# Capitolo 1

# Introduzione storica

In questo capitolo diamo alcune coordinate storiche con qualche commento per comprendere il contesto matematico nel quale nascono i primi tentativi di esplicitare il concetto di funzione e, più in generale, in cui nasce l'analisi.

Ci interesserà fare una distinzione tra il concetto di funzione come lo conosciamo oggi e le idee intuitive ad esso legate, al fine di non confonderli nel seguito del testo.

Dopodichè saremo pronti a descrivere il panorama matematico a cavallo tra il diciassettesimo ed il diciottesimo secolo e ad introdurre le prime definizioni di funzione.

Riteniamo importante questa distinzione per evitare il pregiudizio spesso presente del leggere la storia della matematica con le lenti della matematica odierna ed in particolare con la logica della teoria degli insiemi. Cercheremo da questo punto di vista di sottolineare l'importanza di staccarsi da questo pregiudizio per comprendere più a fondo l'evoluzione reale dei concetti e non quella deformata da una loro interpretazione "insiemistica".

Organizziamo il capitolo come segue:

- Nella prima sezione tratteremo dell'idea del concetto di funzione in relazione alle idee intuitive di base che ne hanno segnato l'evoluzione ben prima di una sua definizione esplicita. Cerchiamo di proporre un punto di vista diverso da quello indotto dalla teoria degli insiemi.

- Nella seconda sezione facciamo un elenco di alcune tappe storiche che hanno segnato le concezioni legate alle idee intuitive di funzione: osserveremo la presenza di queste idee in tutta la storia della matematica. Vedremo inoltre il modo in cui il calcolo infinitesimale fornisce uno strumento potentissimo per la trattazione di problemi e applicazioni fino ad allora considerati indipendenti.

- Nella terza sezione proviamo a dare uno sguardo più approfondito sul secolo diciottesimo e sulla situazione storico/matematica che ha portato alle prime definizioni del concetto di funzione.

- Nella quarta sezione vediamo i primi tentativi di definizione del concetto di funzione dovuti a Leibniz e Bernoulli.

## 1.1 Che cosa intendiamo oggi per funzione.

Nel primo libro degli *Elements de mathematique* di Bourbaki dedicato alle strutture fondamentali dell'Analisi, viene così definito il termine "funzione":

> «Siano $E$ e $F$ due insiemi distinti o no. Una relazione tra una variabile $x$ di $E$ e una variabile $y$ di $F$ è detta relazione funzionale in $y$, o relazione funzionale di $E$ verso $F$, se, qualunque sia $x \in E$, esiste un elemento $y$ di $F$ ed uno solo, che stia nella relazione considerata con $x$. Si dà il nome di funzione all'operazione che associa così ad ogni elemnto $x \in E$ l'elemento $y$ di $F$ che si trova nella relazione data con $x$; si dice che $y$ è il valore della funzione per l'elemento $x$ e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata. Due relazioni funzionali equivalenti determinano la stessa funzione.»

Le definizioni più recenti, come per esempio quelle di Dieudonnè del 1969 (in [4]) o di Kolmogorov e Fomine del 1974 (in [5]), non si discostano nella sostanza da quella data da Bourbaki: le funzioni vengono generalmente intese come sottoinsiemi degli elementi di un prodotto cartesiano. Anche il punto di vista assunto dagli autori dei libri di testo per le scuole superiori e per i corsi universitari odierni non è troppo dissimile, in genere, da quello presentato [1].

L'ampia diffusione della definizione del concetto di funzione nell'ambito della teoria degli insiemi non ci deve far pensare che il dibattito sul chiarimento di tale concetto sia concluso. Se da un lato, infatti, la definizione bourbakista ha l'indubbio merito, almeno in ambito didattico, di essere un valido compromesso tra le esigenze di contenuto e la semplicità di presentazione, dall'altro la pratica matematica ha messo in luce come tale definizione non sia del tutto soddisfacente, rendendo necessarie ulteriori generalizzazioni della definizione di funzione, anche in sistemi assiomatici diversi da quello della teoria degli insiemi [2].

Questo fatto mostra così che il processo di chiarimento del concetto di funzione sia tuttora in corso, e che la domanda su che cosa significhi oggi il termine "funzione" non ha una risposta univova. I motivi per cui risulta difficile la riduzione ad un'unica definizione formale dei concetti intuitivi a cui il termine "funzione" si collega sono da ricercare nella varietà della natura di questi concetti. Sfogliando, ad esempio, un qualunque libro di storia della matematica possiamo rintracciare la presenza delle seguenti idee "intuitive" di come si è inteso ciò che oggi chiamiamo "funzione" [3]:

- Una funzione è una *formula* di $x$.
- La variabile $y$ è una funzione della variabile $x$ quando è data una *regola* che ad ogni valore di $x$ produce un corrispondente valore di $y$.

[1] Si veda per esempio [6] e i riferimenti alla bibliografia.

[2] In [6], C. Marchini fa un elenco di alcune generalizzazioni del concetto di funzione nella storia matematica recente: si pensi ad esempio alla teoria delle categorie, le distribuzioni, o il concetto di funzione ricorsiva. Ai fini della tesi che vogliamo sostenere, è importante sottolineare che tali generalizzazioni non sono dettate da un gusto di astrazione o di estensione dei termini dell'analisi ma sono spesso dettate da esigenze concrete relative a problemi interni ed esterni alla matematica (vedi [3], p.20).

[3] L'elenco che riportiamo è tratta da [7]. I termini in corsivo nell'elenco si rifanno ai concetti intuitivi che vogliamo sottolineare: quello di formula, regola di corrispondenza, grafico, dipendenza, tavola di valori, oggetto sintattico.

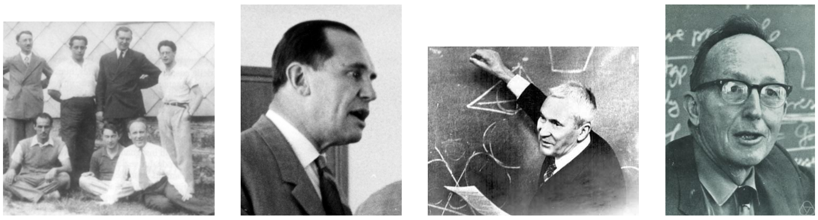


**Figura 1.1.** Da destra verso sinistra: il gruppo Bourbaki, Jean Dieudonne, Andrej Nikolaevič Kolmogorov e Saunders Mac Lane.

- Una funzione è una *curva nel piano* $(x, y)$ tale che ogni linea verticale intersechi la curva in un solo punto.
- La quantità $y$ è funzione della quantità $x$ quando $y$ *dipende* da $x$.
- Una funzione è determinata da una *tavola di valori* che associa ad ogni valore assunto da $x$ un valore assunto da $y$.
- Una funzione $f$ di un insieme in un altro insieme è un *simbolo* $f$ tale che ogni volta che il termine $x$ sta per un elemento di $X$ allora il simbolo $fx$ sta per un elemento di $Y$ che è il valore della funzione in $x$.

Ancor oggi alcuni studi mostrano che tali concezioni differenti del concetto di funzione sono rintracciabili, in maniera più o meno velata, anche nei libri di testo adottati nelle scuole secondarie [4].

In quest'ottica, la formulazione del concetto di funzione in termini di teoria degli insiemi, nel tentativo di chiarire singolarmente i termini di applicazione, relazione, corrispondenza, grafico, perde il bagaglio di idee di base che hanno guidato le concezioni del concetto di funzione nella storia.

E' in questo senso quindi che non possiamo considerare la definizione bourbakista come il riferimento assoluto da tenere a mente per un'analisi critica delle concezioni del concetto di funzione nella storia della matematica.

Per queste ragioni, prima di parlare di storia del concetto di funzione, è necessario liberarsi dal punto di vista che presuppone la teoria degli insiemi, evitando di leggere la storia deformata dalle lenti dell'impianto della matematica odierna, sforzandosi di seguire lo sviluppo reale delle concezioni. [5].

[4] Per qualche riferimento vedi la bibliografia di [6]. In particolare il testo in [8]

[5] A questo proposito Bottazzini scrive:

> «Se si vuole cercare di comprendere la dimanica dello sviluppo reale della matematica, è essenziale sottolineare la specificità dei contesti e delle motivazioni, i mutamenti di punti di vista, le contraddizioni, le generalizzazioni e le giustapposizioni delle teorie» ([3], p. 12)

E ancora si esprime riguardo al rischio del mantenere un punto di vista "bourbakista":

> «[Un punto di vista assai diffuso] è quello di intendere lo sviluppo della matematica come una sorta di "commedia degli errori" che ha finalmente emendato sé stessa trovando un esito definitivo e rigoroso solo nei tempi più recenti. L'esempio più noto [...] è forse costituito [...] dagli Elementi di storia della matematica di Bourbaki (1960) [...]. Qui il divenire della matematica è visto come attraverso un imbuto: tutto lo sviluppo precedente deve passare attraverso il collo stretto delle "strutture" bourbakiste.» ([3], p. 11)

In altre parole se la formulazione in termini insiemistici rappresenta una tappa fondamentale del dibattito sulla definizione concetto di funzione iniziato agli inizi del diciottesimo secolo, è indispensabile che il lettore non lo considerari come il punto di arrivo a cui tendere o il punto di vista dal quale "è lecito valutare" le altre concezioni e definizioni di funzione che si sono affermate nella storia.

Un valido esercizio al fine di liberarsi da questo pregiudizio spesso insito nel nostro modo di leggere la storia potrebbe essere quello di rintracciare le idee intuitive sopra elencate nelle definizioni e nelle spiegazioni dei propri libri di testo, o anche nelle concezioni che presenteremo nel seguito della relazione a partire dal prossimo paragrafo. Ci si convincerà in breve tempo che le varie proposte di definizione del concetto di funzione non sono una sorta di percorso lineare fatto di successivi miglioramenti, precisazioni e generalizzazioni, finalizzate alla costituzione di una moderna definizione, ma piuttosto traduzioni più o meno formali di idee che nascono, si perdono, si intrecciano e si confondono, e che traggono origine da attività ed intaressi, matematici e non, differenti.

## 1.2 Tracce nella storia della matematica

Per comprendere appieno le novità introdotte dal lavoro degli analisti del XVII e XVIII secolo è necessario ripercorrere alcune tappe ravvisabili nella storia della matematica dei secoli precedenti. Vogliamo in particolare raccogliere un elenco di alcuni fatti e personaggi che ci permetta di capire quali siano stati i passaggi che hanno portato all'introduzione esplicita del concetto di funzione.

