sulla conduzione del calore (presentato all'Accademia delle scienze di Parigi nel 1807, ma pubblicato solo nel 1822 nel suo classico *Teoria analitica del calore*) fu un passo rivoluzionario nell'evoluzione del concetto di funzione. Il principale risultato di Fourier del 1822 fu il seguente.

Teorema. Qualsiasi funzione f (x) definita su (-L, L) è rappresentabile su questo intervallo da una serie di seni e coseni:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

dove i coefficienti a_n e b_n sono dati da:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)a_n\cos\frac{n\pi x}{L}dt \quad \text{e} \quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)b_n\sin\frac{n\pi x}{L}dt$$

L'annuncio di Fourier di questo risultato fu accolto con incredulità. Stravolgendo molti principi della matematica del XVIII secolo. Il risultato era noto a Eulero e Lagrange (tra gli altri), ma solo per alcune funzioni. Fourier, naturalmente, ha affermato che è vero per tutte le funzioni, dove al termine "funzione" è stata data l'interpretazione contemporanea più generale:

In generale, la funzione f (x) rappresenta una successione di valori o ordinate ciascuna delle quali è arbitraria. Un'infinità di valori viene data all'ascissa x, ci sono un numero uguale di ordinate f(x). Tutti hanno valori numerici effettivi, positivi o negativi o nulli. Noi non supponiamo che queste ordinate siano soggette a una legge comune; si succedono l'un l'altro in qualsiasi modo e ognuno di loro viene dato come se fosse una singola quantità [23, p. 73].

La "dimostrazione" di Fourier del suo teorema era allentata ("debole"-"non rigorosa") anche per gli standard del 19° secolo. In effetti, era il formalismo nello spirito del XVIII secolo - "un gioco su simboli secondo regole accettate ma senza molto o alcun riguardo per il contenuto o il significato" [16, p. 33]. Per convincere la riluttante comunità matematica della ragionevolezza della sua richiesta, Fourier aveva bisogno di dimostrare che:

(a) I coefficienti della serie di Fourier possono essere calcolati per qualsiasi f(x)

(b) Qualsiasi funzione f(x) può essere rappresentata dalla sua serie di Fourier in (-L, L) .[6]

Fourier lo ha dimostrò così:

(a ') Interpretando i coefficienti a_n e b_n nell'espansione della serie di Fourier di f(x) come aree (che aveva senso per le funzioni "arbitrarie" f(x), non necessariamente date dalle espressioni analitiche)

(b ') Calcolando a_n e b_n (per piccoli valori di n) per una grande varietà di funzioni f(x), e notando lo stretto accordo in (-L, L) (ma non al di fuori di tale intervallo) tra i segmenti iniziali della serie di Fourier risultante e i valori funzionali di f (x).

Fourier ha realizzato tutto questo usando un ragionamento matematico che sarebbe chiaramente inaccettabile per noi oggi. Però,

Fu, senza dubbio, parzialmente a causa del suo molto disprezzo per il rigore che fu in grado di compiere passi concettuali che erano intrinsecamente impossibili per gli uomini di un genio più critico [16, p. 33].

Il lavoro di Fourier ha sollevato l'espressione analitica (algebrica) di una funzione almeno ad un livello di parità con la sua rappresentazione geometrica (come una curva). Il suo lavoro ha avuto un impatto fondamentale e di vasta portata sui successivi sviluppi in matematica. (Per esempio, costrinse i matematici a riesaminare la nozione di integrale, e fu il punto di partenza delle ricerche che portarono Cantor alla sua creazione della teoria degli insiemi). Per quanto riguarda il suo impatto sull'evoluzione del concetto di funzione, il lavoro di Fourier:

- Ha superato l' "*atto di fede*" conservato dai matematici del XVIII secolo. (Quindi, ora era chiaro che due funzioni date da diverse espressioni analitiche possono concordare su un intervallo senza necessariamente concordare al di fuori dell'intervallo.)

- Mostra che il concetto di "discontinuo" di Eulero era imperfetto. (Si dimostrò che alcune

6 Fourier fu tra i primi a sottolineare la questione della convergenza delle serie, che era di scarsa importanza per i matematici del XVIII secolo.

delle funzioni discontinue di Eulero erano rappresentabili da una serie di Fourier - un'espressione analitica - ed erano quindi continue nel senso di Eulero.)

- Ha dato nuova enfasi alle espressioni analitiche.

Come vedremo, tutto ciò ha costretto a rivalutare il concetto di funzione. Vedi [3], [6], [7], [9], [16], [19] per i dettagli.

