Fondamenti e Didattica laboratoriale della Probabilità e Statistica

ROBERTO CAPONE

www.robertocapone.com

Percorsi Formativi per l'abilitazione all'insegnamento nella scuola secondaria a.a. 2025-2026

Le Indicazioni Nazionali (per i Licei) e le Linee Guida (per Tecnici e Professionali) definiscono gli obiettivi di apprendimento e i profili di competenza per il secondo ciclo di istruzione (DPR 87-88-89/2010). Basate sull'autonomia, orientano la progettazione didattica verso un apprendimento attivo, inclusivo e focalizzato su competenze disciplinari e trasversali.

Punti Chiave delle Indicazioni Nazionali (Secondaria II Grado):

Struttura: Definiscono gli obiettivi specifici di apprendimento (OSA) per materia e i profili educativi, culturali e professionali (PECUP).

Punti Chiave delle Indicazioni Nazionali (Secondaria II Grado):

Ordinamenti:
Licei (DPR 89/2010): Indicazioni Nazionali per le discipline (Artistico, Classico, Linguistico, Musicale/Coreutico, Scientifico, Scienze Umane).
Istituti Tecnici (DPR 88/2010): Linee Guida che enfatizzano il profilo educativo e le competenze in ambito economico-tecnologico.
Istituti Professionali (DPR 87/2010): Linee Guida focalizzate sull'acquisizione di competenze professionali e la personalizzazione dei percorsi.
Centralità dello Studente: L'approccio didattico deve essere centrato sullo studente, valorizzando l'inclusione, la personalizzazione e l'orientamento.
Competenze STEM: Forte enfasi sull'istruzione matematico-scientifico-tecnologica integrata (STEM) e l'interdisciplinarità.
Autonomia: Le scuole costruiscono il proprio curricolo sulla base di queste indicazioni, adattandolo al contesto territoriale.
Riferimenti Legislativi: Il riordino del 2010 (DPR 87, 88, 89) costituisce la base normativa, con successivi aggiornamenti, inclusi quelli riguardanti le competenze trasversali e l'educazione civica

Quale Probabilità e Statistica nelle Indicazioni Nazionali

Nelle Indicazioni nazionali del 2010 per i licei e del 2012 per il primo ciclo, probabilità e statistica sono integrate come competenze fondamentali, finalizzate a sviluppare il pensiero razionale di fronte all'incertezza. Si parte dall'analisi dei dati nella scuola primaria, passando per la probabilità frequentista alle medie, fino a definizioni classiche e soggettiviste, distribuzioni e inferenza statistica alle superiori.

Ecco i punti chiave per ordine scolastico

Scuola Primaria e Primo Ciclo (Media): L'obiettivo è introdurre concetti di base come eventi certi, possibili o impossibili e l'intuizione di probabilità frequentista attraverso esperimenti e dati. L'attenzione è posta sulla raccolta e rappresentazione di dati (tabelle, grafici) e sul concetto di probabilità intuitiva/frequentista, ovvero il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili in esperimenti semplici .

Quale Probabilità e Statistica nelle Indicazioni Nazionali

Ecco i punti chiave per ordine scolastico

Licei (Secondo Ciclo): Si approfondisce la distinzione tra le definizioni di probabilità (classica, frequentista, soggettivista) e si sviluppano competenze per modellizzare situazioni di incertezza. Le indicazioni richiedono che gli studenti maturino una comprensione formale delle diverse definizioni di probabilità (classica, frequentista, soggettivista) e acquisiscano concetti di statistica inferenziale.

Approccio didattico: Deve essere laboratoriale e interdisciplinare, collegando la probabilità e la statistica a situazioni reali, ai dati e alle scienze, per formare cittadini capaci di interpretare la complessità.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO: PRIMO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Relazioni e funzioni

Geometria

Dati e previsioni

Dati e Previsioni: primo bienno

Obiettivi specifici di apprendimento

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle… Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti. Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

LINEE GENERALI E COMPETENZE

Di qui i gruppi di concetti e metodi di cui lo studente saprà dominare attivamente:

Introduzione ai concetti di base del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica

Dati e Previsioni: secondo biennio

Obiettivi specifici di apprendimento

Lo studente, in semplici situazioni il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, saprà far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico

A questo si aggiungono Teorema di Bayes e sue applicazioni già al liceo classico.

Alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson) allo scientifico

LINEE GENERALI E COMPETENZE

la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica

Dati e Previsioni: quinto anno

Obiettivi specifici di apprendimento

Non compare la voce al liceo artistico.
Gia al Classico: Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni di probabilità (in particolare, la distribuzione binomiale e qualche esempio di distribuzione continua). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente avrà ulteriormente approfondito il concetto di modello matematico e sviluppato la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

LINEE GENERALI E COMPETENZE

un'introduzione ai concetti di base del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica

Istituti tecnici Secondo biennio

Concetto e rappresentazione grafica delle distribuzioni doppie di frequenze.

Indicatori statistici mediante differenze e rapporti.

Concetti di dipendenza, correlazione, regressione.

Applicazioni finanziarie ed economiche delle distribuzioni di probabilità.

Istituti tecnici quinto anno

Probabilità totale, condizionata, formula di Bayes.

Concetto di gioco equo.

Piano di rilevazione e analisi dei dati. Campionamento casuale semplice e inferenza induttiva sulla media e sulla proporzione。

Complementi di matematica

Popolazione e campione.

Statistiche, distribuzioni campionarie e stimatori.

Verifica di ipotesi statistiche per valutare l’efficacia di un nuovo prodotto o servizio.

Complementi di matematica

Probabilità totale, condizionata, formula di Bayes.

Piano di rilevazione e analisi dei dati.

Campionamento casuale semplice e inferenza induttiva.

Come introdurre la probabilità a scuola

"Ormai da molto tempo mi sono convinto che non si può ottenere una buona formazione matematica dei giovani senza utilizzare l'immensa ricchezza concettuale ed euristica della probabilità e della statistica ...intesa... come riflessione su alcuni fondamentali processi di conoscenza .... e non solo come strumento fondamentale per le scienze sperimentali ed umane"

Giovanni Prodi, 1979, atti del convegno: L'insegnamento pre-universitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore, Bressanone

Dal punto di vista metodologico

Approccio attraverso la metodologia IBSE

Approccio attraverso la Storia nella Didattica della Matematica

Approccio attraverso la metodologia dello Storytelling

E tu cosa proponi?

Dal punto di vista dei contenuti

Approccio classico

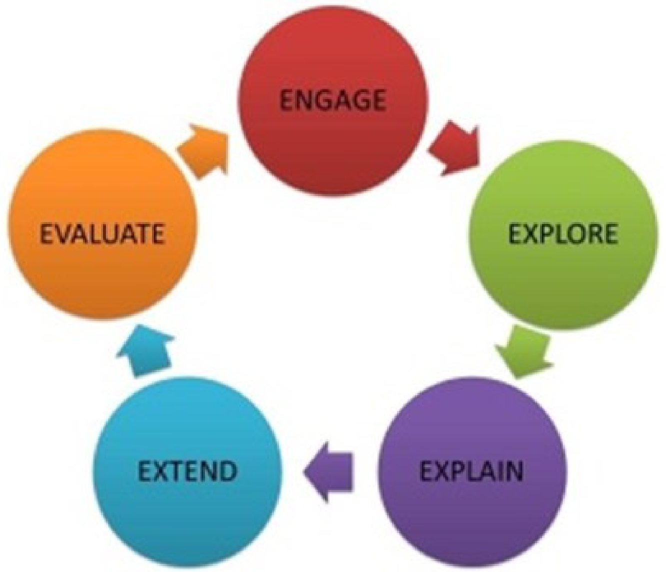
Approccio assiomatico

Approccio frequentista

Bruno De Finetti (1966)

“Considero ‘formativo’ un insegnamento che sviluppa la capacità di affrontare autonomamente e direttamente i problemi, di “vederli” di impostarli e pensarvi e ragionarvi sopra, usando anche (ma con discernimento e scioltezza) eventuali strumenti appresi, ma sempre scegliendo la via più semplice, naturale, intuitiva, suggestiva. E così dicendo intendo riferirmi a tutti i problemi di qualsiasi natura che uno può incontrare nel corso della vita, ed al frutto dell’istruzione e educazione nel suo complesso, senza distinzione di materie. La matematica, come ogni altro insegnamento, deve contribuire per la sua parte alla comprensione del tutto, facendo vedere o intravedere gli aspetti “matematici” in senso lato presenti più o meno in ogni problema, anche non “matematico” nello squallido senso scolastico. Ma non diversamente e non meno dovrebbe ad esempio servire l’italiano per trovare la forma più semplice, chiara, precisa, possibilmente anche elegante e suggestiva, per descrivere spiegare dimostrare cose più o meno strettamente pertinenti alla matematica. E tutte le altre discipline (dalla fisica all’economia, dalla topografia alla statistica) dovrebbero sempre affacciarsi per arricchire di significati illuminanti e fecondi ogni formula incontrata in una sola interpretazione applicativa se non addirittura nel vuoto delle astrazioni. Vuoto apparente: ma per difendere l’”astrazione” dall’accusa di vuotaggine non serve fare vuoti seppur sapienti discorsi che la lasciano vuota, bensì occorre mostrare con svariati interessanti ed utili esempi d’interpretazioni e applicazioni effettive come un discorso “in astratto” non sia (né debba essere!) un discorso su “niente di concreto”, ma al contrario un discorso su “tutte le cose concrete” soddisfacenti le premesse di partenza.”