Per far questo sottolineiamo alcune tappe (senza alcuna pretesa di esaustività) in cui si presentano nella storia delle concezioni alcune idee che saranno fondamentali per lo sviluppo dell'analisi e della matematica in genere nel periodo che va dal diciottesimo al diciannovesimo secolo [6].

- In Mesopotamia sono state ritrovate tavolette risalenti al periodo che va dal XVII sec.a.C. al VII sec.a.C. che raccolgono tavole di moltiplicazione, tavole di reciproci e tavole di quatrati, cubi, radici quadrate, cubiche, redatte nella notazione sessaggesimale cuneiforme. Allo stesso periodo risalgono tavolette con tabelle contenenti potenze successive di un numero, tavole di "funzioni" esponenziali e logaritmiche. [7] (per approfondimenti

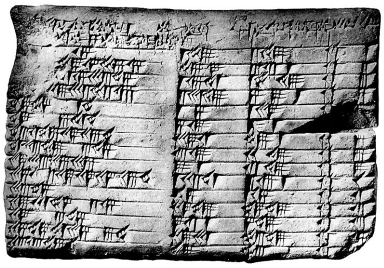
[6] Si possono riconoscere dietro a questi avvenimenti storico-matematici alcune delle idee intuitive legate al concetto di funzione elencate al paragrafo precedente. Sarebbe un esercizio utile cercare di approfondire questo tentativo di introduzione storica all'analisi matematica al fine di avere un'idea chiara delle motivazioni per cui tale branca della matematica è nata e sotto quali spinte. Ripeteremo questa opinione più volte nel testo, se non altro perché ha rappresentato la maggiore difficoltà della redazione di quest'ultimo.

[7] In questo senso si è soliti assegnare la prima intuizione del concetto di funzione alla civiltà babilonese. Qualcuno addirittura parla di "istinto verso la funzionalità":

> «Non sarebbe troppo generoso accreditare agli antichi babilonesi un'istinto verso la funzionalità; poichè una funzione è stata successivamente definita come una tavola di valori o una corrispondenza.» (E.T. Bell, 1945)

Questa opinione non ci sembra condivisibile: di fatti, se è vero che gli antichi babilonesi avevano a che fare con ciò che oggi chiameremo "funzione", non possiamo concludere che loro pensassero la questione in questi termini. Se fosse vero altrimenti potremmo concludere che lo stesso concetto di funzione era noto implicitamente anche all'agricoltore che comprende che la quantità di messe raccolta dipende dalla ampiezza del suo campo. Conclusione che ci pare tanto poetica quanto assurda.

vedi [2], cap.3, par.4 e successivi) .



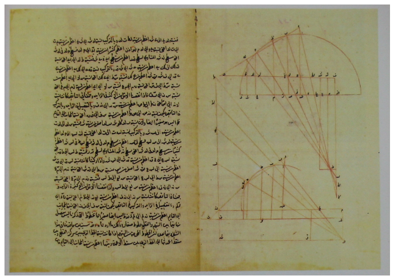


**Figura 1.2.** Da destra verso sinistra: tavoletta babilonese datata tra il 1900 a.C. e il 1600 a.C. che contiene un elenco di terne pitagoriche per i triangoli rettangoli. Manoscritto arabo delle *Coniche* di Apollonio. .

- Nel IV sec.a.C. la civiltà greca inizia ad avere a che fare con grandezze incommensurabili. La necessitè di poter confrontare tali grandezze con grandezze commensurabili ha portato al conseguente sviluppo della teoria delle proporzioni in Eudosso e, successivamente, in Euclide (per approfondimenti vedi [2], cap.6, par.6-7). La definizione V del libro quinto degli *Elementi* riassume bene questo sviluppo: compare in maniera implicita l'idea di corrispondenza espressa dall'uso della costruzione "ordinatamente... insieme..." [8] , ed in questo modo compaiono alcune delle idee che saranno utilizzate due millenni dopo per risolvere il problema della caratterizzazione dei numeri reali e quindi del continuo.

- Nel III sec.a.C. Apolonnio nel libro quinto delle sue Coniche affronta problemi di minimi e di massimi che in realtà sono problemi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche. I metodi di Apollonio sono ritenuti anticipatori di quelli della geometria analitica di Cartesio: egli introduce relazioni tra lunghezze di elementi di curve tramite l'utilizzo di coordinate ed equazioni espresse verbalmente. In realtà per gli antichi non era sufficiente soddisfare una certa relazione tra grandezze per ottenere una curva, bensì sentivano la necessità di rappresentarla come sezione di un solido o come risultato di un moto [9] (per approfondimenti vedi [2], cap.9, par.16).

- Nei secoli III a.C. Ipparco compila per primo quella che oggi sarebbe chiamata una tavola trigonometrica, tabulando i valori corrispondenti dell'arco e della corda associata per una serie completa di ampiezze di angoli. In seguito Tolomeo compila nuove tavole di valori ed utilizza relazioni equivalenti alle formule di somma, differenza e bisezione per seno e coseno (per approfondimenti vedi [2], cap.10, par.6).

[8]DAgli *Elementi* di Euclide. Definizione V del libro V:

> «si dice che le grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, se equimultipli della prima e della terza rispetto agli equimultipli della seconda e della quarta, sono ordinatamente, o insieme maggiori, o insieme eguali, o insieme minori.»

[9]In questo senso si iniziano ad intravedere due idee fondamentali per i secoli successivi: il possibile legame tra algebra e geometria e la necessità di intendere gli oggetti della matematica come oggetti del mondo reale.

La trigonometria nasce da necessità di calcolo pratiche esterne alla matematica pura: per esempio, gli studi di Tolomeo e di Ipparco sono nell'ambito della geometria celeste e dell'ottica. In questo senso non è da intendersi applicazione di un qualche concetto di funzione non ancora esplicitato ma presente in Tolomeo e negli altri matematici di quel periodo.

- Facendo un salto temporale di oltre un millennio, attorno al 1350 d.C. Oresme estende la teoria delle proporzioni di Bradwardine che a sua volta si richiamava a quella di Euclide. Include potenze ad esponente frazionario e formula le regole che oggi diciamo "del prodotto di potenze aventi la stessa base" e della "potenza di potenza".

  Un'altra idea di Oresme fu la rappresentazione di grafica di un teorema sul valor medio di una quantità il cui tasso di variazione è costante. Questo disegno rappresenta la prima intuizione di quello che oggi chiameremo "grafico di funzione". La rappresentazione grafica delle funzioni, nota come "latitudine delle forme", rimase argomento molto studiato per tutto il periodo che va da Oresme a Galileo. Oresme in realtà era interessato soprattutto alle aree sottese dalle curve più che alla rappresentazione grafica di queste. In questo senso i suoi metodi di somma di aree di rettangoli lo portarono a calcolare anche diverse somme di serie infinite, tra cui la prima dimostrazione che la serie armonica è divergente (per approfondimenti vedi [2], cap.14, par.15 e 16).

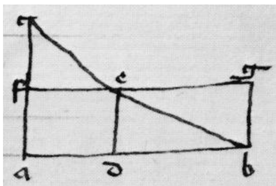


**Figura 1.3.** Prima rappresentazione grafica di una "funzione" da parte di Oresme.

- Nel XVI secolo compaiono, oltre alle formule di somma, differenza e bisezione, anche le formule di prostaferesi e di Werner. Vieté assieme a molti altri matematici dello stesso periodo redige tavole di valori di ottima precisione per seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente. Le definizioni di queste funzioni non sono quelle moderne di rapporto, ed il concetto di funzione non è esplicitato. Ad ogni modo l'elevato grado di precisione delle tavole di valori e la conoscenza di formule di calcolo raffinate sono un primo motivo per un interesse crescente della trigonometria indipendente dalle applicazioni [10].

[10] Boyer afferma in [2] che:

> «[Vietè] considera la trigonometria come una disciplina a sé stante della matematica ed [...] opera senza fare riferimento diretto alle mezze corde di un cerchio». Ed aggiunge: «identità trigonometriche comparvero un po' d'ovunque in Europa [...]: ciò ebbe come risultato una meno accentuata insistenza sugli aspetti di calcolo delle soluzioni di problemi relativi a triangoli, ed un intaresse più accentuato sulle relazioni funzionali analitiche.»

Nello stesso periodo Napier, Briggs, ed indipendentemente Burgi, introducono l'idea di logaritmo e ne redigono le prime tavole di valori. I logaritmi non sono intesi in rapporto al calcolo esponenziale che sarà introdotto circa un secolo più tardi, ma semplicemente come strumento pratico per la semplificazione dei calcoli di prodotti e quozienti, soprattutto in ambito trigonometrico [11] (per approfondimenti vedi [2], cap.16, par.7 - 10).

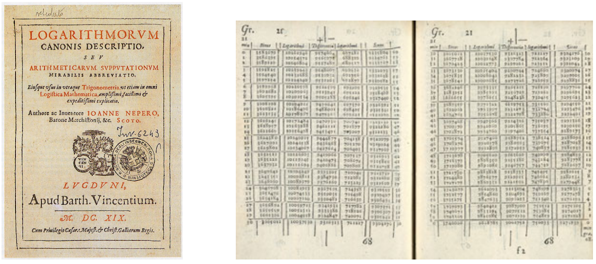



**Figura 1.4.** Da sinistra verso destra: Frontespizio e tavole dei logaritmi da *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614). .

- Il XVII secolo rappresenta un periodo di grandissimo fermento in matematica. Le contingenze storiche e culturali fanno sì che molti dei matematici più illustri cerchino di trarre, in qualche modo, le somme degli sviluppi recenti in ambito matematico: in questo senso si inizia a cambiare prospettiva guardando alle questioni ed ai problemi in un ottica più generale, introducendo un modo più astratto di affrontarli.

  Agli inizi del XVII secolo [12] si manifestano quelle che saranno le origini del calcolo infinitesimale. Mentre Galileo riflette sul concetto di infinito, il suo discepolo Bonaventura Cavalieri pubblica riguardo al suo "metodo degli indivisibili" per il calcolo delle aree e Torricelli, per la prima volta nella storia, traccia il grafico di una funzione logaritmica calcolandone l'area sottesa. In questo stesso periodo compaiono formule equivalenti alla formula di integrazione di potenze ad esponenti interi e di funzioni trigonometriche dovute a matematici quali Fermat, Gregory San Vincent, Roberval. Più in generale sembra che il problema del calcolo delle aree sia stato affrontato con successo prima del problema del calcolo delle tangenti [13].

  D'altra parte Cartesio mette in dialogo gli strumenti dell'algebra con quelli della geometria consentendo così di creare relazioni quantitative tra "formule e figure". Il suo contributo è fondamentale in vista della scoperta da parte di Fermat del principio fondamentale della geometria analitica:

  > «Ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva.» (Fermat, 1636)

[11] Un'idea delle applicazioni e delle motivazioni concrete che hanno portato all'invenzione dei logaritmi la si può trovare anche in [9] cap.5, par.9.