Come abbiamo notato, il periodo 1720-1820 fu caratterizzato dallo sviluppo e dallo sfruttamento degli strumenti del calcolo lasciati in eredità dal XVII secolo. Questi strumenti sono stati impiegati nella soluzione di importanti problemi "pratici" (ad esempio, il problema della corda vibrante, il problema della conduzione termica). Questi problemi, a loro volta, reclamavano l'attenzione su importanti concetti "teorici" (ad es. funzione, continuità, convergenza). Una nuova soggetto (l'Analisi) cominciò a prendere forma, in cui il concetto di funzione era centrale. Ma sia il soggetto che il concetto erano ancora nelle loro fasi formative. Era un periodo di "formalismo" in analisi: le manipolazioni formali dettavano le "regole del gioco", con scarsa attenzione al rigore. Il concetto di funzione era in uno stato di flusso: un'espressione analitica (una formula "arbitraria"), quindi una curva (disegnata a mano libera), e quindi di nuovo un'espressione analitica (ma questa volta una formula "specifica", vale a dire una serie di Fourier). Sia il soggetto dell'analisi (certamente le sue nozioni di base) sia il concetto di funzione erano maturi per una rivalutazione e una riformulazione. Questa è la fase successiva del nostro sviluppo.

5. Il concetto di funzione di Dirichlet Dirichlet era uno dei primi esponenti dello spirito critico in matematica inaugurato nel 19 ° secolo (altri erano Gauss, Abel, Cauchy). Ha intrapreso un'attenta analisi del lavoro di Fourier per renderlo matematicamente rispettabile. Il compito non era semplice:

Per dare un senso a quello che [Fourier] ha compiuto è servito un secolo di sforzi da parte di uomini di "genio più critico", e la fine non è ancora in vista [4, p. 263].

Il risultato di Fourier secondo cui qualsiasi funzione può essere rappresentata dalla sua serie di Fourier era, ovviamente, errato. In un documento fondamentale del 1829, Dirichlet forniva condizioni sufficienti per tale rappresentabilità:

Teorema. Se una funzione f ha solo un numero finito di discontinuità e un numero finito di massimi e minimi in (-L, L), allora f può essere rappresentata dalla sua serie di Fourier su (-L, L). (La serie di Fourier converge puntualmente in f dove f è continua, e a [f(x+)+f(x-)]/2 in ciascun punto x dove f è discontinuo.)

Per una dimostrazione matematicamente rigorosa di questo teorema, era necessario
(a) avere chiare nozioni di continuità, convergenza e integrale definito, e
(b) avere un chiara comprensione del concetto di funzione. Cauchy contribuì al primo e Dirichlet a quest'ultimo. Per prima cosa, osserviamo brevemente i contributi di Cauchy.

Cauchy fu uno dei primi matematici a inaugurare un nuovo spirito di rigore in analisi. Nel suo famoso *Cours d'Analyze* del 1821 e nei suoi lavori successivi, definì rigorosamente i concetti di continuità, differenziabilità e integrabilità di una funzione in termini di limiti.[7]

7 Va notato che gli standard di rigore sono cambiati in matematica (passando non sempre da un rigore minore a uno maggiore), e che il rigore di Cauchy non è il nostro. Kitcher [14] suggerisce che la motivazione di Cauchy nel rigorizzare i concetti di base del calcolo provenne dal lavoro nella serie di Fourier. Vedi anche [8] per lo sfondo del lavoro di Cauchy in analisi.

(Bolzano lo aveva fatto molto prima, ma il suo lavoro passò inosservato per cinquant'anni). Nel trattare la continuità, Cauchy si rivolge alle concezioni di Eulero (nota 4) di "continuo" e "discontinuo". Egli mostra che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(che Eulero considera discontinua) può anche essere scritto come $f(x)=\sqrt{x^2}$, e

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + t^2}\, dt,$$

il che significa che f(x) è anche continua nel senso di Eulero. Questa situazione paradossale, afferma Cauchy, non può accadere quando viene usata la sua definizione di continuità.

La concezione di funzione di Cauchy non è molto diversa da quella dei suoi predecessori:

Quando le quantità variabili sono collegate insieme in modo tale che, quando viene dato il valore ad una di esse, possiamo dedurre i valori di tutte le altre, normalmente concepiamo che queste varie quantità sono espresse per mezzo di una di esse che poi prende il nome di variabile indipendente; e le quantità rimanenti, espresse mediante la variabile indipendente, sono quelle che si chiamano le funzioni di questa variabile [3, p. 104].

Sebbene Cauchy dia una definizione piuttosto generale di una funzione, i suoi commenti successivi suggeriscono che egli aveva in mente qualcosa di più limitato (si veda [10, pagina 10]). Classifica le funzioni come "semplici" e "miste". Le "funzioni semplici" sono a+x, a-x, ax, a/x, a^x , x^a , log(x), sin(x), cos(x), arcoseno(x), arcocoseno(x); e le "funzioni miste" sono composite da quelle "semplici", ad esempio, log(sin(x)). Vedi [3], [6], [8], [9], [12], [14] per il contributo di Cauchy.

Consideriamo ora la definizione di funzione di Dirichlet:

y è una funzione di una variabile x, definita nell'intervallo a<x<b, se ad ogni valore della variabile x in questo intervallo corrisponde un valore definito della variabile y. Inoltre, è irrilevante in che modo viene stabilita questa corrispondenza [19].