Approccio di tipo Inquiry



IBSE 5E Model

Phase 1

ENGAGE
What's interesting?

Phase 3

EXPLAIN
What's causing it?

Phase 5

EVALUATE

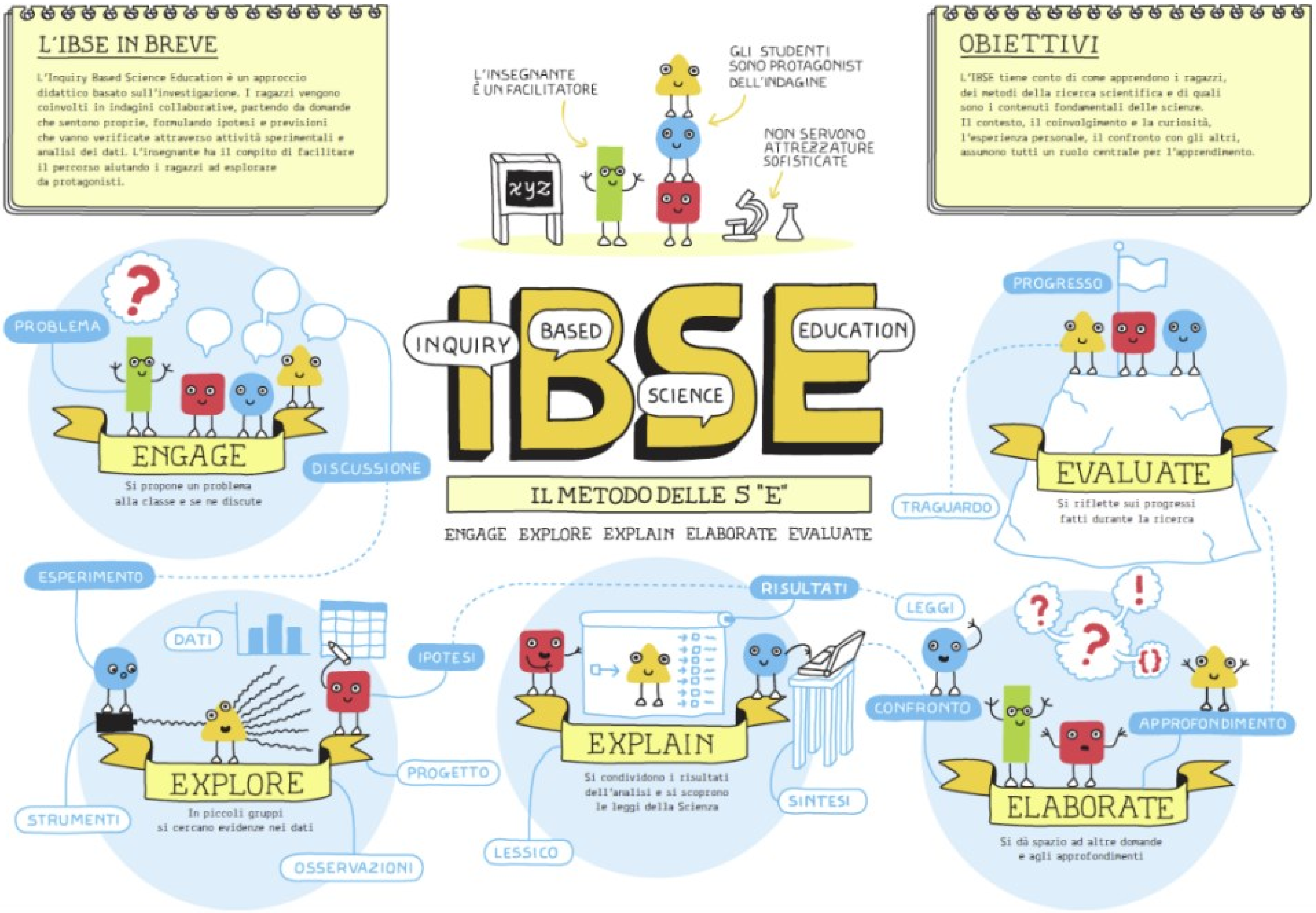
Phase 2

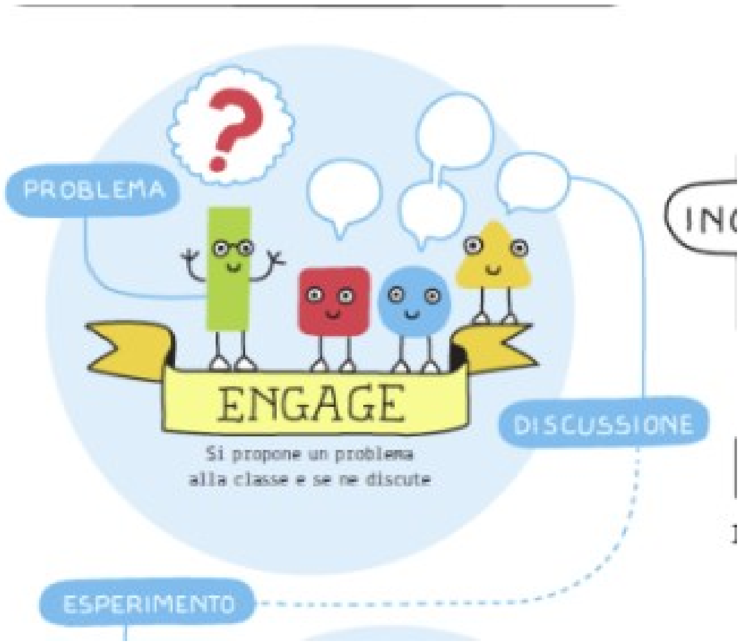
EXPLORE
What's happening

Phase 4

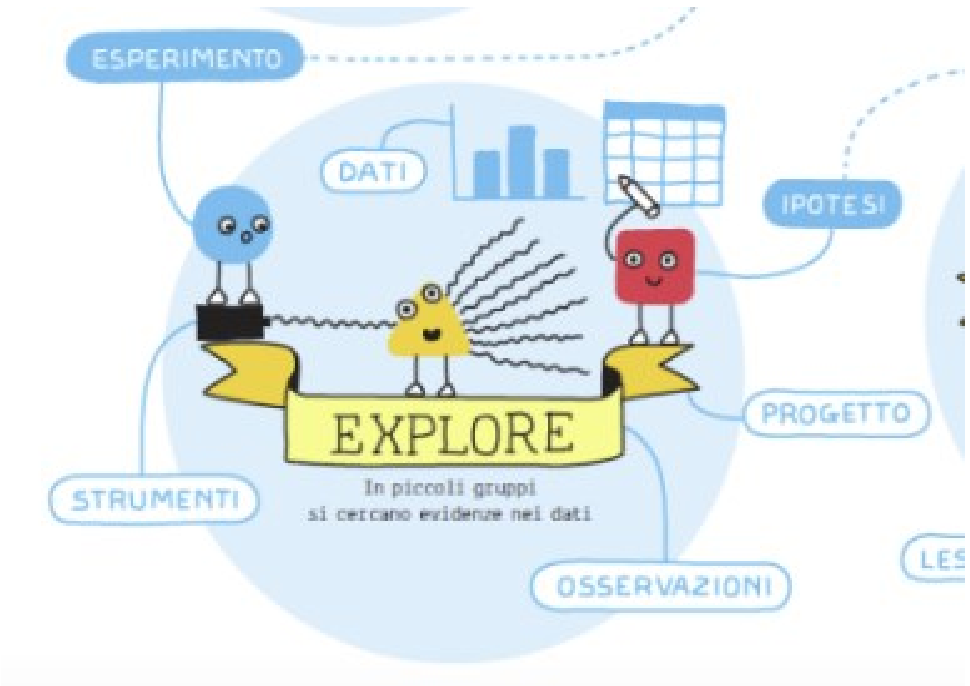
EXTEND
What's similar?