[12] Rimandiamo a [9] per una riflessione sulle motivazioni storiche, oppure, per uno sguardo più breve, al paragrafo successivo di questo testo.

[13] da [2] pag.411.

Fermat introduce per primo l'idea di rapporto incrementale come strumento per il calcolo di massimi e minimi a curve algebriche (Per approfondimenti vedi [2], cap.18) .

**Figura 1.5.** Da sinistra verso destra: Galilei, Torricelli, Cartesio e Fermat.

- Il problema del calcolo delle aree era intimamente connesso (come già visto parlando di Oresme) al problema del calcolo di somme e prodotti infiniti: per tutto il secolo XVII molti matematici, come per esempio Wallis e Mengoli, si preoccuparno del calcolo di tali somme e prodotti. Non solo ma compaiono formule equivalenti all'integrazione di potenze con esponenti frazionari oltre che interi.

  Tali risultati vengono raccolti in pubblicazioni dedicate specificatamente al calcolo infinitesimale: tra queste è rilevante l'opera di Gregory [14] il quale anticipò di quasi mezzo secolo gran parte dei risultati che sarebbero stati pubblicati da Newton nella forma analitica che ne segnerà iol successo: conosceva la formula del binomio, la formula di integrazione di diverse funzioni, la formula di espansione in serie di Taylor (che sarà pubblicata circa 40 anni dopo).

  In questo periodo Mercatore esibisce la prima espansione in serie del logaritmo integrando $\frac{1}{1-x}$. Mentre in Inghilterra Barrow si rende conto della natura inversa del problema del calcolo delle tangenti e dell'integrazione. Siamo arrivati alla soglia della nuova analisi che nascerà con l'apporto di Newton e Leibniz. (Per approfondimenti vedi [2], cap. 18)


**Figura 1.6.** Da sinistra verso destra: Galilei, Torricelli, Cartesio e Fermat.

- Nella seconda metà del diciassettesimo secolo Newton e Leibniz inventano indipendentemente il calcolo infinitesimale moderno presentando il metodo delle flussioni e del calcolo differenziale rispettivamente. Parallelamente Newton scopre la formula del binomio ed le sue riflessioni sull'operare con

[14] Matematico illustre che ha lavorato e pubblicato molti lavori importanti anche a Padova. Per Boyer: «[Se Gregory] avesse espresso i risultati delle proprie ricerche in forma analiica, avrebbe forse anicipato Newton nell'invenzione del calcolo infinitesimale»([2], pag.444).

espansioni in serie lo portano a scoprire "che l'analisi basata su serie infinite aveva la stessacoerenza interna, ed era regolata dalle stesse leggi generali, dell'algebra che operava con quantità finite. Serie infinite non dovevano più essere considerate soltanto come tecniche di approssimazione, ma costituivano forme alternative delle funzioni che esse rappresentavano" ([2], pag.453). (Per approfondimenti vedi [2], cap. 19).

Successivamente Jean I Bernulli introducono il calcolo esponenziale.

**Figura 1.7.** Da sinistra verso destra: Newton, Leibniz e Bernoulli.

Questa lunga storia che abbiamo appena abboazzato (e che varrebbe la pena approfondire, completandola con le tappe intermedie non citate e le motivazioni storiche, sia interne che esterne, dello sviluppo della matematica ), vuole far intravedere quale sia stato il percorso storico che porta alla nascita del calcolo infinitesimale ed alla successiva nascita dell'analisi intesa come disciplina indipendente che si occupa di processi infiniti.

Non vogliamo soffermarci ulteriormente sulle tappe storiche che hanno portato alla nascita dell'analisi nel diciottesimo secolo, ma vogliamo sottolineare alcuni aspetti che risultano evidenti dall'elenco precedente e che costituiscono la premessa fondamentale per la compresione dello sviluppo del concetto di funzione inteso come oggetto principe dello studio in analisi:

*a.* il concetto di funzione, inteso come lo intendiamo oggi, benché non esplicitato è comparso nella storia con sfumature di significato differenti che costituiscono il bagaglio concettuale intuitivo a cui tale concetto si riferisce.

   Tali idee sono disperse nelle tavole di valori dei logaritmi e delle funzioni trigonometriche, nei simboli dell'algebra, nelle formule della fisica, nella concezione di curve come sezioni o moti... etc etc.

   Il calcolo infinitesimale si pone come strumento di indagine per ognuno di questi campi, un approdo per ciascuno di questi problemi.

*b.* i problemi che hanno portato all'introduzione dei vari concetti che oggi colleghiamo a quello di funzione sono in gran parte di carattere applicativo. Il fatto che le applicazioni abbiano da sempre guidato gli interessi dei matematici, pur con la necessità continua di sistemare e formalizzare in maniera organica i contenuti delle proprie conquiste, sarà una tensione presente anche nel seguito della storia.

## 1.3 Situazione nel secolo diciottesimo.

Nel secolo XVII, come abbiamo visto al paragrafo precedente, la matematica ha subito un grosso impulso er l'attività frenetica di personaggi quali Galileo, Cavalieri, Torricelli in Italia, o come Cartesio, Fermat, Roberval, Desargues, Pascal in Francia. I numerosi sviluppi portarno alla formazione di circoli di discussione ed una più fitta corrispondenza tra matematici. Fino ad allora infatti non esisteva alcuna organizzazione ufficiale che coordinava le attività dei matematici di professione, cosìcché a partire dal XVII secolo la matematica si sviluppoò più per una sua logica interna che non a seguito alle sollecitazioni di forze economiche, sociali o tecnologiche [15]

Fu in questo contesto culturale che videro la luce le prime Accademie: prima a Napoli nel 1590, poi a Roma nel 1603, in Francia il Cabinet du Puy ed in Inghilterra l'Invisible College. Si trattava della "cristallizzazione" dei gruppi di matematici in attività che erano in stretto rapporto. Tale organizzazione era in aprto contrasto con quella delle Università dell'epoca le quali aderivano allo spirito "scolastico" che perpetuava un atteggiamento conservatore nei confronti delle forme e dell'oggetto della conoscenza. Si ha pertanto che le Accademie costituiscono il soggetto che esprime il nuovo spirito di ricerca tipico del XVII secolo [16]

Più avanti nasceranno la Royal Society a Londra (1662) e l'Accademia delle Scienze a Parigi (1665). In questo periodo il ritmo di produzione di risultati in ambito matematico non si arrestò di certo arricchendosi dei contributi di nomi come quelli di Wallis, Gregory, Mengoli e Barrow (di cui abbiamo già fatto il nome).

Nelle Accademie l'attività didattica era quasi del tutto inesistente lasciando così grande libertà ai membri di dedicarsi ai loro interessi cosìcché agli inizi del XVIII secolo i centri più importanti per la matematica coincidevano con le sedi delle Accademie più prestigiose: quelle di Parigi, Berlino e San Pietroburgo.

Ma l'attività scientifica non si può dire fosse interamente concentrata solo nella Accademie: nel periodo che ha visto i cosidetti "sovrani illuminati" al potere in tutta Europa durante l'Illuminismo, si diffuse nelle corti una sorta di "snobbismo intellettuale" (come lo chiama Struik in [9] cap.7, par.1) secondo cui era prestigioso circondarsi di menti illustri, dotti, scienziali. Non è così sorprendente vedere matematici quali Eulero, i Bernoulli, Lagrange girare per le corti d'Europa. In questo senso le Accademie divengono luogo privilegiato non solo per gli scienziati ma anche per le stesse corti che le utilizzano con fini pratici di miglioramento delle manufatture, dell'efficienza dell'esercito, della costruzione della flotta, delle tecniche di navigazione, la balistica ed la predizione dei moti celesti. Le applicazioni divengono stimolo fondamentale per il matematico del XVIII secolo.

La teoria gravitazionale di Newton costituisce lo strumento teorico per indagare i problemi relativi al calcolo della posizione degli astri, mentre il nuovo calcolo differenziale di Leibniz diviene patrimonio comune europeo, calamitando così sul calcolo infinitesimale e la meccanica gli interessi di gran parte dei matematici del tempo [17].

[15] Contenuti tratti da [2], cap.17, par.1.
[16] Contenuti tratti da [9], cap.6, par.5.
[17] Contenuti tratti da [9], cap.7, par.1.

Nonostante ciò alla vigilia del XVIII secolo vi sono ancora molte questioni da risolvere:

*a.* l'apparente frammentazione di molte parti della matematica che rientreranno in seguito nelle competenze degli "analisti".

*b.* le numerose critiche al metodo delle flussioni di Newton e quello del calcolo differenziale di Leibniz costituivano un problema di fondamentale importanza per giustificare gli sviluppi della matematica. Per avere un esempio riportiamo un estratto da *The Analyst* di George Berkley (1685 - 1753):

> «Che cosa sono queste flussioni? Le veocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarle spiriti di quantità sparite?» (The Analyst, 1734).

*c.* l'individuazione dell'oggetto proprio del calcolo infinitesimale e quindi la discussione sulla natura del concetto di funzione.

Saranno proprio i primi tentativi di Leiniz e Newton a rispondere a quest'ultimo punto a rendere possibile in seguito lo sviluppo di una nuova disciplina matematica che contenesse:

- i polinomi, la trigonometria, il calcolo esponenziale, la teoria dei logaritmi;
- la rappresentazione grafica e le espansioni in serie di queste funzioni;
- gli strumenti del calcolo infinitesimale;
- i problemi relativi al calcolo delle aree, delle tangenti, del calcolo di somme e prodotti infiniti.

Nel prossimo paragrafo commentiamo le prime definizioni del termine "funzione".

## 1.4 Origini del termine di funzione

Il termine di funzione si trova per la prima volta in Leibniz (qualcuno dice 1673 altri dicono 1694... bo!):

> «tutte le porzioni di linea retta, che si ottengono tracciando rette indefinite, che corrispondono al punto fisso e ai punti della curva»
> (G. Leibniz, *Nova Calculi differentialis*, 1694)

Intende cioè una qualunque quantità variabile da punto a punto di una curva (per esempio: la lunghezza della tangente, della normale, etc etc). Della curva veniva detto semplicemente che era fornita «da un'equazione». A Leibniz, oltre all'introduzione del termine funzione, si riconosce la paternità dei termini "costante", "variabile" e "parametro", nel senso moderno.