La novità nella concezione della funzione di Dirichlet come una corrispondenza arbitraria non sta tanto nella definizione quanto nella sua applicazione. I matematici da Eulero attraverso Fourier e Cauchy avevano parlato della natura "arbitraria" delle funzioni; ma in pratica pensavano a funzioni come espressioni analitiche o curve. Dirichlet fu il primo a prendere sul serio la nozione di funzione come una corrispondenza arbitraria (ma vedi [3, p. 201]). Ciò è reso ampiamente chiaro nel suo articolo del 1829 sulla serie di Fourier, al termine del quale fornisce un esempio di una funzione (la funzione di Dirichlet),

$$D(x) = \begin{cases} c, & x \text{ is rational} \\ d, & x \text{ is irrational,} \end{cases}$$

che non soddisfa l'ipotesi del suo teorema sulla rappresentabilità di una funzione da parte di una serie di Fourier (si veda [10, pagina 15]). La funzione di Dirichlet:

- è stato il primo esempio esplicito di una funzione che non è stata fornita da un'espressione analitica (o da molte di queste), né che fosse stata disegnata come curva a mano libera;

- fu il primo esempio di una funzione discontinua ovunque(nel nostro senso, non in quello di Eulero);

- ha illustrato il concetto di funzione come un accoppiamento arbitrario.

Un altro punto importante è che Dirichlet, nella sua definizione di funzione, fu tra i primi a limitare esplicitamente il dominio della funzione a un intervallo; in passato, la variabile indipendente era autorizzata a coprire tutti i numeri reali. Vedi [3], [5], [9], [10], [15], [17], [27] per i dettagli sul lavoro di Dirichlet.

6. Funzioni "patologiche". Con il suo nuovo esempio D(x), Dirichlet "lascia che il genio fugga dalla bottiglia". Un'ondata di funzioni "patologiche", e classi di funzioni, seguirono nel mezzo secolo successivo. Alcune funzioni sono state introdotte per testare il dominio di applicabilità di vari risultati (ad esempio, la "funzione di Dirichlet" è stata introdotta in connessione con la rappresentabilità di una funzione in una serie di Fourier). Alcune classi di funzioni sono state introdotte per estendere vari concetti o risultati (ad esempio, sono state introdotte funzioni di variazione limitata per testare il dominio di applicabilità dell'integrale di Riemann).

Il carattere dell'analisi ha cominciato a cambiare. Dal XVII secolo, si presumeva che i processi di analisi fossero applicabili a tutte le funzioni, ma ora si è scoperto che sono limitati a particolari classi di funzioni. In effetti, l'indagine su varie classi di funzioni - come funzioni continue, funzioni semi-continue, funzioni differenziabili, funzioni con derivate non integrabili, funzioni integrabili, funzioni monotone, funzioni continue che non sono monotone a tratti - divenne una preoccupazione principale dell'analisi. (Un esempio è lo studio di Dini sulle funzioni non differenziabili continue, per le quali definiva i cosiddetti “Dini's derivatives”). Mentre i matematici avevano in precedenza cercato l'ordine e la regolarità nell'analisi, ora si dilettavano nello scoprire eccezioni e irregolarità. Le personalità imponenti legate a questi sviluppi furono Riemann e Weierstrass, anche se molti altri diedero importanti contributi (ad es. Du Bois Reymond e Darboux).

Il primo grande passo in questi sviluppi fu preso da Riemann nella sua *Habilitationsschrift* del 1854, che trattava della rappresentazione delle funzioni nelle serie di Fourier. Come ricordiamo, i coefficienti di una serie di Fourier sono dati da integrali. Cauchy aveva sviluppato il suo integrale solo per funzioni continue, ma le sue idee potevano essere estese a funzioni con un numero finito di discontinuità. Riemann estese il concetto di integrale di Cauchy e allargò così la classe di funzioni rappresentabili dalla serie di Fourier. Questa estensione (conosciuta oggi come integrale di Riemann) si applica alle funzioni di variazione limitata, una classe di funzioni molto più ampia delle funzioni continue di Cauchy. Quindi, una funzione può avere infinitamente molte discontinuità (che può essere densa in qualsiasi intervallo) e comunque essere Riemann-integrabile.[8] Riemann ha dato il seguente esempio (pubblicato nel 1867) nel suo *Habilitationsschrift*:

$$f(x)=1+\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\ldots$$

dove per qualsiasi numero α reale la funzione (α) è definita come 0 se $\alpha=1/2+k$ (con k intero), e α meno il numero intero più vicino quando $\alpha\neq 1/2+k$ (k, integrale(??)). Questa funzione è discontinua per tutte le x=m/2n, dove m è un intero relativamente primo a 2n (si veda [6, P. 325]). In contrasto con la funzione D (x) di Dirichlet, questa è data da un'espressione analitica ed è Riemann-integrabile.

Si può dire che il lavoro di Riemann segni l'inizio di una teoria del matematicamente discontinuo (sebbene ci siano degli esempi isolati nelle opere di Fourier e di Dirichlet). Piantò il discontinuo saldamente sulla scena matematica. L'importanza di questo sviluppo può essere dedotta dalla

8 Ci sono, naturalmente, restrizioni sulle discontinuità di una funzione integrabile di Riemann. Come ora sappiamo (seguendo Lebesgue), una funzione è Riemann-integrabile se e solo se le sue discontinuità formano un insieme di Lebesgue misura zero

seguente affermazione di Hawkins [10, p. 3]:

La storia della teoria dell'integrazione dopo Cauchy è essenzialmente una storia di tentativi di estendere il concetto integrale a quante più funzioni discontinue possibile; tali tentativi potrebbero diventare significativi solo dopo che l'esistenza di funzioni altamente discontinue è stata riconosciuta e presa sul serio.