University LOGO

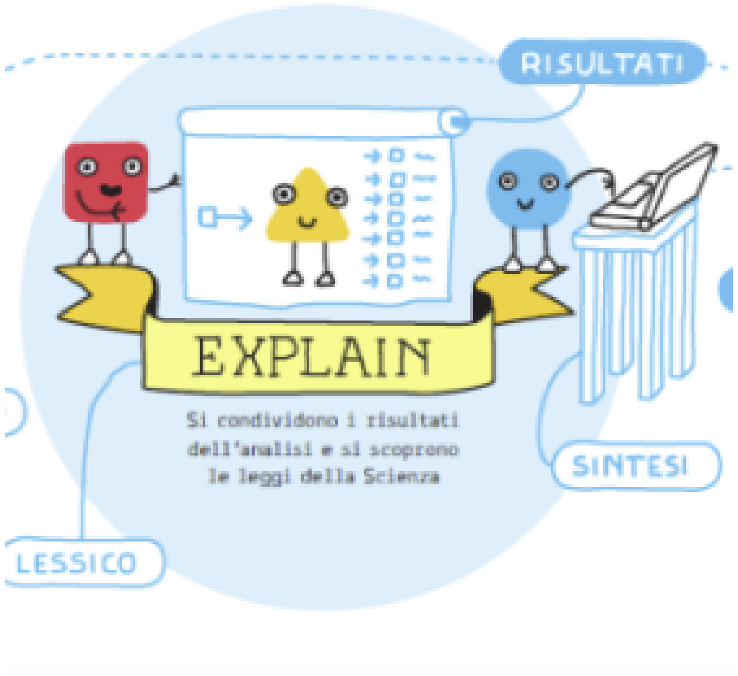

L'IBSE IN BREVE
L'Inquiry Based Science Education è un approccio didattico basato sull'investigazione. I ragazzi vengono coinvolti in indagini collaborative, partendo da domande che sentono proprie, formulando ipotesi e previsioni che vanno verificate attraverso attività sperimentali e analisi dei dati. L'insegnante ha il compito di facilitare il percorso aiutando i ragazzi ad esplorare da protagonisti.
L'INSEGNANTE È UN FACILITATORE
xyz
GLI STUDENTI SONO PROTAGONIST DELL'INDAGINE
NON SERVONO ATTREZZATURE SOFISTICATE
OBIETTIVI
L'IBSE tiene conto di come apprendono i ragazzi, dei metodi della ricerca scientifica e di quali sono i contenuti fondamentali delle scienze.
Il contesto, il coinvolgimento e la curiosità, l'esperienza personale, il confronto con gli altri, assumono tutti un ruolo centrale per l'apprendimento.
IBSE
INQUIRY
BASED
SCIENCE
EDUCATION
IL METODO DELLE 5 "E"
ENGAGE EXPLORE EXPLAIN ELABORATE EVALUATE
PROBLEMA
DISCUSSIONE
ENGAGE
Si propone un problema alla classe e se ne discute
ESPERIMENTO
DATI
STRUMENTI
OSSERVAZIONI
PROGETTO
IPOTESI
EXPLORE
In piccoli gruppi si cercano evidenze nei dati
RISULTATI
LESSICO
SINTESI
EXPLAIN
Si condividono i risultati dell'analisi e si scoprono le leggi della Scienza
LEGGI
CONFRONTO
APPROFONDIMENTO
ELABORATE
Si dà spazio ad altre domande e agli approfondimenti
PROGRESSO
TRAGUARDO
EVALUATE
Si riflette sui progressi fatti durante la ricerca



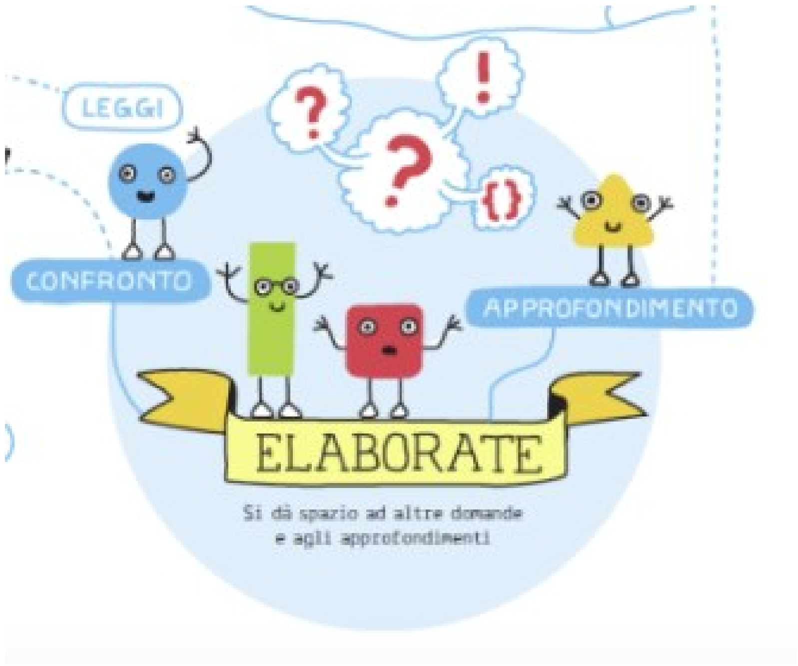
Coinvolgimento attivo dello studente, tramite domande significative dal punto di vista scientifico (investigabili).
L’attività inizia sempre con l’osservazione di un fenomeno inquadrabile tra i temi del modulo didattico, su cui gli studenti sono invitati a riflettere e a porsi domande. In questa fase gli studenti sono lasciati liberi di esprimere le proprie opinioni e osservazioni, sarà compito dell’insegnante raccogliere quelle più significative ai fini dell’esperienza.
Questa fase ha il compito di attirare l’attenzione, stimolare la curiosità, indurre nello studente la sensazione di “volerne saperne di più”. È la fase in assoluto più importante, perché dalla sua buona organizzazione deriva la riuscita dell’intero percorso di apprendimento



Lo studente fa l'esperienza diretta. Una volta raccolte le domande su ciò che si desidera indagare, si indirizzano gli studenti verso la fase sperimentale, chiedendo loro di ideare e svolgere un esperimento che possa dare delle risposte. È importante che l'insegnante sia pronto a ricevere suggerimenti e proposte anche dagli studenti che intendano sperimentare il fenomeno in modo diverso, affiancando tali idee a quelle del modulo. È fondamentale che gli studenti identifichino le variabili in gioco e le sperimentino. Lo scopo di questa fase è registrare dati, isolare variabili, creare grafici e analizzare i risultati.

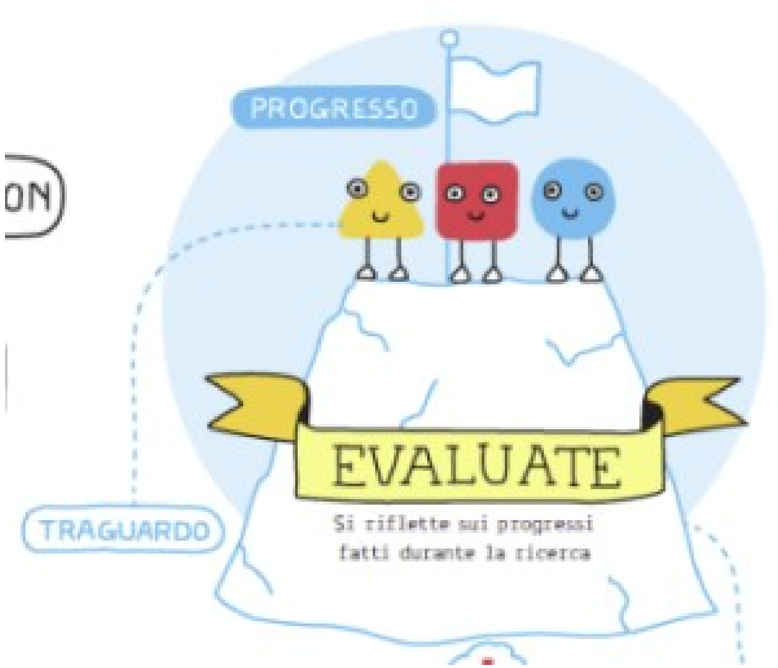


Lo studente inserisce il lessico giusto e viene aiutato a formulare la spiegazione. Gli studenti vengono introdotti a modelli, leggi e teorie. Si fornisce il vocabolario corretto, che permetta loro di spiegare in modo scientificamente rigoroso i risultati delle loro esplorazioni, stimolando la ricerca autonoma sul contesto studiato.



Elaborate o Extend

Lo studente approfondisce e rinforza la comprensione di ciò che ha appreso, applicandolo in situazioni nuove (e confrontandolo a spiegazioni alternative). Gli studenti elaborano quanto hanno scoperto nelle fasi precedenti applicandolo ad altre situazioni che possano fare emergere nuove domande e ipotesi da esplorare. Gli studenti dovrebbero raggiungere il trasferimento dell’apprendimento (transfer of learning).



Lo studente auto valuta la propria comprensione e le abilità acquisite. L’ultima fase prevede la realizzazione di un prodotto finale che sarà valutato mediante autovalutazione, valutazione dei membri del proprio gruppo e valutazione da parte dell’insegnante. Il prodotto finale potrà essere comunicato e discusso in vario modo: davanti agli insegnanti e ai ricercatori, in un’occasione apposita, inquadrabile in una giornata della Scienza, in una mostra o altro.