In seguito lo stesso Leibniz, nella sua *Historia* del 1714, intenderà più semplicemente per funzione una quantità che dipende da una variabile. Si avvicina così alla definizione che ne darà Johann I Bernoulli nel 1718:

> «Chiamo funzione di una grandezza variabile una quantità formate in una maniera qualsiasi da variabili e da costanti»

Questa definizione sarà quella più adottata negli anni successivi e "consacrata" all'uso da Eulero: si tratta di una definizione formale che avremmo modo di indagare più tardi nella versione di Eulero.

Si intravedono in queste prime definizioni piuttosto vaghe le stesse idee che avevamo visto alla prima sezione di questo capitolo: l'utilizzo delle parole "curva", "equazione", "dipende", "formate in maniera qualsiasi", la dice lunga su quanto l'intuizione guidasse tali definizioni.

Al di là delle definizioni in sé è bene sottolineare l'importanza che il concetto di funzione ha avuto in questo periodo storico. Così, pur non avendo mai usato il termine funzione, Newton sembra avere le idee ben chiare su quale sia l'oggetto del calcolo infinitesimale e quindi su cosa siano per lui le "funzioni".

A partire dai suoi primi lavori sul calcolo infinitesimale, Newton introduce l'idea che il calcolo differenziale si occupi del concetto di "variazione". In particolare Newton è interessato a mettere al centro della sua ricerca il movimento dei corpi, e l'impostazione analitica deve essere adatta a trattare quantità variabili. In proposito afferma:

> «Io considero qui le quantità matematiche non come costituite da parti molto piccole, ma come descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e quindi generate, non dalla giustapposizione delle loro parti, ma dal moto continuo dei punti [. . . ]. Questa genesi ha effettivamente luogo in natura e può essere vista quotidianamente nel moto dei corpi.» (Newton, *Tractatus de quadratura curvarum*, 1676)

Quest'idea non così esplicita nelle definizioni di Leibniz e Bernoulli è fondamentale poiché porta con se quel bagaglio di intuizione geometrica e fisica che farà da contraltare alle idee legate al formalismo di Leibniz e Bernoulli, ed inoltre sarà motore per lo sviluppo del concetto di funzione nel futuro.

Riassumendo potremmo dire che:

- L'esplicitazione del concetto di funzione diviene necessaria nel momento in cui gli strumenti del calcolo differenziale individuano le "grandezze variabili legate ad una curva" di Leibniz, o le "flussioni" di Newton come oggetto della loro ricerca. La definizione esplicita del concetto di funzione non è quindi solo una questione di nomenclatura ma il riconoscimento dell'oggetto del calcolo infinitesimale, e quindi, in definitiva, la presa di coscienza di un programma di ricerca. Questo segna già un primo cambiamento di prospettiva rispetto al passato: il concetto di funzione da strumento di indagine (dalle tavole Mesopotamiche, alle tavole trigonometriche piu' avanzate...) diviene oggetto stesso di indagine.

- La definizione formale di Bernoulli e l'idea così intuitiva di Newton rappresentano i due riferimenti della storia futura del concetto di funzione. Da una parte c'è la volontà di allontanarsi da una trattazione geometrica del calcolo infinitesimale cercando definizioni che si dirigano verso l'algebra piuttosto che verso la geometria. Dall'altra parte la necessità di parlare della natura, e quindi trovare un riscontro fisico nei risultati ottenuti mediante l'analisi matematica. Queste due tensioni muoveranno il seguito della storia.

Da qui ha inizio la storia dell'analisi matematica in senso moderno. Nel prossimo capitolo descriveremo l'opera del suo primo grande interprete: Eulero.

# Capitolo 2

# Eulero e l'analisi

Sarà Leonhard Euler a provare a dare una prima risposta a queste questioni. I trattati euleriani *Introductio in Analisin Infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-1779) rappresentano il punto di arrivo della speculazione analitica del periodo che va dal 1655, anno al quale risalgono le prime ricerche newtoniane sul metodo delle flussioni, fino alla metà del Settecento. Al contempo essi rappresentano il punto di partenza dell'analisi matematica moderna.

## 2.1 Biografia

[1] Leonhard Euler è nato a Basilea il 15 aprile 1707. Suo padre era un pastore protestante che sperava che il figlio entrasse nella carriera ecclesiastica. Il giovane Eulero studiò però sotto la guida di Jean (o Johann) Bernoulli e collaborò con i figli Daniel e Nicolaus Bernoulli [2] ottenendo, da una parte un'educazione di vasto respiro che comprendeva lo studio della teologia, della medicina, dell'astronomia, della fisica e delle lingue orientali, e dall'altra parte la scoperta della propria vocazione verso la matematica.

**Figura 2.1.** Leonhard Euler.

La vastità delle sue conoscenze gli permise a Eulero di seguire i fratelli Bernoulli in Russia come insegnante di medicina nell'Accademia di Pietroburgo istituita in quegl'anni da Caterina I di Russia. Nel frattempo Nicolaus Bernoulli era morto e quando Eulero nel 1730 occupa la cattedra di filosofia naturale Daniel Bernoulli era titolare della cattedra di Matematica dell'Accademia. Ma bisogna attendere soltanto tre anni perché Daniel accetti la cattedra a Basilea ed Eulero diventi a soli 26 anni il matematico più importante dell'Accademia.

[1]La biografia di Eulero è tratta in larga parte da [2].

[2]In questo testo non parleremo del fenomeno della famiglia Bernoulli, una delle famiglie più feconde di scienziati ed in particolare di matematici, di tutta la storia. Per quanto ci riguarda nomineremo solamente due componenti di questa famiglia: Johann Bernoulli e Daniel Bernoulli, ma è bene sapere almeno come curiosità che un cugino di Daniel, Nicholaus, occupò per un certo periodo di tempo la cattedra di matematica che un tempo era stata di Galileo a Padova (vedi [2], cap.20, par.7).

Fin dall'inizio della sua attività Eulero contribuisce alla stesura di una fitta serie di articoli per la rivista scientifica fondata dall'Accademia di Pietroburgo, i *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. L'attività di Eulero fu instancabile e si calcola che nel corso della sua vita abbia pubblicato più di 500 lavori mentre con la comparsa di quelli postumi la sua bibliografia raggiunge il numero di 886 scritti: si tratta di testi di tutti i livelli, dal manuale d'uso nelle scuole, ad articoli per concorsi, da articoli di ricerca a grandi opere enciclopediche. Oltre alle opere di stampo teorico, non mancano opere di carattere applicativo (ricevette una menzione d'onore da parte dell'Académie des Sciences di Parigi per un saggio sull'alberatura delle navi).

La reputazione di Eulero varco molto rapidamente i confini degli stati europei e nel 1741 viene invitato all'Accademia di Prussia di Berlino da Federico il Grande. Lavorerà a Berlino per venticinque anni (qui incontrerà il compositore Johann Sebastian Bach!), poi, nel 1766 ritorna a Pietroburgo. Nel frattempo aveva perso la vista prima da un'occhio poi da entrambi: nonostante questo il suo ritmo di produzione scientifica non diminuì fino al termine della sua vita. Muore a San Pietroburgo il 18 settembre 1783.

Nel suo elogio funebre, Condorcet, un matematico francese illustre, scrisse: "ha cessato di calcolare e di vivere".

## 2.2 Contributi in analisi

[3] I contributi di Eulero spaziano in tutte le branche della matematica pura e applicata, da quella elementare a quella di livello più elevato. Non vogliamo qui fare un elenco dei suoi risultati o delle sue pubblicazioni ma ci basti dare qualcuno dei contributi che ha avuto grande importanza almeno in analisi.

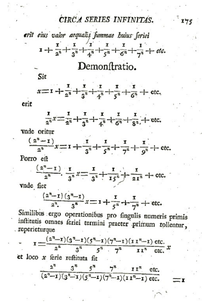
Eulero introdusse un linguaggio e una notazione che per molti aspetti corrispondono a quelli odierni:

- Attorno al 1727 introduce nei suoi scritti la lettera $e$ per indicare la base dei logaritmi neperiani.
- Fissa la notazione $\pi$ per indicare il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio.
- A partire dal 1777, introduce il simbolo $i$ per indicare l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$.
- Usa le lettere minuscole $a$, $b$, $c$ per indicare i lati di un triangolo e le corrispondenti maiscole per indicare i vertici opposti.
- Usa l'espressione $lx$ per indicare il logaritmo naturale di $x$.
- Utilizza il simbolo $\sum$ per indicare una sommatoria.
- Introduce a partire dal 1734 la notazione $f(x)$ per indicare una funzione di $x$.

Bisogna ricordare che spesso dietro all'utilizzo di una notazione piuttosto che un'altra vi sono concetti profondi che costituiscono la parte più importante del discorso e stabiliscono il successo e la comprensione dei propri risultati (basti ricordare, per esempio, la scarsa fortuna della notazione di Newton).

[3] I contributi di Eulero sono tratti in larga parte da [2].

Da questo punto di vista i concetti che determinarono il successo delle notazioni di Eulero sono di importanza fondamentale per la storia della matematica. Eulero trattò per primo il calcolo differenziale ed il metodo delle flussioni come parti di una branca più generale della matematica che da allora è nota con il nome di analisi e che riguarda generalmente lo studio di procedimenti infiniti. In questo senso si compie quanto auspicato al termine del capitolo precedente: l'unificazione di molti settori della matematica dentro un unico grande contenitore che ne consentisse una sistemazione organica.


CIRCA SERIES INFINITAS. 175

erit eius valor aequalis summae huius seriei

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}$$

Demonstratio.