Nel 1872, Weierstrass fece sobbalzare la comunità matematica con il suo famoso esempio di una funzione continua e non differenziabile

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

dove a è un numero dispari, b un numero reale in (0,1) e $ab > 1+\frac{3\pi}{2}$ (vedi [12, pag 387]). (Bolzano aveva dato lo stesso esempio nel 1834, ma passò inosservato). Questo esempio era contrario a tutta l'intuizione geometrica. Infatti, fino al 1870 circa, la maggior parte dei libri sul calcolo "dimostrò" che una funzione continua è differenziabile, tranne forse in un numero finito di punti! (Vedi [10, pag 43]). Anche Cauchy credeva così.[9]

L'esempio di Weierstrass ha iniziato l'allontanamento ("separazione") del continuo dal differenziabile in analisi. Il lavoro di Weierstrass (e altri in questo periodo) richiese un riesame dei fondamenti dell'analisi e portò alla cosiddetta aritmetizzazione dell'analisi, in questo processo Weierstrass fu un primo motore. Come osserva Birkhoff [3, p. 71]:

Weierstrass ha dimostrato la necessità di standard più elevati di rigore costruendo controesempi a nozioni plausibili e ampiamente condivise.

I controesempi giocano un ruolo importante in matematica. Illuminano le relazioni, chiariscono i concetti e spesso portano alla creazione di nuove matematiche. (Un interessante caso di studio sul ruolo dei controesempi in matematica può essere trovato nel libro *Proofs and Refutations* di I. Lakatos). L'impatto degli sviluppi che abbiamo descritto è stato, come abbiamo già notato, cambiare il carattere dell'analisi. È nato un nuovo soggetto: la teoria delle funzioni di una variabile reale. Hawkins [10, p. 119] fornisce una vivida descrizione dello stato delle cose:

La nascente teoria delle funzioni di una variabile reale nasce dallo sviluppo di un atteggiamento più critico, supportato da numerosi controesempi, verso il ragionamento di matematici precedenti. Così, per esempio, sono state scoperte funzioni non differenziabili continue, serie discontinue di funzioni continue e funzioni continue che non sono monotone a tratti. L'esistenza di eccezioni è stata accettata e più o meno prevista. E gli esempi di derivate non integrabili, curve rettificabili per cui la formula integrale classica è inapplicabile, funzioni non integrabili che sono il limite di funzioni integrabili, derivati di Harnack-integrabili per i quali il Teorema Fondamentale II è falso, e controesempi alla forma classica del Teorema di Fubini sembra essere stato ricevuto in questo stato d'animo. L'idea, come Schoenflies ha messo nel suo rapporto ..., doveva procedere, come nella patologia umana, per scoprire quanti più fenomeni eccezionali possibili al fine di determinare le leggi in base alle quali potevano essere classificati.

9 Il malessere nella comprensione e nell'uso del concetto di funzione in questo periodo può essere raccolto dal seguente resoconto di Hankel (nel 1870) riguardante il concetto di funzione così come appare nei "migliori manuali di analisi" (frase di Hankel): "Un [testo] definisce la funzione nella maniera euleriana; l'altro afferma che dovresti cambiare la y con x secondo una regola, senza spiegare questo misterioso concetto; il terzo la definisce come Dirichlet; il quarto non la definisce affatto; ma ognuno trae da loro conclusioni che non sono contenute in essi" [17]. Vedi anche [3, p. 198].

Va sottolineato, tuttavia, che non tutti erano soddisfatti di questi sviluppi (almeno in analisi), come attestano le seguenti citazioni da Hermite (nel 1893) e Poincaré (nel 1899) [15, p. 973]:

"*Mi allontano con spavento e orrore da questo deplorevole male di funzioni che non hanno derivate.*"

"*La logica a volte crea dei mostri. Per mezzo secolo abbiamo visto una massa di funzioni bizzarre che sembrano essere costrette a somigliare il meno possibile a funzioni oneste che hanno un qualche scopo. Più continuità, o meno continuità, più derivati, e così via. In effetti, dal punto di vista della logica, queste strane funzioni sono le più generali; d'altra parte quelli che si incontrano senza cercarli e che seguono leggi semplici appaiono come un caso particolare che non ammonta a più di un piccolo angolo.*

In passato, quando si inventava una nuova funzione, era per uno scopo pratico; oggi uno le inventa di proposito per mostrare difetti nel ragionamento dei nostri padri che si potrà dedurre solo da queste.

Se la logica fosse l'unica guida dell'insegnante, sarebbe necessario iniziare con le funzioni più generali, cioè con le più bizzarre. È il principiante che dovrebbe essere messo alle prese con questo museo teratologico ".