Caratteristiche essenziali dell'inquiry in classe

Gli studenti devono *sviluppare conoscenza e comprensione delle idee* ***scientifiche per imitazione del lavoro degli scienziati***

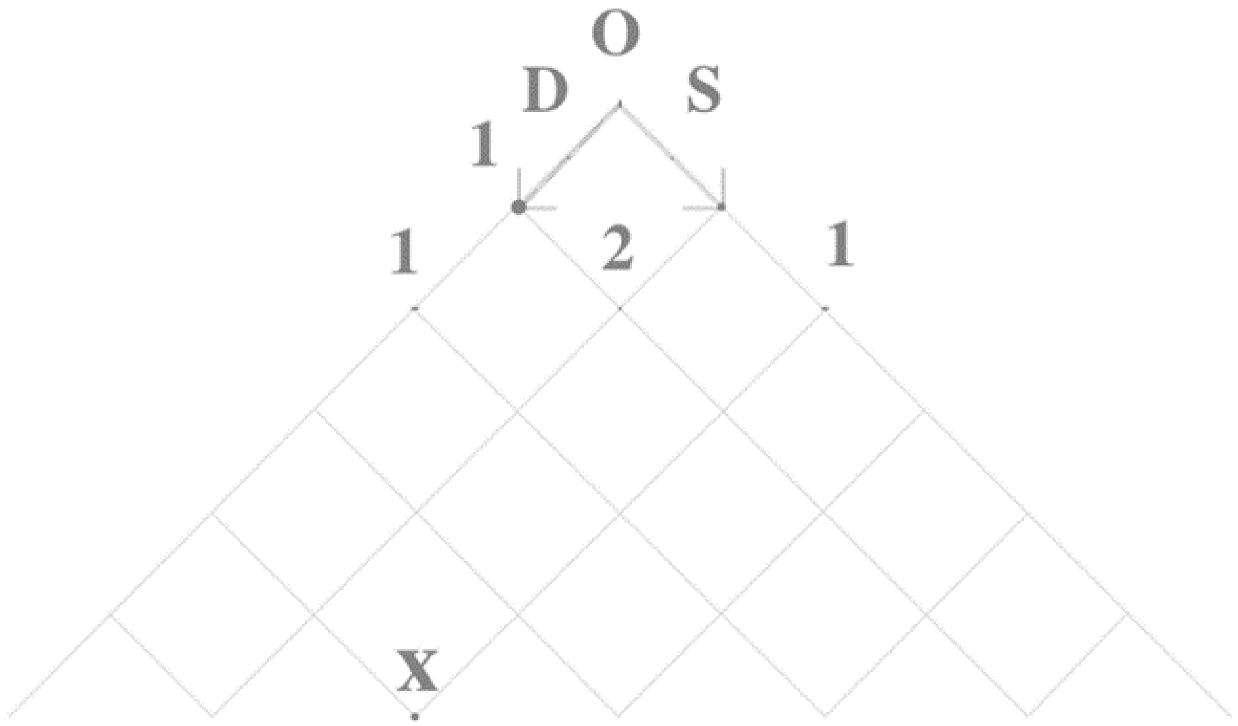
1. Essere coinvolti attivamente da **domande** significative dal punto di vista scientifico (i**nvestigabili**)

2. Raccogliere **evidenze** sperimentali (dirette e/o indirette) per rispondere alle domande

3. Sviluppare e formulare **spiegazioni** a partire dalle evidenze

4. Valutare tali spiegazioni anche alla luce di spiegazioni alternative (confronto tra pari e confronto con le conoscenze scientifiche note)