Sit

$$x=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc.}$$

erit

$$\frac{1}{2^n}x=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.}$$

vnde oritur

$$\frac{(2^n-1)}{2^n}x=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{etc.}$$

Porro est

$$\frac{(2^n-1)}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}x=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\text{etc.}$$

vnde fiet

$$\frac{(2^n-1)(3^n-1)}{2^n\cdot 3^n}x=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}$$

Similibus ergo operationibus pro singulis numeris primis institutis omnes seriei termini praeter primum tollentur, reperieturque

$$1=\frac{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\text{ etc.}}{2^n\ 3^n\ 5^n\ 7^n\ 11^n\text{ etc.}}x$$

et loco $x$ serie restituta fit

$$\frac{2^n\ 3^n\ 5^n\ 7^n\ 11^n\text{ etc.}}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\text{ etc.}}=1$$

**Figura 2.2.** Estratto dall'Introductio.

In questo senso l'opera *Introductio in analisin infinitorum* pubblicata nel 1748 rappresenta certamente il passo più importante. In questo testo uscito in due volumi, Eulero:

- Definisce il termine di funzione che pone come concetto fondamentale dell'analisi (parleremo più approfonditamente di questo nel prossimo paragrafo).
- Dà una trattazione rigorosamente analitica alle funzioni trascendenti elementari: le funzioni trigonometriche, logaritmiche, trigonometriche inverse, le funzioni esponenziali, venivano scritte e concepite da Euero nella stessa forma in cui sono studiate oggi abbandonando di fatto il legame con le applicazioni e le tavole di valori del passato ed introducendo una trattazione puramente analitica. Non solo, usa le abbreviazioni sin ., cos ., log ., exp . simili a quelle odierne.
- Dagli sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche ed esponenziali deriva le "formule di Eulero": $e^{ix} = cosx + isenx$ traendono tutte le conseguenze e determinandone l'uso comune in analisi.
- Calcola diverse somme e prodotti infiniti, anche se non sempre con procedimenti che oggi diremmo rigorosi. Diamo alcuni esempi:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \sum_{n=1} \frac{1}{n^{26}} = \frac{2^{24} \cdot 76977927\pi^{26}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 27}$$

- Intende i logaritmi come esponenti e chiarisce per primo il concetto esatto di logaritmo di numero negativo.
- Fa rientrare nell'analisi lo studio delle curve geometriche attraverso una teoria generale delle curve fondata sul concetto di funzione, spostando così l'attenzione dalle sezioni coniche e dalle costruzioni geometriche ai metodi dell'analisi fondati sull'uso di coordinate, rappresentazioni parametriche delle curve e del calcolo differenziale ed integrale.

Nel 1755 Eulero pubblica le "Istitutiones calculi differentialis" e, tra il 1768-1770, le "Istitutiones calculi integralis". In questi testi grandi lavori enciclopedici Eulero sistematizza i concetti del calcolo differenziale ed integrale da un punto di vista analitico introducendo, oltre ai metodi del calcolo infinitesimale, anche problemi e risoluzioni relativi ad equazioni differenziali.

Non vogliamo indugiare oltre su questi temi, preferendo approfondire la concezione del termine funzione in Eulero.

## 2.3 Definizione di funzione.

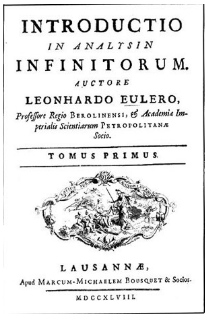

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

**Figura 2.3.** Frontespizio di *Introductio in analisin infinitorum* pubblicata nel 1748 dall'Accademia di Pietroburgo.

[4] Eulero fonda per primo tutto il castello dell'analisi sul concetto di funzione. Questo fatto assume importanza inedita fino ad ora nella concezione della matematica: ciò implica infatti, come già asserito più volte, la riunione di una grandissima parte di risultati sotto un'unico punto di vista ed asserisce inoltre che tale punto di vista ha come oggetto proprio di indagine il concetto di funzione.

E' in questo senso che è necessario introdurre una definizione più possibile precisa e strutturata di tale concetto. Pertanto, in continuità con la concezione del suo maetro Johann Bernoulli (della cui concezione abbiamo già parlato al capitolo precedente), e discostandosi da quella Newtoniana meno in voga in quel periodo, Eulero inizia il suo *Introductio in analisin infinitorum* con la seguente definizione di *funzione*:

> «Una funzione di quantità variabili è un'espressione analitica composta in modo qualunque da quelle quantità e da numeri o quantità costanti.» (Eulero, *Introductio Analysin Infinitorum*, 1748)

Con il termine "espressione analitica" Eulero intende un'espressione simbolica composta da quantità variabili e numeriche in relazione mediante: operazioni algebriche (i.e: $+$, -, $\times$ , $\div$, radici, potenze o risoluzione di equazioni polinomiali), operazioni trascendenti elementari (funzioni trigonometriche, logaritmi, esponenziali) ed «innumerevoli altre che ci fornisce il calcolo integrale».

Correlata a questa definizione vi è la distinzione tra *funzioni algebriche* e *funzioni trascendenti*: le funzioni algebriche sono quelle ottenibili tramite un numero finito di operazioni elementari (per Eulero le equazioni algebriche sono in linea di princiio risolubili algebricamente!), mentre le seconde sono certamente ottenibili da un numero infinito di operazioni elementari, o, in altre parole, sono senz'altro espandibili in serie. Eulero non si pone il problema della legittimità o della dimostrazione dell'esistenza di talii estensioni, come è esplicito infatti nel capitolo 4 dell' *Introductio*, Eulero ritiene che ogni funzione sia espandibile in serie di potenze ad esponente qualunque: in particolare ammette che la maniera più generale di esprimere una funzione è quella di scriverla come serie di potenze ad esponenti razionali sia positivi che, al più negativi. In questo senso una funzione qualunque di $z$ è esprimibile, per Eulero, nella somma infinita o finita:

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\chi} + Dz^{\delta} + ...,$$

dove $A$, $B$, $C$, $D$, ... ed $\alpha$, $\beta$, $\chi$, $\delta$, ... sono numeri qualunque.

A questo punto è bene fare qualche osservazione:

*a.* La definizione di funzione di Eulero si richiama in maniera evidente a quella del maestro di gioventù, Johann Bernoulli: in particolare in ciascuna delle due definizioni non vi sono riferimenti a tempi, moto, velocità, spazi,

[4] L'analisi del concetto di funzione in Eulero è tratta in larga parte da [3].

movimento, preferendo una definizione del tutto formale e lontana (almeno apparentemente) dalla concezione di Newton.

*b.* La distinzione tra funzioni algebriche e trascendenti è, ai nostri occhi, inadeguata: per Eulero è decisivo il tipo di espressione analitica che viene usata nella descrizione, mentre oggi sappiamo che ciò non è indicativo.

*c.* Non è oggi accettabile l'idea che ogni funzione si possa esprimere come serie di potenze ad esponente qualunque. Questa idea non è da imputare a mancanza di rigore nel ragionamento, ma semplicemente ad una concezione di funzione figlia delle conoscenze del tempo.

Ogni funzione allora conosciuta, algebrica o trascendente che fosse, è estendibile in serie di potenze. Risulta così spontaneo pensare che combinazioni anche infinite di tali funzioni risulti ancora espandibile in serie. In questo senso non sono necessarie dimostrazioni dell'esistenza di tali espansioni né tantomeno ricerche in proposito poiché le funzioni per Eulero sono esattamente quelle combinazioni, e non ve ne sono altre la cui espansione in serie è da controllare.

In altri termini, Eulero fonda il concetto di funzione sulla proprietà di estendibilità in serie di potenze delle funzioni allora note, cadendo in quell'errore di estensione di risultati che valgono in ambito finito, a situazioni in ambito "infinito", errore che si perpetuerà fino all'inizio del diciannovesimo secolo. Si conclude così che il prototipo di funzione che ha in mente Eulero è quello della odierna funzione analitica.

Nel secondo volume dell' "Introductio" Eulero da un'ulteriore distinzione tra funzioni dando la seguente definizione di *funzione continua e discontinua*:

> «Benché si possano descrivere meccanicamente diverse linee curve mediante il movimento continuo di un punto che ci fa vedere la curva nel suo complesso, noi qui le consideriamo principalmente come il risultato di funzioni, essendo questa maniera di considerarle più analitica, più generale e più adatta al calcolo.
>
> Così una funzione qualunque di $x$ darà una certa linea retta o curva, da cui segue che, reciprocamente, si potranno mettere in relazione le linee curve con le funzioni. Di conseguenza, la natura di una linea curva sarà determinata da una funzione di $x$ [...]. Da questa concezione delle linee curve discende naturalmente la loro divisione in continue e in discontinue o miste.
>
> La linea curva continua è quella la cui natura è espressa da una sola funzione determinata di $x$. Se però la linea curva è composta da differenti parti determinate da più funzioni di $x$, di modo che una parte sia il risultato di una funzione e un'altra sia il risultato di una seconda funzione, noi chiamiamo queste specie di linee curve discontinue, o miste e irregolari, giacché esse non sono formate secondo una legge costante e sono composte di porzioni di differenti curve continue.
>
> In geometria si ha a che fare principalmente con curve continue e nel seguito si mostrerà che le curve che sono descritte meccanicamente da un movimento uniforme secondo una certa legge costante,

> possono essere espresse da un'unica funzione e di conseguenza sono curve continue.» (Eulero, Introductio Analysin Infinitorum, 1748)

Raduniamo anche in questo caso alcune osservazioni:

*a.* Dal nostro punto di vista si riconoscono due concetti: il concetto di curva analitica (curve continue per Eulero) ed il concetto di curva continua regolare a tratti (curve discontinue per Eulero). E' di particolare importanza notare che le curve continue sono le curve rappresentate da una sola "formula" dando qundi della continuità una definizione sostanzialmente formale. A questo proposito non si trova in Eulero l'idea di funzione discontinua così come è intesa oggi. Questo si spiega con la seguente:

*b.* L'idea geometrica di movimento esclusa nella definizione di funzione preferendo una definizione formale, "rientra dalla finestra" nella concezione di funzione continua: si parla infatti del movimento "uniforme" della mano.

*c.* E' sottointesa nella definizione di curva discontinua un'idea, non sviluppata successivamente, di dominio delle funzioni: nel momento in cui si richiede che vi siano linee composte da porzioni differenti di grafico, si sottintende infatti l'idea di poter restringere il dominio di una funzione. Questa idea sarebbe stata rivoluzionaria per l'epoca visto che ad ogni funzione era associato il suo dominio di esistenza naturale senza porsi nemmeno il problema di poterle restringere o estendere. Il fatto che Eulero non abbia pensato all'introduzione della nozione di dominio insita nella sua stessa definizione non quindi da reputare una mancanza.

Concludendo possiamo dire che, nonostante la notevole complessità della concezione del concetto di funzione in Eulero, la definizione data non è scevra da critiche e da problemi. Questo non soltanto dal punto di vista odierno, ma soprattutto dal punto di vista delle applicazioni e dei problemi pratici che tale definizione comporta. In questo senso introduciamo nella prossima sezione il problema della "corda vibrante" che rappresenta un primo esempio di come subito si presentino agli occhi di Eulero necessità di revisione di tale concezione.

forma (cioè esplicite), le funzioni introdotte da equazioni tra $F$ e $x$, $y$, $z$,... (cioè implicite) e le funzioni date mediante certe condizioni (per esempio equazioni differenziali).

Nonostante il notevole grado di generalità, Condorcet riconduce lo studio di funzioni arbitrarie allo studio della serie di Taylor di queste, che viene assunto come fondamento di tutta l'analisi. Quest'idea corrisponde all'idea di Eulero circa la rappresentabilità in serie di qualunque funzione a meno di alcuni punti singolari. In questo, oltre che da Eulero, Condorcet è influenzato dalle idee di Lagrange, come vedremo più avanti.