L'effetto degli eventi che abbiamo descritto sul concetto di funzione può essere riassunto come segue. Stimolata dalla concezione della funzione di Dirichlet e dal suo esempio D(x), alla nozione di funzione come una corrispondenza arbitraria viene dato libero sfogo e ottiene l'accettazione generale; mentre all'aspetto geometriche delle funzioni viene data poca considerazione. (Le funzioni di Riemann e Weierstrass non potevano certo essere "disegnate", né la maggior parte degli altri esempi forniti durante questo periodo.) Dopo il lavoro di Dirichlet, il termine "funzione" acquisì un chiaro significato indipendente dal termine "espressione analitica". Nel corso del secondo mezzo secolo, i matematici introdussero un gran numero di esempi di funzioni nello spirito dell'ampia definizione di Dirichlet, e i tempi furono maturi per uno sforzo per determinare quali funzioni erano effettivamente descrivibili per mezzo di "espressioni analitiche", un termine vago in uso durante i due secoli precedenti. Vedi [3], [10], [14], [15] per i dettagli di questo periodo.

7. Schema di classificazione di Baire. La questione se ogni funzione nel senso di Dirichlet sia rappresentabile analiticamente è stata posta per la prima volta da Dini nel 1878 (vedi [5, pag 31]). Baire si era impegnato a dare una risposta nella sua tesi di dottorato del 1898. La nozione stessa di rappresentabilità analitica doveva essere chiarita, poiché era stata usata in passato in modo informale. Lo stesso Dini la ha usata vagamente, chiedendo "se ogni funzione potesse essere espressa analiticamente, per tutti i valori della variabile nell'intervallo, da una serie di operazioni finite o infinite (" *opérations du calcul* ") sulla variabile" [5, p. 32].

Il punto di partenza per lo schema di Baire era il Teorema di approssimazione di Weierstrass (pubblicato nel 1885): *ogni funzione continua f(x) su un intervallo [a,b] è un limite uniforme di polinomi su [a,b]*. Baire ha chiamato la classe delle funzioni continue di classe 0. Quindi ha definito le funzioni della classe 1 come quelle che non sono nella classe 0, ma quali sono i limiti (puntuali) delle funzioni della classe 0. In generale, le funzioni della classe m sono quelle funzioni che non sono in nessuna delle classi precedenti, ma sono rappresentabili come limiti di successioni di funzioni della classe m-1. Questo processo è esteso, per induzione transfinita, a tutti gli ordinali meno del primo Ω ordinario non numerabile. (Dato che le funzioni di Baire così costruite sono chiuse sotto i limiti, non si produce niente di nuovo se questo processo viene ripetuto.) Questa classificazione nelle classi di Baire $\frac{\alpha}{(\alpha<\Omega)}$ è chiamata la *classificazione di Baire,* e le funzioni che costituiscono l'unione delle classi di Baire sono chiamate *funzioni di Baire*.

Baire chiamava una funzione "*rappresentabile analiticamente*" se apparteneva a una delle classi di Baire. Quindi, una funzione è analiticamente rappresentabile (nel senso di Baire) se può essere costruita da una variabile e da costanti mediante un insieme finito o numerabile di aggiunte, moltiplicazioni e passaggi a limiti puntuali.

La raccolta di funzioni analiticamente rappresentabili (funzioni di Baire) è molto comprensiva. Ad esempio, le funzioni discontinue rappresentabili dalla serie di Fourier appartengono alla classe 1. Quindi, le funzioni rappresentabili dalla serie di Fourier costituiscono solo una parte della totalità delle funzioni rappresentabili analiticamente. (Ricordiamo l'affermazione di Fourier che ogni funzione può essere rappresentata da una serie di Fourier!) Come altro esempio, Baire ha mostrato che la funzione "patologica" di Dirichlet D(x) è di classe 2, poiché

$$D(x) = \begin{Bmatrix} c, & x \text{ is rational} \\ d, & x \text{ is irrational} \end{Bmatrix} = (c-d) \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2m} + d.$$

Inoltre, qualsiasi funzione ottenuta da una variabile e da costanti mediante un'applicazione delle quattro operazioni algebriche e delle operazioni di analisi (come la differenziazione, l'integrazione, l'espansione in serie, l'uso di funzioni trascendentali) - ovvero il tipo di funzione conosciuta in passato come "Espressione analitica" - è stato dimostrato essere rappresentabile analiticamente.

Lebesgue seguì questi studi e mostrò (nel 1905) che ciascuna delle classi di Baire non è vuota e che le classi di Baire non esauriscono tutte le funzioni.[10] Così, Lebesgue stabilì che ci sono funzioni che non sono analiticamente rappresentabili (nel senso di Baire). Ha quindi di fatto esibito effettivamente una funzione al di fuori della classificazione di Baire, "*usando un metodo profondo ma estremamente complesso*" [19] .[11] Secondo Luzin [19], "*l'impatto della scoperta di Lebesgue è stato altrettanto sorprendente di quello di Fourier nel suo tempo*. "Vedi [5], [19], [20], [21] per i dettagli.

