Peano

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

1) 0 è un numero naturale
2) Il successore di ogni numero naturale è un numero nat.
3) 0 non è successore di alcun numero naturale
4) Numeri diversi hanno successori diversi
5) Se un insieme di numeri naturali contiene lo zero e il successore di ogni proprio elemento, allora esso coincide con l'intero insieme dei numeri naturali

(principio di induzione)

1) $0 \in \mathbb{N}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \; S(n) \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $S(n)$ è il successore di n

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \; S(n) \neq 0$

4) $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad n \neq m \rightarrow S(n) \neq S(m)$

5) Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ t.c.

   5.1) $0 \in A$

   5.2) Se $n \in A$ allora $S(n) \in A$, vale a dire:

   $S(A) \subseteq A$. Sotto queste ipotesi necessariamente $A = \mathbb{N}$

1) $\mathbb{N}$ non è l'insieme vuoto. Contiene almeno lo 0

2) "successore" è una funzione $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3) identifica la posizione dello zero.

3.1) Lo zero non è l'unico elemento

3.2) esclude una struttura infinita a destra e a sinistra

3.3) esclude che la struttura di $\mathbb{N}$ sia ciclica

4) La funzione successore manda elementi distinti in elementi distinti.

5) $\mathbb{N}$ è infinito. $\mathbb{N}$ non ha una forma "sconnessa" (fatta di più pezzi)

Il quinto postulato si può "tradurre" utilizzando l'idea del "possedere una proprietà" pensando ad A come all'insieme costituito dai numeri naturali che possiedono qualche proprietà P, ovvero come l'insieme dei naturali n che rendono vero un qualche enunciato aperto del tipo $P(x)$

Sia $P(x)$ un enunciato aperto t.c.

- $P(0)$ è vero
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ è vero

Allora $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ è vero

$0 \quad S(0) \quad S(S(0)) \quad S(S(S(0))), \ldots$

Grazie a questo posso stabilire l'ordine e la somma.

Frege

A partire dallo zero, Frege introduce ricorsivamente ogni altro numero naturale sulla base del precedente

Così il numero 1 è associato al solo concetto di "zero"

Il numero 2 ai due concetti di "zero" e "uno"

Il numero 3 ai tre concetti di "zero", "uno", "due"

Definizione: Dati due insiemi A e B si dicono equipotenti se sono in corrispondenza biunivoca, cioè se esiste una funzione biettiva di dominio A e insieme delle immagini B.

Dato un triangolo qualsiasi l'insieme A dei due lati e l'insieme delle sue mediane B.
A e B sono equipotenti.

Per verificare tale affermazione considero la relazione $R \subseteq A \times B$ che ad ogni lato $a \in A$ fa corrispondere la mediana $b \in B$ avente per estremi il vertice opposto al lato ed il punto medio del lato a.

R è una funzione?

Ad ogni lato corrisponde una ed una sola mediana.

R è suriettiva perché ogni mediana è corrispondente di un lato.

R è iniettiva perché a lati distinti corrispondono mediane distinte.

(Contro) esempio

$I = \{0; 1\}$ $J : \{10; 11; 12\}$ non sono equipotenti.

La relazione fra I e J può essere iniettiva ma non suriettiva

Proposizione : La relazione di equipotenza tra insiemi è una relazione di equivalenza.

La rel. di equipotenza è riflessiva. Infatti ogni insieme $I \subset U$ è equipotente a se stesso. Per esempio l'identità ovvero la relazione che a ogni elemento $x \in I$ fa corrispondere x stesso. (Si tratta di una biezione)

La rel. di equipotenza è simmetrica. Infatti se $I \subset U$ è equipotente $J \subset U$ significa che esiste una funzione biettiva

$f : I \to J$ ed essendo f biettiva esiste

$f^{-1} : J \to I$ anch'essa biettiva

La relazione di equipotenza è transitiva

Se I è equipotente a J, J è equipotente a L
si avrà I è equipotente a L.

$f : I \to J$

$g : J \to L$

$g \circ f : I \to L$
è anch'essa biettiva

pertanto anche I è equipotente a L