Gli appunti di Condorcet per il suo secondo trattato sul calcolo integrale, influenzano i matematici fino alla prima metà del diciannovesimo secolo. Così, per esempio, Lacroix (1765 - 1834) dà la seguente definizione di funzione:

> «Infine, delle nuove idee, portate dallo sviluppo dell'analisi, hanno dato luogo alla definizione seguente di funzione: ogni quantità il cui valore dipenda da una o più altre quantità è detta funzione di queste ultime sia che si sappia sia che si ignori attraverso quali operazioni occorra passare per risalire da queste alla prima.» (Lacroix, *Traité du calcul differentiel et du calcul integral*,1810)

Queste definizioni benché mantengano un livello di generalità inedito almeno fino al 1748, conservano soltanto un valore nominale dacché nella pratica le funzioni considerate sono ancora sostanzialmente quelle di tipo analitico.

## 4.3 Lagrange (1736-1813)

Il tentativo più coerente di stabilire una teoria delle funzioni, e quindi un fondamento sicuro per il calcolo integrale, fu dato da Lagrange nel suo *Theorié des functions analytiques* del 1797.

Per far questo egli si rifà alle definizioni di Leibniz e Bernoulli di "funzione": restringendo così il campo delle funzioni ammissibili alle sole funzioni analitiche. Lo sforzo innovatore di Lagrange, va ricercato non tanto nella generalità della sua concezione quanto nella volontà di liberare definitivamente il calcolo differenziale da «considerazioni di infinitesimi, di quantità evanescenti, di limiti e flussioni» e ricondurlo «all'analisi algebrica di quantità finite» (come scrive Lagrange stesso nel sottotitolo dell'opera). Il suo trattato si apre così con la seguente definizione di funzione:

> «Si chiama funzione di una o più quantità ogni espressione del calcolo nella quale queste quantità entrano in maniera qualunque, insieme o no con altre quantità che si considerano come aventi dei valori dati e costanti, mentre le quantità della funzione possono assumere ogni valore possibile.» (Lagrange, *Theorié des functions analytiques*, 1797)

Bisogna osservare che Lagrange contribuisce in questo senso a separare i fondamenti del calcolo infinitesimale dall'intuizione geometrica e dalla meccanica. Egli sottolinea più volte l'esigenza di un progressivo distacco dal riferimento geometrico o meccanico nel trattare i problemi dell'analisi e la necessità di autonomi criteri di coerenza. Nel trattato di Meccanica Analitica del 1788 Lagrange ad esempio sottolinea:

> «In quest'opera non si troveranno affatto figure. I metodi che vi espongo non richiedono ne costruzioni ne ragionamenti geometrici o meccanici, ma soltanto delle operazioni algebriche.»

Questa sarà la strada che effettivamente verrà percorsa nel futuro dai matematici del secolo diciannovesimo.

Pertanto l'esperienza di Lagrange non è da leggere come un nostalgico ritorno al passato, ma rappresenta certamente un passo avanti nella concezione dell'analisi come branca indipendente che ha la necessità di trovare in se stessa dei fondamenti ben più solidi del riferimento alla geometria o alla meccanica:

Per perseguire questo obiettivo Lagrange restringe il campo di azione della definizione di funzione, evitando le complicazioni dovute all'annessione di funzioni non analitiche e considerando tutte le funzioni espandibili in serie di potenze come aveva già fatto Eulero. In realtà tale assunzione è il punto debole di tutta la costruzione lagrangiana, ma non è questo il contributo che vogliamo sottolineare.

Infatti, benché i matematici di fine XVII ancora legati alle concezioni passate, non sappiano risolvere completamente i problemi legati alle definizioni euleriane, riescono comunque a comprendere più a fondo le necessità nuove presentatesi alla vigilia del diciannovesimo secolo: ricercare non solo la generalità della definizione di funzione ma anche un fondamento per i termini dell'analisi, sia concettuale sia formale, che sappia staccarsi definitivamente dal riferimento geometrico e fisico, trovando così criteri di rigore interni all'analisi stessa.

# Capitolo 5

# Inizi XIX secolo: Fourier

## 5.1 Professione matematico.

Riportiamo come introduzione a questo capitolo le parole di Bottazzini in [3] [1]:

«Tra il Settecento e l'Ottocento si verifica una profonda frattura sul piano politico, sociale ed economico ad opera della rivoluzione francese, un fatto che ha un'importanza decisiva anche rispetto alla storia della matematica. Infatti come esito della radicale trasformazione operata dalla Rivoluzione francese anche la matematica esce profondamente mutata, sia nel ruolo sociale de matematici che negli orientamenti della ricerca. [...]»

«Nel settecento i matematii svolgevano la loro attività all'ombra delle accademie, senza pbblighi di insegnamento, con un appannaggio assicurato dal mecenatismo dei pìncipi e dei sovrani (esemplari da questo punto di vista erano le accademie di Berlino, dove lavorò lungamente Eulero, e poi Lagrange prima di lasciare la Germania per l'Accademia di Parigi, e quella di Pietroburgo, dove furono attivi lo stesso Eulero e Daniel Bernoulli). [...] Alle Accademie erano affidate in pratica le sorti dello sviluppo della matematica e alle memorie o agli atti delle accademie era dovuta la propagazione dei risultati e delle soperte [...]».

«La situazione cambia radicalmente, prima in Francia e poi nel resto d'Europa, in seguito alla Rivoluzione francese. Il fatto che materialmente segna la svolta nel modo din intendere (e di svolgere) il mestiere del matemaico è la fondazione delle grandi scuole francesi, anzitutto l'Ecole Polytechnique e l'Evole Normale Superieure [...]. Le scuole francesi sono costitutite con compito preciso di formare una estesa classe di ingegneri e di tecnici adeguata alle esigenze militari e produttive della Francia rivoluzionaria (e poi bonapartista[...]). come insegnati sono chiamati matematici tra i più prestigiosi, quali Monge, Legendre, Lacroix, Laplace, Lagrange. [...]»

«Il tipo di insegnamento impartito nelle scuole uscite dalla Rivoluzione è fondato sulla matematica, "pura e applicata", dove impegnativi corsi di analisi erano affiancati da corsi di meccanica o di geometria descrittiva, la nuova disciplina elaborata da Monge e rivelatasi anche di grande interesse strategico-militare. Il piano di studi prevedeva un severo impegno da parte di docenti e studenti, i pirmi impegnati, oltre che nelle lezioni, in seminari, esami e, cosa

[1] Riportiamo con qualche taglio l'intera introduzione al paragrafo 2.1 del testo indicato.

fondamentale, nello scrivere manuali dei rispettivi corsi; i secondi a tenere il passo previsto da rigidi programmi. [...]»

« Il fatto che i matematici divegano, a partire dall'ottocento, professori avrà esiti non indifferenti anche proprio nello specifico della matematica, per quanto riguarda l'organizzazione rigorosa delle teorie in funzione didattica. Inoltre, la caatterizzazione "politecnica" dell'insegnamento, con una grande atttenzione rivola agli aspetti "applicati", costituirà un tratto distintivo per lungo tempo dela matematica francese, e contribuirà, tra l'altro, ad assicurare all'analisi un ruolo privilegiato tra le varie branche della matematica.»

## 5.2 Le Serie di Fourier

Alla fine del Settecento lo studio della natura del calore era una questione di grande interesse per fisici e matematici. Si sta cominciando ad intuire la possibilità di usare il calore come fonte di energia: numerosi tecnici lavorano alla cosa facendo sì che compaiano macchine a vapore nei processi industriali e nelle fabbriche tessili. Ma se in Inghilterra c'è sostanzialmente interesse pratico per la cosa, in Francia numerosi matematici pubblicarono memorie a riguardo.

**Figura 5.1.** Jean Baptiste Joseph Fourier.

Uno di questi sarà Jean Baptiste Joseph Fourier Auxerre, 21 marzo 1768 – Parigi, 16 maggio 1830) è stato un matematico e fisico francese. La sua istruzione si compì dapprima presso i monaci benedettini, poi in una scuola militare. Partecipò alla Rivoluzione francese, rischiando di essere ghigliottinato durante il Terrore, ma fu salvato dalla caduta di Robespierre. Entrò quindi nella École Normale Supérieure, dove ebbe come professori, tra gli altri, Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace. Succedette a quest'ultimo nel ruolo di professore alla École Polytechnique nel 1797. Fourier partecipò alla campagna d'Egitto di Napoleone nel 1798 e ricoprì un importante ruolo di diplomatico in quel paese. Al suo ritorno in Francia, nel 1801, fu nominato da Napoleone prefetto dell'Isère. Fu quindi lì, nella città di Grenoble, che condusse i suoi esperimenti sulla propagazione del calore. Nel 1817 entrò a far parte dell'Accademia delle Scienze. Tra i suoi maggiori contributi figurano: la teorizzazione della serie di Fourier e la conseguente trasformata, la formulazione dell'equazione generale della conduzione termica in termodinamica.

Nella *Teorie analytique de la chaleur* del 1822, Fourier affrontò il problema dello studio della natura e della propagazione del calore. Nell'integrare le equazioni differenziali ottenute egli fece uso di serie trigonometriche determinandone opportunamente i coefficienti: si tratta delle serie di Fourier.

Non riportiamo qui né una descrizione del problema risolto da Fourier, né una descrizione dei metodi usati [2], ma ci concentriamo sulle conseguenze che tale lavoro ha portato sul concetto di funzione. Così riportiamo le parole di Fourier:

[2] Per questo rimandiamo al testo [3], cap.2.2

> «Risulta dalle mie ricerche che le funzioni arbitrarie anche discontinue possono sempre essere rappresentate da sviluppi in seno o coseno di archi multipli, conclusione che il celebre Eulero ha sempre respinto [...]. Gli sviluppi in discorso hanno questo in comune con le equazioni differenziali alle derivate parziali, che essi possono esprimere la proprietà delle funzioni interamente arbitrarie e discontinue; è per questo che si presentano in maniera naturale per l'integrazione di queste ultime equazioni.» (Fourier, *Teorie analytique de la chaleur*, 1822)

Da queste poche righe si può comprendere come Fourier pensi di aver trovato la strada per caratterizzare tutte le funzioni inerenti al calcolo integrale, come richiedeva il concorso di Pietroburgo circa trent'anni prima. Egli afferma in particolare che le sue serie trigonometriche possono rappresentare funzioni non necessariamente definite da un'unica espressione analitica e non necessariamente continue. Per funzione Fourier intende:

> «La funzione f(x) rappresenta una successione di valori o di ordinate ciascuna delle quali è arbitraria. [...] Noi non supponiamo che queste ordinate siano soggette a una legge comune; esse si succedono l'una all'altra in maniera qualsiasi.» (Fourier, Teorie analytique de la chaleur, 1822)

Nell'entusiasmo della sua scoperta egli afferma che con tali serie si possano rappresentare funzioni completamente arbitrarie benché egli avesse operato soltanto con funzioni con un numero finito di discontinuità. Nonostante questo slancio sia immotivato sul piano matematico, l'opera di Fourier rappresenta comunque la rottura definitiva con l'idea che le funzioni analitiche siano il prototipo di tutte le funzioni: non solo infatti il problema fisico impone una revisione di tale concetto, ma la definizione di serie di Fourier mostra concretamente l'esistenza di una quantità di funzioni che non può essere ignorata nella risoluzione di problemi inerenti alla risoluzione di equazioni differenziali.