Non tutte le funzioni nel senso della concezione della funzione di Dirichlet come una corrispondenza arbitraria sono analiticamente rappresentabili (nel senso di Baire), sebbene sia (apparentemente) molto difficile da produrre una funzione specifica che non lo sia. Esistono "*realmente*" tali funzioni non analiticamente rappresentabili? Questo fa parte della nostra storia nella prossima sezione.

8. Discussioni sulla natura degli oggetti matematici. La teoria delle funzioni è stata caratterizzata da alcuni all'inizio del XX secolo come "*la branca della matematica che si occupa dei controesempi*". Questa visione non è stata universalmente applaudita, come indicano le citazioni precedenti di Hermite e Poincaré. In particolare, la concezione generale della funzione di Dirichlet cominciò a essere messa in discussione. Nella sua definizione sono state sollevate obiezioni contro la frase secondo cui "*è irrilevante in che modo viene stabilita questa corrispondenza*".

---

10 In effetti, ci sono funzioni misurabili (secondo Lebesgue) che non sono funzioni di Baire. Allo stesso tempo, Lebesgue ha dimostrato che ad ogni funzione misurabile f corrisponde una funzione di Baire che differisce da f solo su un insieme di misura zero.

11 La costruzione è abbastanza "disordinata" e usa l'assioma della scelta. Usando argomenti non consecutivi (??), si può dimostrare con un argomento di conteggio che le funzioni di Baire hanno cardinalità c. Poiché l'insieme di tutte le funzioni ha cardinalità 2^c, ci sono innumerevoli funzioni che non sono analiticamente rappresentabili nel senso di Baire.
La nozione di rappresentabilità analitica di Baire non è l'ultima parola sull'argomento. Luzin [19] cita l'esempio di una "espressione analitica"

$$f(x) = \lim_{y\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{y\to\infty} P_{m,n}(x,y)$$

che, per una scelta appropriata dei polinomi $P_{m,n}(x,y)$, non è esprimibile come una funzione di Baire.

Successivamente gli argomenti a favore e contro questo punto si collegano agli argomenti a favore e contro l'assioma della scelta (esplicitamente formulato da Zermelo in 1904) e ampliato in un dibattito sul fatto che i matematici siano liberi di creare i propri oggetti a loro piacimento.

Ci fu un famoso scambio di lettere nel 1905 tra Baire, Borel, Hadamard e Lebesgue riguardo all'attuale stato logico della matematica (vedi [5], [20], [21] per i dettagli). Gran parte del dibattito riguardava la teoria delle funzioni: la questione cruciale era se una definizione di un oggetto matematico (diciamo un numero o una funzione), per quanto data, legittima l'esistenza di quell'oggetto; in particolare, se l'assioma di scelta di Zermelo sia uno strumento matematico legittimo per la definizione o costruzione di funzioni. In questo contesto, la concezione di funzione di Dirichlet è risultata essere troppo ampia da alcuni (ad esempio, Lebesgue) e priva di significato da altri (ad esempio, Baire e Borel), ma era accettabile per altri ancora (ad esempio, Hadamard). Baire, Borel e Lebesgue hanno sostenuto il requisito di una "legge" definita di corrispondenza nella definizione di una funzione. La "legge", inoltre, deve essere ragionevolmente esplicita, cioè, compresa e comunicabile a chiunque voglia studiare la funzione.

Per illustrare il punto, Borel confronta il numero π (le cui cifre successive possono essere determinate senza ambiguità, e che quindi considerate ben definite) con il numero ottenuto eseguendo il seguente "esperimento mentale". Supponiamo di schierare infinitamente molte persone e di chiedere a ciascuno di loro di nominare una cifra a caso. Borel sostiene che, a differenza di π, questo numero non è ben definito in quanto le sue cifre non sono correlate da alcuna legge. Stando così le cose, due matematici che discutono di questo numero non saranno mai certi di parlare dello stesso numero. In breve, la posizione di Borel è che senza una legge definita di formazione delle cifre di un decimale infinito, non si può essere certi della sua identità.

Hadamard non ha avuto difficoltà ad accettare come legittimo il numero risultante dall'esperimento mentale di Borel. A titolo illustrativo, ha alluso alla teoria cinetica dei gas, in cui si parla delle velocità delle molecole in un dato volume di gas, sebbene nessuno la conosca con precisione. Hadamard sentiva che "*il requisito di una legge che determina una funzione. . . assomiglia molto all'esigenza di un'espressione analitica per quella funzione, e questo è un ritorno al XVIII secolo*" [19].

Le questioni descritte qui facevano parte di ampi dibattiti su vari modi di fare analisi: sintetico contro analitico, o idealista contro empirista. Questi dibattiti, a loro volta, prefiguravano le successive "battaglie" tra i sostenitori e gli oppositori delle varie filosofie della matematica (ad esempio, il formalismo e l'intuizionismo) che si occupano della natura e del significato della matematica. E, naturalmente, il problema non è stato risolto.[12] Vedi [4], [5], [19], [20], [21] per i dettagli.