5. Comunicare e argomentare le spiegazioni da loro proposte

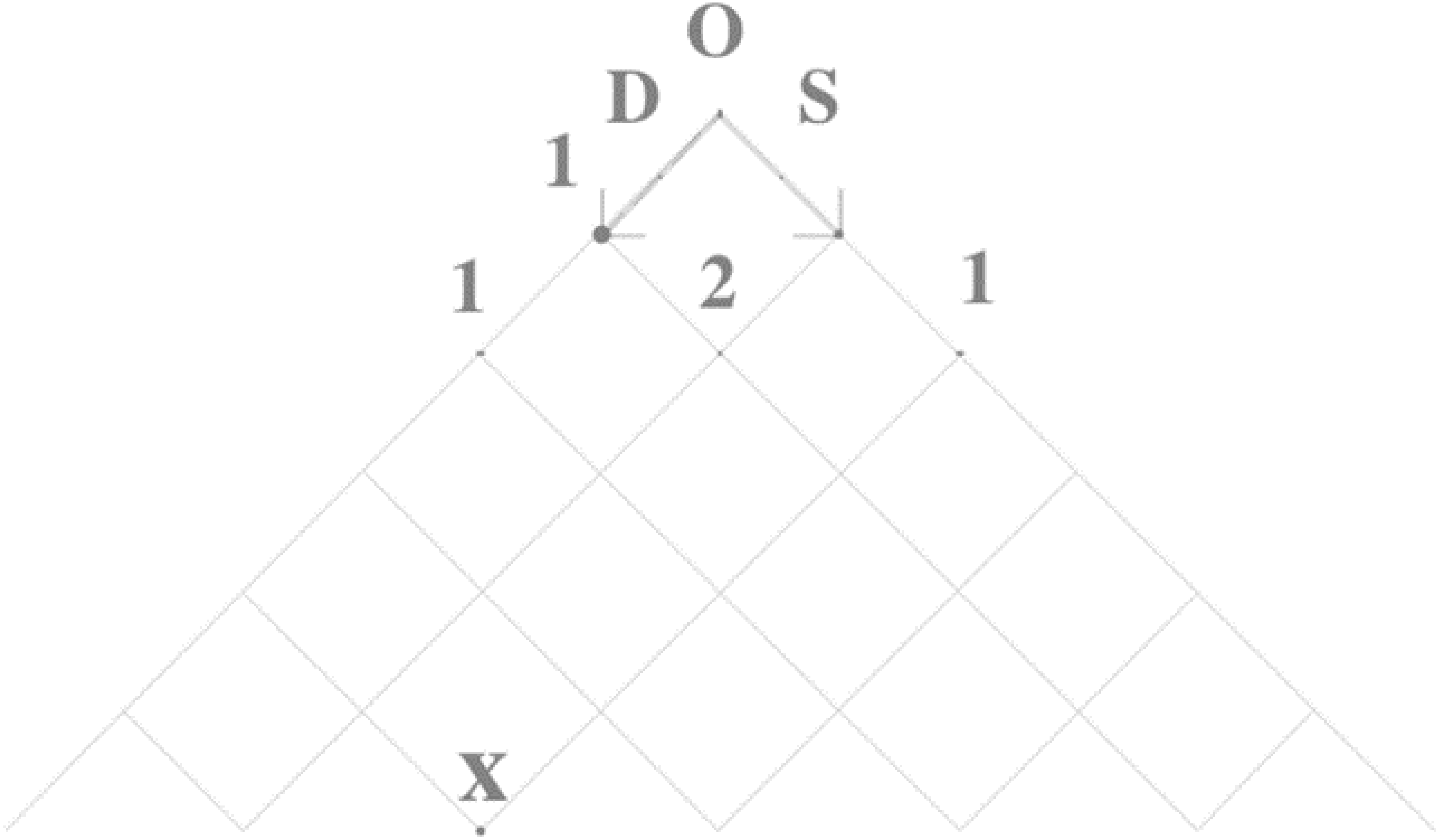


La passeggiata aleatoria

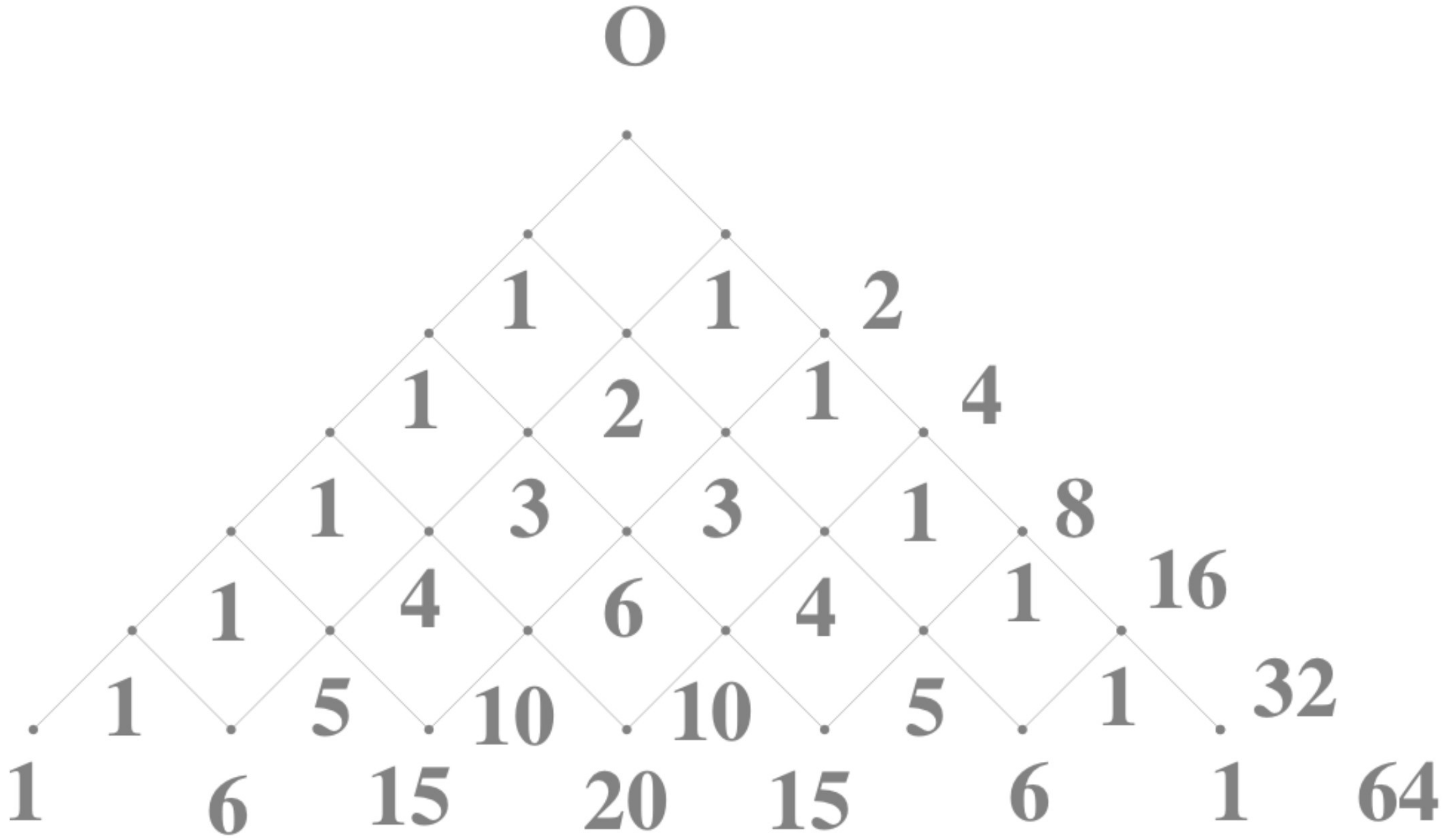
“In questo "paese triangolare quadrettato" un ubriaco parte dal punto 0, che indica l’Origine o una Osteria, situato sulla cima di una collina

“Qual è la probabilità che l’ubriaco arrivi nella sua abitazione che è situata nel punto X all’estremo sud del paese?”

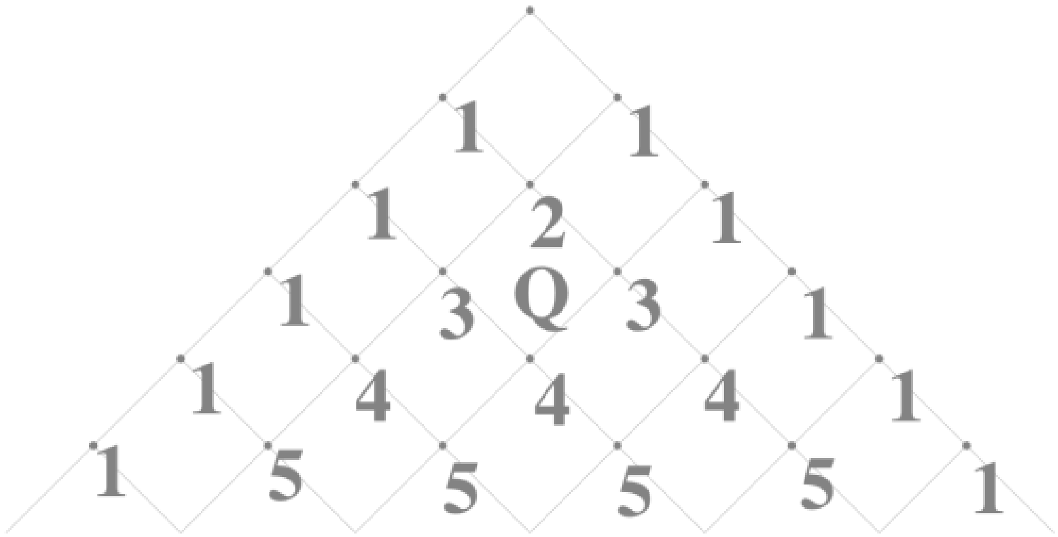
Il paese triangolare



Il paese triangolare



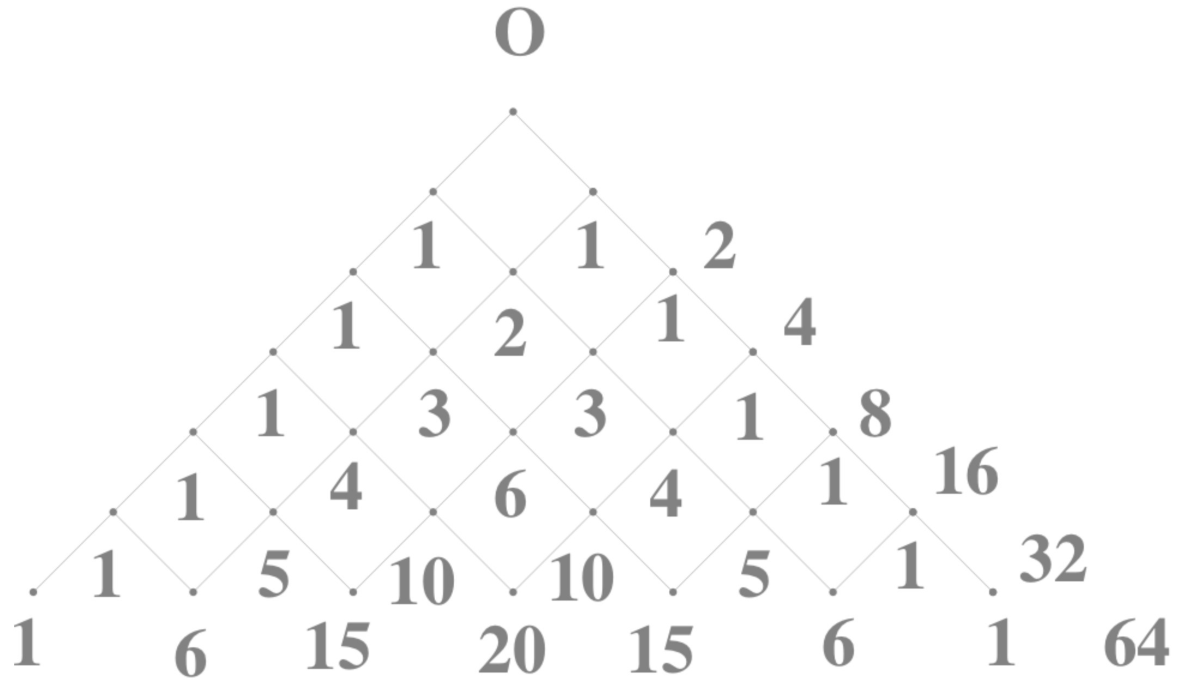
Il paese triangolare



- Alcuni sbagliano a contare il numero di percorsi che portano ad esempio nel punto Q, forse perché non considerano il percorso che potremmo indicare con SDDS (Sinistra, Destra,…) o il suo simmetrico e considerano che, per arrivare in Q, ci sono soltanto 4.
- (in figura viene riprodotto questo numero) o 5 percorsi.

Questo errore può portare ad altri errori nelle righe successive, dovuti anche all'individuazione di una regolarità nei numeri che non corrisponde alla soluzione del problema.

Il triangolo aritmetico



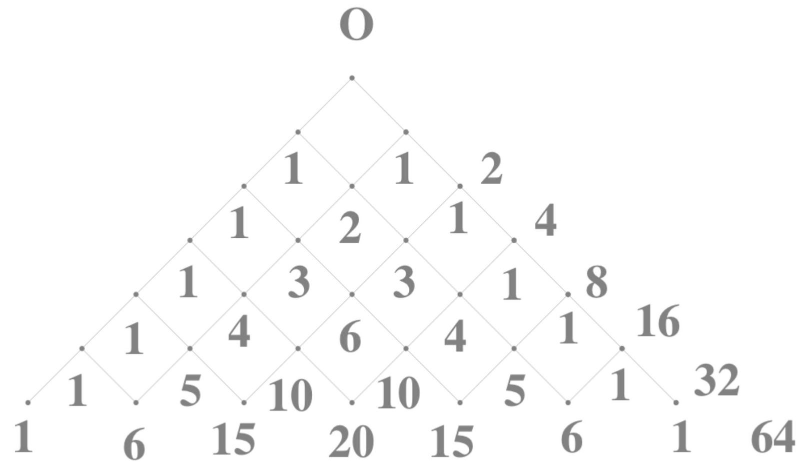
Questa è rappresentata dai coefficienti binomiali del "Triangolo aritmetico"

$$T_2^2$$

"Perché ogni numero differente da 1 è la somma dei due numeri immediatamente sovrastanti?"