Si ha infatti che le funzioni rappresentate dalle serie di Fourier sono ben più generali delle funzioni analitiche: per esempio una serie di Fourier non rappresenta per forza una funzione derivabile e tantomeno continua. Poiché le proprietà delle funzioni analitiche non potevano più essere estese a tutte le funzioni, sorse il problema di individuare, al di là del riferimento grafico intutivo, il significato preciso da dare ai concetti di funzione, di continuità, di derivabilità, di integrabilità, e così via.

## 5.3 Le concezioni in Fourier

L'opera di Fourier impone una riflessione più approfondita di quella proposta da Eulero e D'Alembert, ma aggiunge nuovi elementi di interesse.

Le ricerche di Fourier non avvengono sulla spinta di una sempre maggiore generalizzazione dei risultati, anzi, la genralità è un argomento indotto dai problemi affrontati, e ci spinge su questa via solo quanto basta per risolverli compiutamente. Per Fourier l'analisi rimane quindi una scienza molto concreta. Per questo motivo egli rifiuta il formalismo lagrangiano ed euleriano, sottolineando il ruolo fondamentale che la fisica matematica sta acquisendo nello sviluppo dell'analisi: Si ha infatti che i risultati di quest'ultima, secondo Fourier, non devono soltanto provenire da problemi della Fisica, ma devono anche spiegarne i fenomeni e quindi essere verificati da questa.

In parole povere, la matematica deve trovare nella realtà esterna (fisica) stimoli e verifiche (e dunque anche i propri criteri di rigore): questa è l'indicazione che emerge con chiarezza dall'opera di Fourier, in totale contrasto con le idee, per esempio, di Lagrange viste al capitolo precedente.

Il carattere della matematica usata da Fourier è del tutto nuovo rispetto a quello di Lagrange. Riportiamo le parole di Bottazzini in [3]:

> «Il concetto di funzione, in Fourier, non è rivestibile con l'abitostretto imposto da Lagrange, né tantomeno la sua idea di analisi è quella lagrangiana di studio algebrico di quantità finite. Il rigore lagrangiano (di cui, non a caso, la trattazione di Fourier è accusata di essere carente) viene sostituito da un'altra concezione, non formale. Ad esempio per quanto riguarda le serie [...] è rigorosa per Fourier non già la trattazione (se pure formalmente ineccepibile) delle funzioni mediante serie di Taylor, ma un calcolo effettivo dei primi n termini, che mostra già come debba essere il limite per n infinito, e poi una verifica dei risultati sui dati (matematici o fisici) da cui si è partiti.»

La concretezza della concezione di Fourier sarà l'elemento principale di distinzione tra la matematica francese e quella tedesca. Lontano dalla rivoluzione industriale inglese e dalla Rivoluzione francese i matematici tedeschi elaborano una concezione della matematica separata dalla pratica, e non è un caso che le questioni sui fondamenti della matematica siano anzitutto sollevate da matematici tedeschi quali Kroneker, Dedekind, Weierstrass e Cantor, prima di divenire a cavallo del 1900 argomento di discussione generale.

Agli inizi del XIX secolo la definizione di funzione si stacca definitivamente dal riferimento geometrico intuitivo di movimento per abbracciare non solo in teoria ma anche in pratica una nuova concezione del termine funzione. Questo apre nuove problematiche volte a chiarire i termini dell'analisi:

- Cosa vuol dire che una funzione è continua?
- A cosa converge una generica serie di Fourier? Quando converge?
- Come derivare o integrare una serie infinita?

# Capitolo 6

# Nuovi punti di vista

## 6.1 Abel: questioni aperte all'inizio del secolo

Per comprendere quali fossero le problematiche all'inizio del XIX secolo che riguardavano l'analisi riportiamo un estratto da una lettera di Abel (1802-1829) a proposito:

> «[L'analisi] manca a tal punto di un piano e di una struttura che è assolutamente stupefacente che possa essere studiata da tanta gente, e il peggio è che non è fatta per nulla con rigore. Non ci sono che pochissime proposizione, nell'analisi superiore, che siano dimostrate con indiscutibile rigore.
>
> Dappertutto si trova questa perfida abitudine di etrapolare dal particolare al generale, ed è ben strano che con un simile metodo non si trovino malgrado tutto che pochi paradossi. [...]
>
> A mio parere questo deriva dal fatto che le funzioni di cui l'analisi si è occupata finora possono, nella maggioranza dei casi, essere espresse per mezzo di potenze. Non appena ne intervengono altre, cosa che invero accade piuttosto raramente, allora le cose non tornano più e da conclusioni false derivano una serie di proposizioni scorrette, ad esse concatenate.»

Ed ancora:

> «Le serie divergenti sono in clocco un'invenzione del diavolo ed è una vergogna che si osi fondare sopra esse la pur minima dimostrazione. Usandole, si può mostrare tutto quello che si vuole e sono esse che hanno portato tanti guai e creato tanti paradossi.»

In questo modo Abel mostra la carenze insite nel modo di far analisi agli inizi del secolo evidenziando la mancanza di una struttura organica dei concetti che implicasse la presenza di maggior rigore nell'utilizzo di questi, in particolar modo nell'uso delle serie di potenze: Abel giudica gran parte dei risultati, sebbene sorprendentemente non contradditori, malfondati poiché basati sul teorema di espansione in serie di Taylor applicato a funzioni arbitrarie.

Nonostante l'universalità e la potenza del calcolo infinitesimale, quest'ultimo rimane problematico nei suoi principi di base. Il concetto di funzione, di continuità, di somma di una serie infinita di funzioni, di limite..., non sono sufficientemente ben formulati da rendere rigorosi le deduzioni in campo analitico. In altre parole manca un concetto di rigore applicabile ai risultati teorici e che risponda alle necessità evidenziate dalla pratica applicativa.

Vi è quindi la lucida consapevolezza che non sono solo necessari criteri di rigore esterni alla logica dell'analisi ma anche derivanti da fondamenta sicure su cui poggiarne i concetti basilari. Di questo si occuperanno come anticipato nel capitolo precedente quei didatti che avranno l'esigenza di redigere lezioni e corsi scolastici che presentino in maniera organica i risultati dell'analisi. In particolare la figura di maggior rilievo in questo ambito è certamente quella di Cauchy.

## 6.2 Il Cours d'Analyse di Cauchy

**Figura 6.1.** Augustin Louis Cauchy.

Augustin-Louis Cauchy (Parigi, 21 agosto 1789 – Sceaux, 23 maggio 1857) . Cauchy studiò all'École Centrale du Panthéon nel 1802, all'École Polytechnique nel 1805 ed infine all'École Nationale des Ponts et Chaussées nel 1807, uscendone ingegnere di ponti e strade nel 1809. Lagrange e Laplace lo persuasero a rinunciare all'ingegneria e a dedicarsi completamente alla ricerca scientifica in Matematica. Le sue indubbie qualità gli fruttarono le cattedre alla stessa École Polytechnique, al Collège de France e alla Sorbona. Intransigente legittimista, nel 1830, rifiutò di giurare fedeltà agli Orléans e fu perciò costretto a lasciare l'insegnamento e a recarsi in esilio, prima in Svizzera poi a Torino come docente di fisica sublime all'università (1831). Nel 1833 si trasferì a Praga in qualità di precettore del conte di Chambord, nipote di Carlo X. Ritornò in Francia nel 1838, dove prese ad insegnare in vari istituti religiosi, fino a quando, dispensato dal giuramento alla repubblica da Napoleone III, poté riprendere la cattedra di fisica matematica alla Facoltà di Scienze della Sorbona. Cauchy crebbe in una famiglia di convinte idee monarchiche e fu un cattolico egualmente convinto. In suo onore è stato battezzato il cratere Cauchy, sulla superficie della Luna.

Nei tre testi, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821), *Resume des lecons su le calcul infinitesimal* (1823), *Lecons sur le calcul differentiel* (1829), Cauchy dà un'esposizione del calcolo infinitesimale, presentandolo con la veste moderna che viene ancora oggi presentata, facendo quello che fece Eulero circa un secolo prima alla luce dei nuovi risultati e dei problemi che sin lì si erano presentati.

Sin dalle prime pagine del suo *Cours d'analyse* egli dichiara esplicitamente di non voler ammettere in analisi l'estensione all'infinito dei passaggi algebrici al finito, senza il rigore dovuto:

> «Quanto ai metodi, ho cercato di dar loro tutto il riore che si esige in geometria in modo da non ricorrere mai ad argomenti tratti dalla generalità dell'algebra.

> Argomenti di questo tipo, benché ammessi assai comunemente soprattutto nel passaggio dalle serie convergenti a quelle divergenti e dalle quantità reali alle espressioni immaginarie, non possono essere considerati, mi sembra, che come delle induzioni adatte a far talvolta presentire la verità, ma che poco s'accordano con l'esattezza tanto vantata delle scienze matematiche.
>
> Bisogna inoltre osservare che essi tedono a far attribuire alle formule algebriche un'estensione indefinita, mentre in realtà la maggior parte di queste formule sussiste unicamente sotto certe condizioni e per certi valori delle quantitòà in esse contenute.
>
> Determinando queste condizioni e questi valori e fissando in modo preciso il senso delle notazioni di cui mi servo, faccio sparire ogni incertezza.» (Cauchy, *Cour d'Analyse*, 1821)

Lo strumento che Cauchy usa per condurre a termine la sua opera ri revisione critica è la teoria dei limiti, ed il concetto di limite sarà quello attraverso il quale definire la continuità delle funzioni, la derivabilità, l'integrale, la convergenza e la divergenza di una serie, nonché la sua somma. Non è più la rappresentabilità in serie di potenze, come in Lagrange, la base dalla quale partire, ma è il concetto astratto di limite.