Il periodo 1830-1910 fu testimone di un'immensa crescita della matematica, sia per portata che per profondità. Sono stati formati nuovi campi matematici (analisi complessa, teoria dei numeri algebrici, geometria non-Euclidea, algebra astratta, logica matematica), e quelli più vecchi sono stati approfonditi (analisi reale, probabilità, teoria dei numeri analitici, calcolo delle variazioni). I matematici si sentivano liberi di creare i loro sistemi (quasi) a volontà, senza trovare la necessità di cercare motivazioni o applicazioni in contesti concreti (fisici). Allo stesso tempo, nel corso del XIX secolo, ci fu una rivalutazione delle conquiste ottenute, accompagnata da una preoccupazione per le basi di (vari rami della) matematica. Queste tendenze si riflettono nell'evoluzione della nozione di funzione.

12 C'è stato recentemente un rinnovato interesse, tra gli altri da parte degli informatici, nella "matematica intuizionista" di Brouwer. Il revival, sotto forma di "matematica costruttiva", è stato guidato da E. Bishop, ed è evidenziato in un articolo di M. Mandelkern , "Matematica costruttiva", matematica. Mag. 58 (1985) 272-280.

Il concetto si sviluppa dai suoi modesti inizi come una formula o una curva geometrica (XVIII e inizio XIX secolo) a una corrispondenza arbitraria (Dirichlet). Quest'ultima idea è sfruttata nel corso del XIX secolo attraverso la costruzione di varie funzioni "patologiche". Verso la fine del secolo, c'è una rivalutazione delle realizzazioni passate (classificazione di Baire, controversie relative all'uso dell'assioma della scelta), molte di esse nel più ampio contesto dei dibattiti sulla natura e sul significato di matematica.

9. Sviluppi recenti. Qui trattiamo brevemente tre sviluppi più recenti relativi al concetto di funzione.

A) Funzioni L_2. L'insieme $L_2 = \{ f(x) : f^2(x) \text{ è } Ledesgue-misurabile \}$ forma uno "spazio di Hilbert" - un oggetto fondamentale nell'analisi funzionale. Due funzioni in L_2 sono considerate uguali se concordano ovunque tranne che su un insieme di misura zero di Lebesgue. Pertanto, in Teoria delle funzioni L_2, si può sempre lavorare con i rappresentanti in una classe di equivalenza piuttosto che con le singole funzioni. Queste nozioni, come hanno osservato Davis e Hersh [4, p. 269],

comportano un'ulteriore evoluzione del concetto di funzione. Perché un elemento in L_2 *non è una funzione, nel senso di Eulero di un'espressione analitica o nel senso di Dirichlet di una regola o di una mappatura che associa un insieme di numeri a un altro. È come una funzione, nel senso che può essere soggetta a determinate operazioni normalmente applicate alle funzioni (aggiunta, moltiplicazione, integrazione). Ma dal momento che è considerato invariato se i suoi valori sono alterati su un insieme arbitrario di misura zero, non è certamente solo una regola che assegna valori in ogni punto del suo dominio.*

B) Funzioni generalizzate (distribuzioni). Il concetto di una distribuzione o di una funzione generalizzata è un'estensione molto significativa e fondamentale del concetto di funzione. La teoria delle distribuzioni sorse negli anni '30 e '40. Fu creata per dare un significato matematico alla differenziazione delle funzioni non differenziabili - un processo che i fisici avevano impiegato (non rigorosamente) per qualche tempo. Così, Heaviside (nel 1893) "differenzia" la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

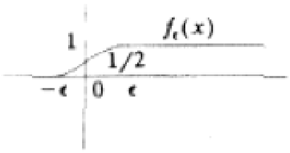
ottenere l'impulso "funzione"

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$ [13]

(Nel 1930, Dirac introdusse δ(x) come una comoda notazione nella formulazione matematica della teoria dei quanti).

In termini formali, una distribuzione è un funzionale lineare continua su uno spazio D di funzioni infinitamente differenziabili (chiamate "funzioni di test") che svaniscono al di fuori di un intervallo

13 Quanto segue è un argomento euristico: Approssimare f (x) con una sequenza di funzioni differenziabili $f_\varepsilon(x)$ come nel diagramma:



; quindi $f'_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ quando $\varepsilon \to 0$.

[a,b]. A qualsiasi funzione continua (o integrabile localmente) F, corrisponde una distribuzione $\Phi_F : D \rightarrow \mathbb{C}$ data da $\Phi_F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)x(t)dt$. Tuttavia, non tutti le distribuzioni provengono da una funzione di questo tipo: La distribuzione $\delta : D \rightarrow \mathbb{C}$ data da δ(x)=x(0) corrisponde alla "*δ-funzione di Dirac*" sopra menzionata, e non deriva da alcuna funzione F nel modo descritto sopra. Vedi [4], [18], [26].

Una proprietà di base delle distribuzioni è che ogni distribuzione ha una derivata che è di nuovo una distribuzione.[14] Infatti,

Il merito duraturo della teoria della distribuzione è dovuto al fatto che le operazioni fondamentali di analisi, differenziazione e convoluzione e le trasformate di Fourier / Laplace e la loro inversione, che richiedevano così tanta cura nella struttura classica, ora potevano essere eseguite senza scrupoli obbedendo puramente a regole algebriche [26, p. 338].