Studente 1: "poiché in ciascuno dei punti P considerati si può arrivare unicamente dai due punti sovrastanti, allora il numero di percorsi che arriva in P è dato dalla somma del numero dei percorsi che arrivano nei due punti dai quali è possibile raggiungere P"

Il triangolo aritmetico



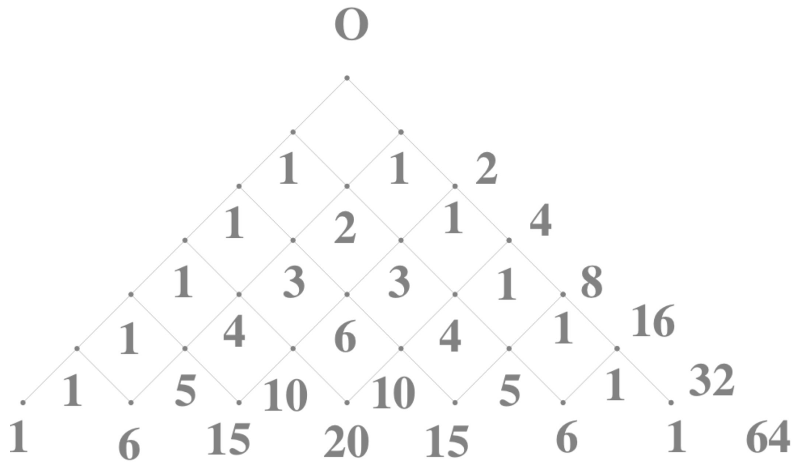
Studente 1: “poiché in ciascuno dei punti P considerati si può arrivare unicamente dai due punti sovrastanti, allora il numero di percorsi che arriva in P è dato dalla somma del numero dei percorsi che arrivano nei due punti dai quali è possibile raggiungere P”

Lo studente 1 esprime a parole la regola di Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h}$$

che in termini diversi ci dice che si arriva al punto della riga n-sima, che è raggiungibile dopo h “passi” a destra e (n-h) a sinistra in qualsiasi ordine, solo dopo aver raggiunto nella riga precedente quei punti cui si accede non effettuando l’ultimo passo: a destra o a sinistra.

Il triangolo aritmetico



Ugualmente nei seguenti termini più matematici, ma inizialmente meno comprensibili o memorizzabili, forse perché risultano rappresentabili con minore facilità, si può considerare che nel risultato del prodotto

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$$

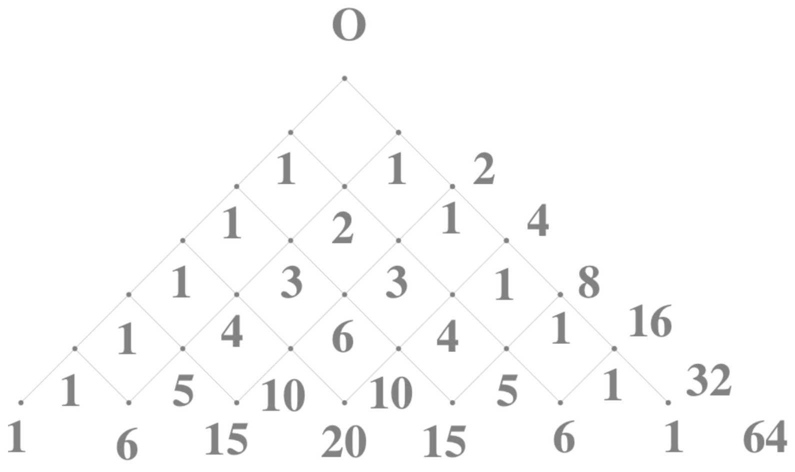
Il termine

$$a^h b^{n-h}$$

Può essere ottenuto unicamente moltiplicando $a^{h-1}b^{n-h}$ per *a,* oppure $a^h b^{n-h-1}$ per *b.*

Ne segue che il coefficiente $a^h b^{n-h}$ si ottiene come somma dei coefficienti degli altri due termini considerati.

Il triangolo aritmetico



Il collegamento fra linguaggi differenti è diretto perché, ad esempio, il prodotto:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

si può calcolare scegliendo, in tutti i 2^5 modi possibili, uno dei due addendi in ciascuna delle cinque parentesi. Questo corrisponde alle cinque scelte fra destra e sinistra che deve effettuare l'ubriaco per arrivare alla quinta riga.
E dunque i coefficienti dello sviluppo considerato corrispondono così alla quinta riga di T_2^2

Il triangolo aritmetico

“Come mai la somma dei numeri dei percorsi favorevoli che portano nei punti di ogni riga “orizzontale” è dato da una potenza di 2?”

Anche in questo caso, dopo qualche tentativo, si arriva attraverso le indicazioni di vari studenti ad una spiegazione breve e convincente.
Studente 2: *“poiché ogni percorso dà origine a due percorsi, allora il numero totale di questi raddoppia ogni volta, dopo ogni riga”.*
C’è stato anche qualche tentativo di spiegazione più spartana ma corretta
Studente 3: *il totale dei percorsi in ogni riga raddoppia rispetto alla riga precedente, perché ogni numero di questa viene sommato due volte in relazione ai due numeri immediatamente sottostanti.*

Naturalmente la stessa cosa si può ottenere sinteticamente considerando che

$$(1+1^n = \sum_h \binom{n}{h} = 2^n$$

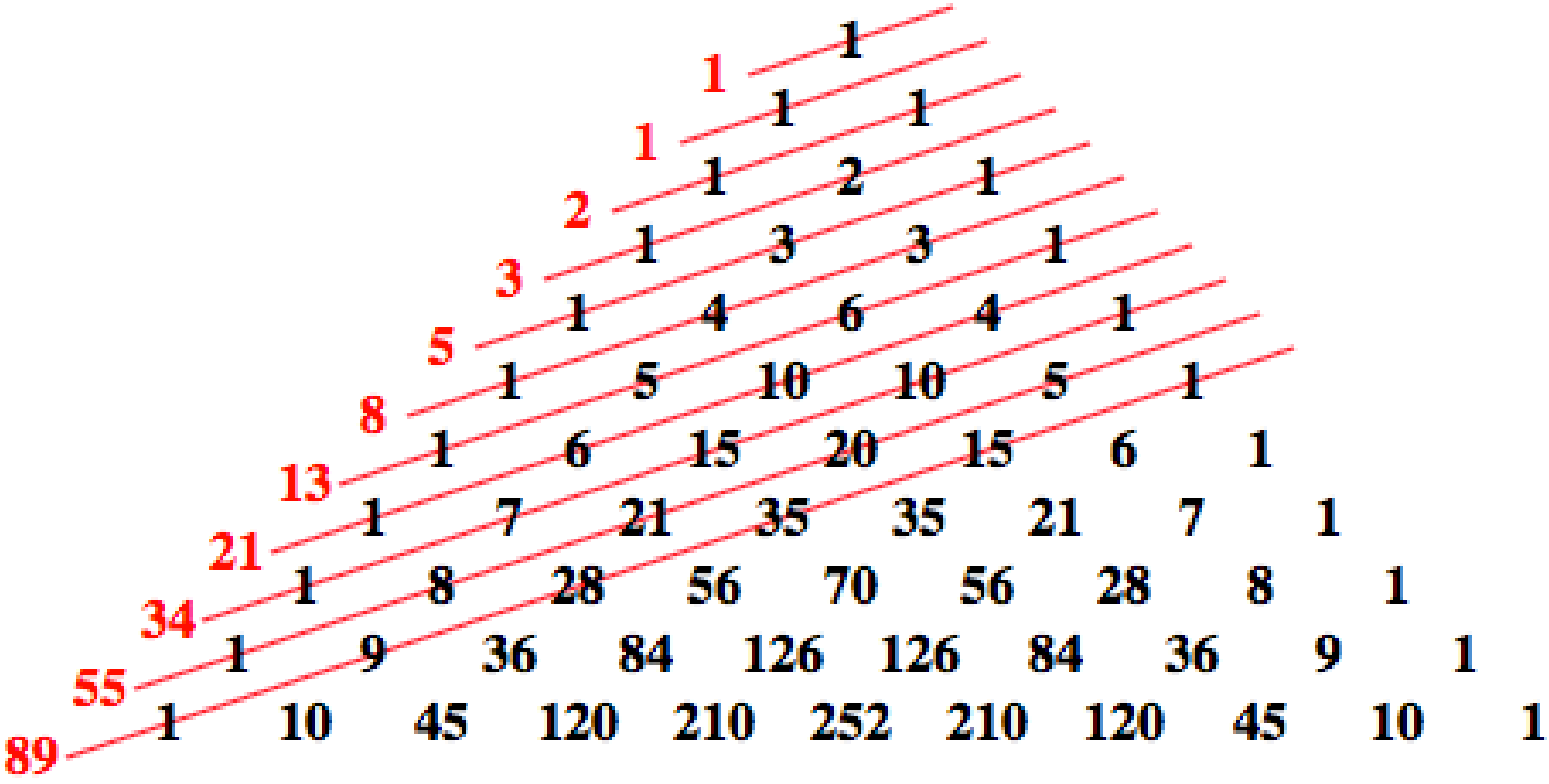
Il triangolo aritmetico

Così anche lanciando cinque volte una moneta o, che è lo stesso, lanciando cinque monete contemporaneamente, le probabilità di ottenere un numero di teste pari a: 0, 1, 2, 3, 4, 5, possono essere ottenute dividendo per 2^5 i numeri della quinta riga di