E' quindi naturale che questo testo si apra con la definizione che segue:

> «Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, sì da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà, quest'ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre»

Dato questa definizione è possibile dare definizioni coerenti di infinito ed infinitesimo come variabile «che cresce sempre di più in modo da superare ogni numero dato» e variabile «che ha zero come limite», rispettivamente. Inoltre vengono definite le operazioni algebriche e trascendenti elementari come da tradizione, per poi passare al concetto di funzione:

> «Allorché delle quantità variabili sono legate tra loro in modo tale che, dato il valore di una, si possa ricavare il valore di tutte le altre, queste, espresse per mezzo della variabile indipendente, sono chiamate funzioni di questa variabile»

Infine (almeno per quanto ci riguarda!), dopo aver definito infinitesimi di primo ordine e degli ordini successivi, Cauchy dà la seguente definizione di continuità di una funzione:

> «Sia $f(x)$ una funzione della variabili $x$, e supponiamo che, per ogni valore intermedio di $x$ entro due limiti dati, la funzione ammetta sempre un valore finito. Se partendo da un valore di $x$ compreso entro questi due limiti, si attribuisce alla variabile $x$ un incremento infinitesimo $a$, la funzione stessa riceverà per incremento la differenza $f(x+a)-f(x)$ che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile $a$ e dal valore di $x$. Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile $x$, funzione continua di questa variabile se, per ogni valore di $x$ compreso tra questi due limiti, il valore numerico della differenza $f(x+a)-f(x)$ decrescerà indefinitivamente insieme a quello di $a$.»

E ancora:

> «La funzione $f(x)$ resterà continua rispetto a $x$ fra due limiti dati, se, entro questi limiti un incremento inifinitesimo della variabile produce un incremento infinitesimo della funzione stessa»

La definizione di funzione di Cauchy appare del tutto svincolata dall'esprimibilità attraverso un'espressione analitica della variabile dipendente (com'era ad esempio per Lagrange). Inoltre la definizione di funzione continua comprende anche funzioni con punti angolosi e dunque non derivabili. L'idea di continuità diviene locale (Cauchy parla infatti di rimanere «ento i limiti dati»!), arrivando molto vicino così alla concezione odierna di funzione e di funzione continua [1].

L'opera analitica di Cauchy fu importante anche perché in essa troviamo una robusta sistemazione teorica di alcune nozioni geometriche introdotte a partire dalla fine del XVII secolo in termini intuitivi, cui successivamente erano state applicate le tecniche analitiche.

Le nozioni di lunghezza di una curva, di area, di volume, erano state accettate nel modo in cui venivano intese intuitivamente e veniva considerato uno dei massimi risultati del calcolo infinitesimale il fatto che queste quantità potessero essere calcolate mediane gli integrali. Cauchy invece definisce queste grandezze geometriche mediante gli integrali che erano stati formulati per calcolarle. In questo modo il punto di vista di Cauchy diventa quello moderno: l'analisi si libera completamente del riferimento geometrico e trova in se stessa il fondamento delle sue definizioni.

Dopo aver definito il concetto di funzione Cauchy [2] definisce serie convergenti le serie il cui limite delle somme parziali è finito, altrimentile chiama divergenti. Di qui Cauchy studia alcuni criteri di convergenza per le serie, tanto necessari per smascherare gli abusi nel passato: sono qui enunciati i criteri della radice e del rapporto e i criteri per le serie a segno alterno.

In generale la ricerca e la determinazione di criteri di convergenza per le serie riflette un radicale mutamento nel modo di intendere l'analisi rispetto alla tradizione settecentesca: mentre Eulero, D'Alembert, Lagrange non sentivano la necessità di dimostrare le proprietà di analiticità di una funzione poichè l'espandibilità in serie era considerata come il fondamento stesso dell'analisi, ora la consapevolezza dell'esistenza di serie di potenze possibilmente non convegenti mette in luce la necessità di invertire questo punto di vista e pensare all'espandibilità in serie come una proprietà specifica di alcune funzioni legata all'esistenza delle derivate. Nasce da questo l'interesse per funzioni patologiche che prenderà piede in tutto l'Ottocento.

Un'osservazion interessante riguarda il fatto che Cauchy si assicura della convergenza delle serie sotto opportune ipotesi per il termine generale della somma senza chiedere di conoscere quale sia di fatto il valore della somma. Questo fatto del tutto inedito sembra normale se si pensa che nella matematica odierna le affermazioni di natura esistenziale sono diventate abituali.

La visione di Cauchy presenta novità di risultati condotti con un senso del rigore inedito fino ad allora. Questo però non ci deve indurre a pensare che con Cauchy

[1]Cauchy è consapevole della sua novità: rimandiamo alle pag 102 - 103 in [3].

[2]Non diamo in questo testo ulteriori approfondimenti sull'opera di Cauchy. Invitiamo il lettore interessato a guardare il capitolo dedicato in [3].

l'analisi avesse raggiunto la sua forma definitiva. Se infatti la sistemazione organica dell'analisi da parte di Cauchy ha sciolto diversi nodi importanti, ne rimangono altrettanti da risolvere e che riguardano questioni tra le più spinose:

*a.* L'interesse di Cauchy verso criteri di convergenza di una serie evidenzia ulteriormente la necessità di provare teoremi di convergenza non solo per le serie di potenze ma anche per le serie trigonometriche come la serie di Fourier apparsa nel panorama europeo nel 1822. Se infatti tali serie avevano messo in discussione il concetto di funzione antecedente a quello di Cauchy, era necessario comprendere se tali serie effettivamente convergessero e quale fosse il loro limite, identificando così la portata dell'estensione del concetto di funzione annunciata da Fourier stesso. Pertanto una prima questione è: quando una serie è convergente? a cosa converge una serie di Fourier?

*b.* Un altro punto delicato che Cauchy non risolve, è proprio la sua definizione di limite: cosa vuol dire «avvicinarsi in definitivamente»? E' necessario eliminare anche da questa definizione un ultimo baluardo di intuizione geometrica ereditata dalle concezioni passate. Per far questo si dovrà caratterizzare la nozione di limite in maniera più precisa e che faccia riferimento a proprietà proprie dei numeri reali. Si apre così il problema della ricerca di una definizione dei numeri reali che renda ben fondato l'intero castello dell'analisi. Da qui trarrà origine la cosìdetta "aritmetizzazione dell'analisi".

Nella prossima sezione diamo una risposta parziale alla prima questione introducendo l'opera di Dirichlet.

## 6.3 Dirichlet e la convergenza delle serie di Fourier

L'opera di Fourier aveva rivelato che una vasta classe di funzione può essere rappresentata mediante serie trigonometriche. Rimaneva però aperto il problema di determinare condizioni sufficienti affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Fourier. In questo senso vi furono dei tentativi di risoluzione del problema da parte di Poisson e Cauchy, ma non portarono molto lontano. La questione della convergenza delle serie di Fourier ebbe un primo risultato in un lavoro di Dirichlet.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 13 febbraio 1805 – Gottinga, 5 maggio 1859) La sua famiglia proveniva dalla città di Richelet nel Belgio, da cui derivò il cognome "Lejeune Dirichlet" ("le jeune de Richelet" = "il ragazzo di Richelet"). Fu educato in Germania e quindi in Francia, dove ebbe modo di conoscere molti dei più celebri matematici del tempo. Sposò Rebecca Mendelssohn, che veniva da una distinta famiglia ebrea, essendo nipote del filosofo Moses Mendelssohn, e sorella del compositore Felix Mendelssohn. Dopo la sua morte, gli scritti di Dirichlet e tra cui molti risultati in teoria dei numeri furono raccolti, curati e pubblicati dal suo amico e matematico

**Figura 6.2.** Lejeune Dirichlet.

Richard Dedekind con il titolo *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Lezioni sulla teoria dei numeri). I suoi contributi maggiori furono oltre che in teoria dei numeri anche in meccanica razionale e sistemi dinamici.

In *Sur la convergence des series trigonometriques* del 1829, Dirichlet diede il primo insieme di condizioni sufficienti affinché la serie di Fourier di una funzione $f$ periodica converga puntualmente ad $f$: la funzione doveva essere continua salvo un numero finito di discontinuità, ed avere nel periodo un numero finito di massimi e minimi.

La dimostrazione data da Dirichlet é un affinamento di quella abbozzata da Fourier nelle sezioni conclusive della *Theorie analytique de la chaleur.*

Dirichlet é cosciente che nei casi esclusi dal suo teorema di convergenza coinvolgono alcuni dei problemi più delicati dell'analisi:

- nel caso in cui si voglia estendere il ragionamento ad una funzione con un numero infinito di discontinuità si incontra subito un impedimento nell'integrare tali funzioni come richiederebbe il calcolo dei coefficienti della serie: la nozione di integrale allora disponibile era quella di Cauchy il quale aveva definito l'integrale per funzioni continue su un intervallo, o al più discontinue in un numero finito di punti. Dirichlet conclude pertanto che la finitezza del numero di discontinuità é una condizione necessaria per la rappresentabilità di una funzione in serie di Fourier. E' in questo ambito che propone, come esempio, la celebre funzione di Dirichlet: 1 su $\mathbb{Q}$ e 0 altrove.
- Dirichlet sembra essere dell'opinione che una funzione continua a tratti sia sempre rappresentabile in serie di Fourier, ammettendo quindi un'infinità di massimi e minimi. Vent'anni più tardi (1853) risponderà ad una lettera di Gauss che prospettava l'estensione della convergenza di tali serie derivate da funzioni continue, dicendo che l'ipotesi gli sembra corretta a meno di alcuni casi del tutto singolari. Tale convinzione, per la cronaca, si mostrerà sbagliata soltanto nel 1876 quando Du Bois- Reymond esibirà un esempio di funzione continua la cui serie di Fourier non converge alla funzione data.

Dirichlet avrà da dire che queste questioni per essere risolte compiutamente necessitano di una revisione dei principi generali dell'analisi:

> «la cosa, per essere fatta con tutta la chiarezza desiderabile, esige qualche dettaglio legato ai principi fondamentali dell'analisi infinitesimale» (Dirichlet, *Sur la convergence des series trigonometriques*, 1829)

Possiamo concludere questo paragrafo ribadendo però l'importanza del contributo di Dirichlet nell'ambito dello studio di ipotesi sufficienti per la convergenza delle serie di Fourier: infatti, se da un lato il suo teorema non sarà definitivo ed il suo entusiasmo lo aveva portato a concludere una tesi dimostratasi poi errata, dall'altro lato, Dirichlet mostra che le serie di Fourier sono uno strumento valido non solo secondo motivazioni fisiche, ma anche da un punto di vista teorico. In altre parole quella generalizzazione del concetto di funzione operata implicitamente da Fourier utilizzando le serie trigonometriche, non è una generalizzazione nominale ma sostanziale che chiariva una volta per tutte la questione.