C) Teoria delle categorie. La nozione di una funzione come una mappatura tra insiemi arbitrari divenne gradualmente dominante nella matematica del 20 ° secolo.[15] L'algebra ebbe un forte impatto su questo sviluppo, in cui il concetto di una funzione era posto nel quadro generale del concetto di mappatura da un insieme all'altro. Pertanto, le trasformazioni lineari degli spazi vettoriali (principalmente $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$) sono state trattate per gran parte del 19 ° secolo. Omomorfismi di gruppi e automorfismi di campi furono introdotti nella seconda parte di quel secolo. Già nel 1887 Dedekind diede una definizione abbastanza "moderna" del termine "mappatura" [23, p. 75]:

Con una mappatura di un sistema S si comprende una legge, in base alla quale a ciascun determinato elemento s di S è associato un determinato oggetto, che è chiamato l'immagine di s ed è denotato da φ(s); diciamo anche che φ(s) corrisponde all'elemento s, che φ(s) è causato o generato dalla mappatura di s, che s viene trasformato dalla mappatura in φ(s).

Anche l'analisi ha svolto un ruolo importante in questa estensione del dominio e nella gamma di definizione di una funzione in insiemi arbitrari. (Ricordiamo che la definizione di funzione di Dirichlet era come una corrispondenza arbitraria tra numeri (reali).) Così, nel XVIII secolo, Eulero e altri trattarono le funzioni (informalmente) di diverse variabili. Nel 1887, considerato l'anno di nascita dell'analisi funzionale, Volterra definì la nozione di "funzionale" che chiamò una "funzione di funzioni". (Un funzionale è una funzione il cui dominio è un insieme di funzioni e il cui raggio(??) sono i numeri reali o i numeri complessi). Nei primi due decenni del XX secolo vennero introdotte le nozioni di spazio metrico, spazio topologico, spazio di Hilbert e spazio di Banach; le funzioni (operatori, operatori lineari) tra tali spazi giocano un ruolo preminente. Vedi [15] per i dettagli.

Nel 1939, Bourbaki diede la seguente definizione di una funzione [3, p. 7]:

Siano E e F due insiemi, che possono o non possono essere distinti. Una relazione tra un elemento variabile x appartenente ad E e un elemento variabile y appartenente a F

14 In particolare, ogni funzione continua è "differenziabile" (cioè ha una distribuzione come "derivata"). In effetti, L. Schwartz, uno dei creatori della teoria delle distribuzioni, sosteneva di aver introdotto delle distribuzioni per poter differenziare le funzioni continue. Lützen [18, p. 305] afferma che "la teoria delle distribuzioni rappresenta probabilmente l'approssimazione più vicina alla visione di Eulero di un calcolo generalizzato", una visione che Eulero tentò di mettere in pratica nella sua soluzione del problema delle corde vibranti.

15 La teoria degli insiemi "Naive" è stata sviluppata da Cantor negli ultimi trent'anni del XIX secolo.

è detta relazione funzionale in y se, per tutti gli x in E, esiste un unico y in F che è nella relazione data con x.

Diamo il nome "funzione" all'operazione che in questo modo associa ad ogni elemento x in E l'elemento y in F che è nella relazione data con x; y si definisce come il valore della funzione sull'elemento x, e si dice che la funzione sia determinata dalla relazione funzionale data. Due relazioni funzionali equivalenti determinano la stessa funzione.

Bourbaki ha anche dato la definizione di una funzione come un certo sottoinsieme del prodotto cartesiano E X F. Questa è, naturalmente, la definizione di funzione come un insieme di coppie ordinate.

Tutte queste definizioni "moderne" e generali di funzione sono state date in termini di insiemi, e quindi la loro logica deve ricevere lo stesso controllo di quello della teoria degli insiemi.

Nella teoria delle categorie, nata alla fine degli anni '40 per dare un'espressione formale a certi aspetti della teoria dell'omologia, il concetto di funzione assume un ruolo fondamentale. Può essere descritto come una "associazione" da un "oggetto" A ad un altro "oggetto" B. Gli "oggetti" A e B non devono avere alcun elemento (cioè, non è necessario che siano insiemi nel senso comune). Infatti, gli oggetti A e B possono essere completamente dispensati(??). Una "categoria" può quindi essere definita come costituita da funzioni (o "mappe"), che vengono prese come concetti non definiti (primitivi) che soddisfano certe relazioni o assiomi. Infatti, nel 1966 Lawvere delineò il modo in cui la teoria delle categorie può sostituire la teoria degli insiemi come base per la matematica. Vedi [11] per i dettagli.

Negli sviluppi recenti delineati in questa sezione, abbiamo visto il concetto di funzione modificato (funzioni L_2), generalizzato (distribuzioni) e infine "generalizzato fuori dall'esistenza" (teoria delle categorie). Siamo al punto di partenza?

Ringraziamenti. Sono molto grato al mio amico e collega Abe Shenitzer per il suo aiuto nella preparazione di questo articolo. Grazie anche all'editor Warren Page e V. Frederick Rickey per i loro preziosi suggerimenti.

δ φ π α Ω ε Φ