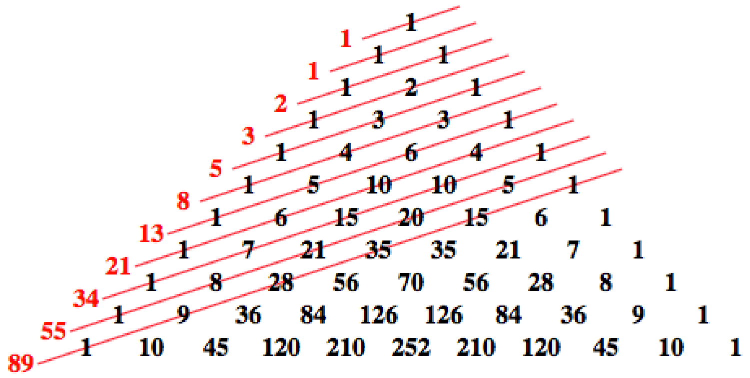
$$T_2^2$$

Studente 4: “ora ho capito perché il traffico è maggiore al centro!.”

Fibonacci e il triangolo di Tartaglia



Fibonacci e il triangolo di Tartaglia



Proviamo a farne un diagramma di probabilità: la cosa più naturale è normalizzare una riga dividendo ogni numero per la somma della riga

Cosa viene fuori

Per la riga n ottieni la distribuzione di probabilità di una Binomiale con p=1/2

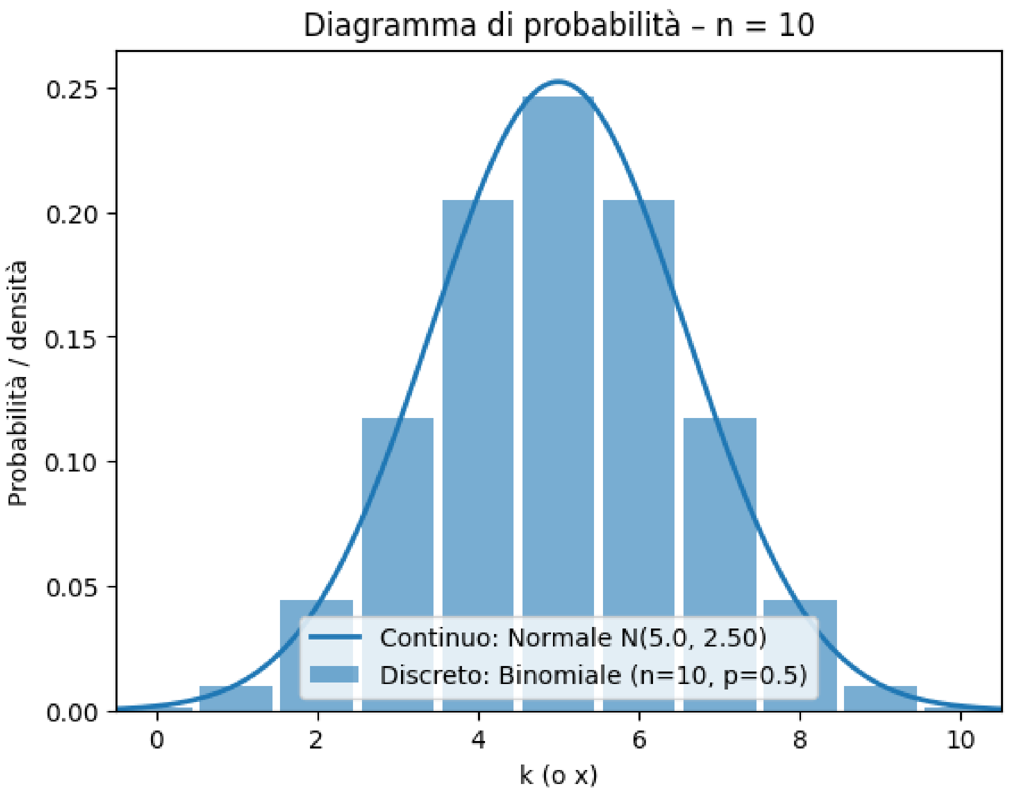
$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \qquad k = 0,1, \dots , n$$

il “diagramma” (istogramma a barre) è simmetrico ha il massimo al centro (intorno a $k \approx n/2$)per n grande assomiglia sempre più a una campana (Normale)

Bruno De Finetti (1975)

“nessun argomento ha valore o interesse di per sé, ma ogni argomento lo acquista se introdotto al momento giusto in connessione con altre problematiche interessanti ...: sono le connessioni effettive (applicazioni, analogie, interazioni, simbiosi di concetti) che danno ai giovani l'impressione di fare scoperte e la soddisfazione di sentirsi creativi

Fibonacci e il triangolo di Tartaglia



Esempio concreto (ultima riga mostrata, $n = 10$)

Riga:

$$1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1$$

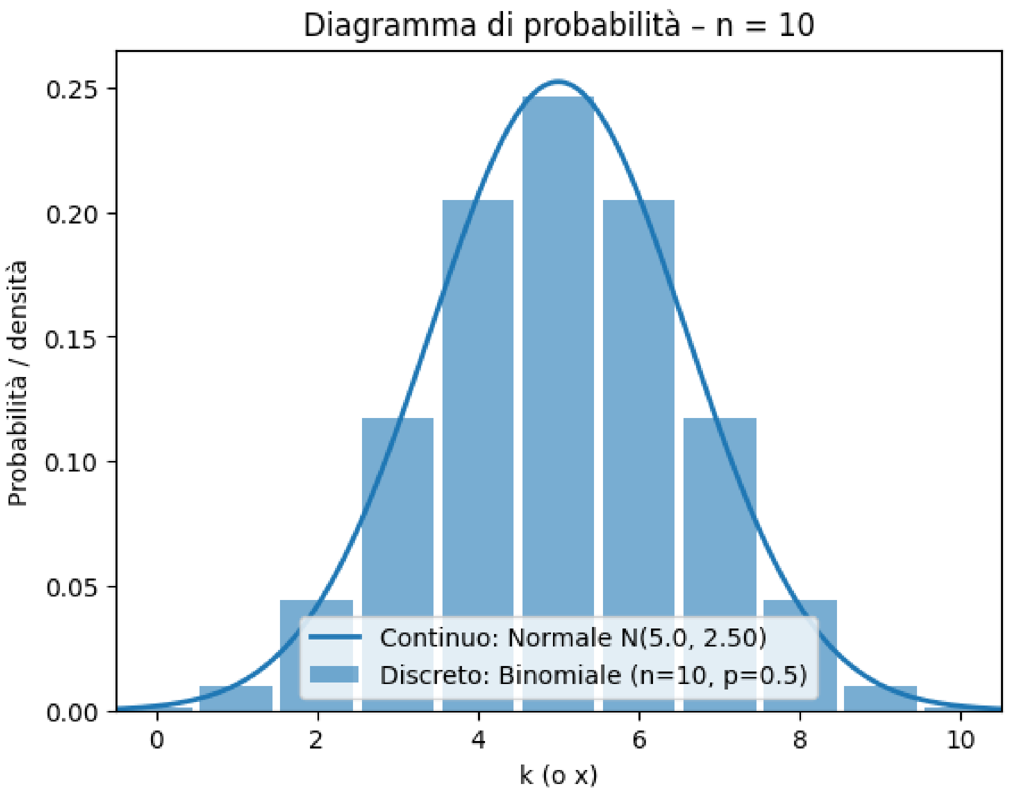
Somma $= 2^{10} = 1024$ .Quindi le probabilità sono:

$$1/1024 \approx 0{,}0010$$
$$10/1024 \approx 0{,}0098$$
$$45/1024 \approx 0{,}0439$$
$$120/1024 \approx 0{,}1172$$
$$210/1024 \approx 0{,}2051$$
$$252/1024 \approx 0{,}2461$$

poi torna simmetrico: $0{,}2051,\ 0{,}1172,\ 0{,}0439,\ 0{,}0098,\ 0{,}0010$

👉 Il grafico è quindi una "campana" discreta con picco a $k = 5$.

Fibonacci e il triangolo di Tartaglia



Cosa stai vedendo

Barre: distribuzione **discreta binomiale**

$$P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}}{2^{10}}$$

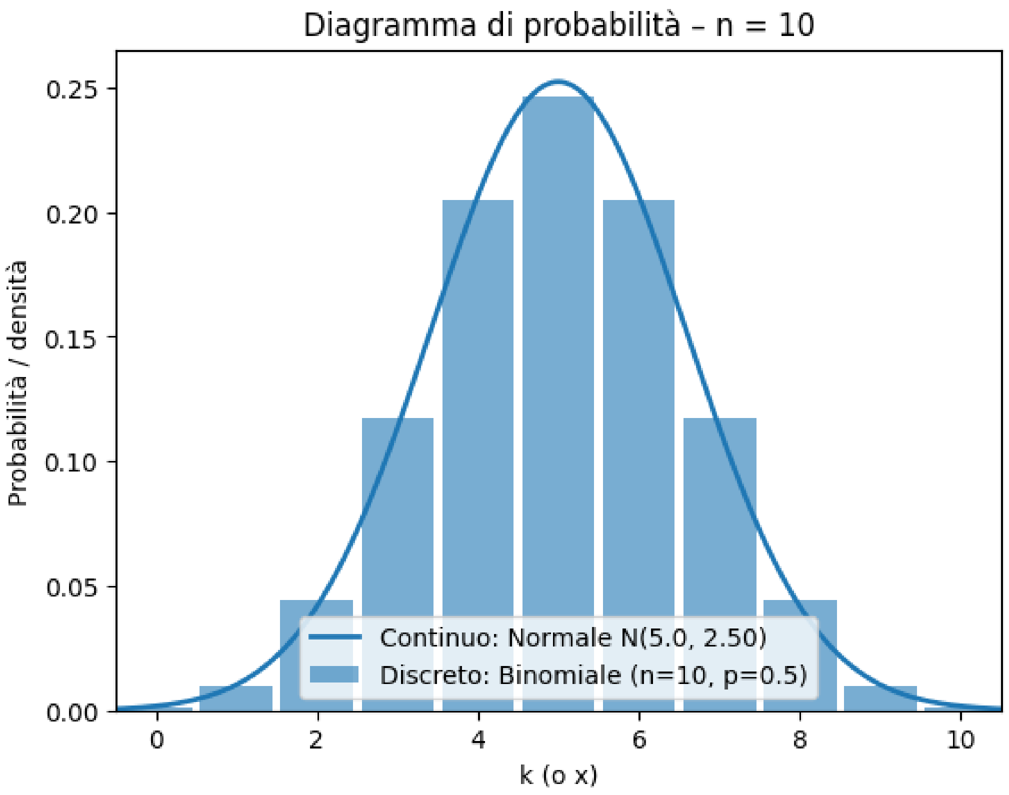
Curva: **Normale continua** di approssimazione

$$\mathcal{N}(\mu = 5,\ \sigma^2 = 2.5)$$

La media $\mu = np = 5$
La varianza $\sigma^2 = np(1-p) = 2.5$
con densità

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Fibonacci e il triangolo di Tartaglia



Quando normalizzi una riga del triangolo di Pascal ottieni una **binomiale**.
Quando $n$cresce, la binomiale converge a una **Normale**:

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Questo è il **Teorema Centrale del Limite**.

Fibonacci e il triangolo di Tartaglia

I numeri di Fibonacci **non sono singoli coefficienti**, ma **somme lungo diagonali oblique**:

$$F_n = \sum_j \binom{n-j}{j}$$

Quindi Fibonacci prende:
gli stessi mattoni della binomiale
ma li **somma lungo una direzione inclinata**

👉 Fibonacci è una **proiezione obliqua** della distribuzione binomiale.

Prendi una binomiale normalizzata:

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

I numeri di Fibonacci non sono singoli coefficienti, ma somme lungo diagonali oblique:

$$P_F(n) = \sum_j \frac{\binom{n-j}{j}}{2^n}$$

Questa non è più una probabilità “puntuale”, ma una **probabilità cumulata su una fascia inclinata** del piano (n, k).

Fibonacci e il triangolo di Tartaglia

Passaggio al continuo

Quando nè grande:
la binomiale → Normale
la somma discreta → **integrale**

La somma di Fibonacci diventa quindi:

$$F_n \approx 2^n \int_{retta\ inclinata} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

👉 **Fibonacci corrisponde all'integrale della Normale lungo una direzione obliqua**.

Conseguenza sorprendente (asintotica)

Si sa che:

$$F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$$

con $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Con la matematica, si può scoprire un nuovo mondo così come Pirandello fa appunto dire a un artista: "Ti sarà avvenuto qualche volta – non sai come – non sai perché – di vedere all'improvviso la vita, le cose, con occhi nuovi … - palpita tutto, a fiati di luce – e tu, sollevata in quel momento e con l'anima tutta spalancata in un senso di straordinario stupore, … - Io vivo così! In questo stupore! E non voglio sapere mai nulla …" Con la matematica si può scoprire un nuovo mondo così, svincolandosi dall'abitudine, ma si può anche all'opposto scoprirlo tuffandosi nel vecchio mondo dell'abitudine per scandagliarlo; si può giungere al miracolo non «cercando di non sapere mai nulla» ma accorgendosi di non sapere nulla per l'insoddisfazione di non sapere mai abbastanza.

Bruno de Finetti, Filosofia della probabilità, Milano, Il Saggiatore, 1995, p. 32.

"Anche la preoccupazione del rigore cambia aspetto: occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza, il che è altra cosa, né necessaria (dove non si tratta che di passaggi materiali non vedo perché ogni principiante dovrebbe accertarsi da sé che non vi sia una svista sfuggita a tutti prima di lui), né sufficiente (perché dopo aver imparato con quali manipolazioni si ricava una formula da un'altra non è detto che si sia penetrato il contenuto di ragionamento dei passaggi eseguiti). Per lo stesso motivo l'importanza delle formule e dei calcoli risulta in tale trattazione diminuita in confronto a quella data ai concetti e alle immagini, perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella di capire

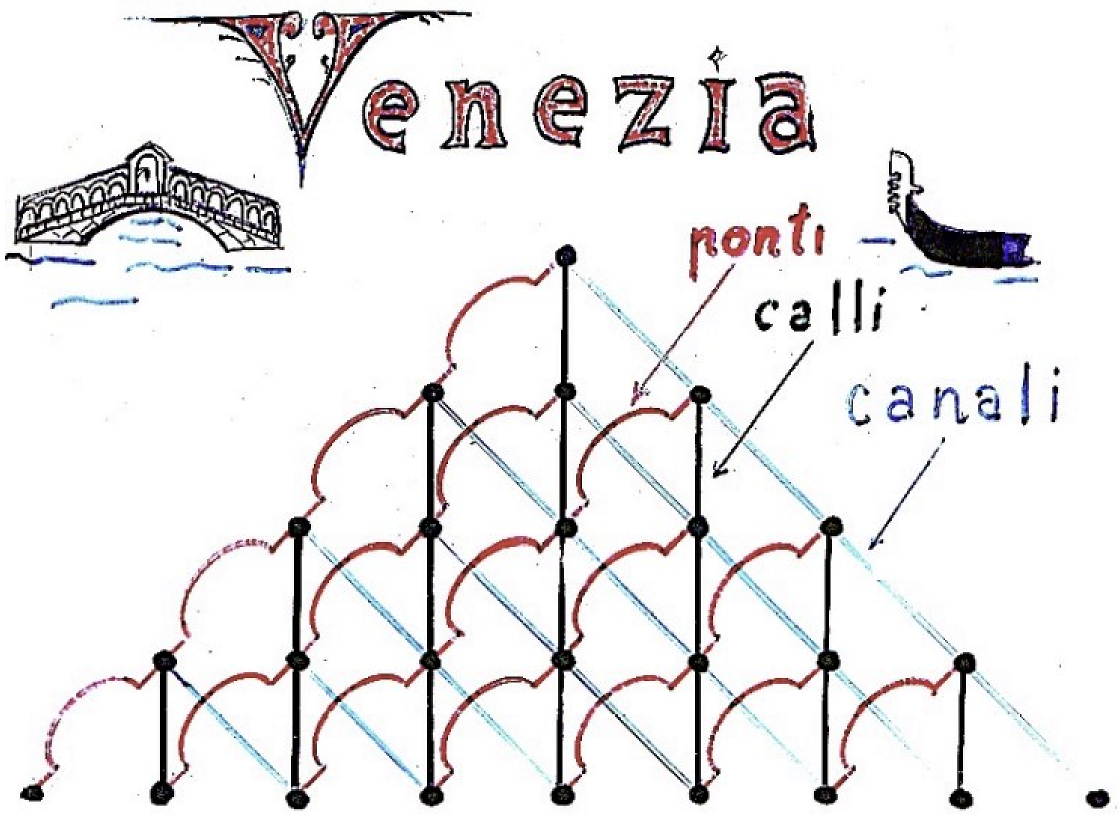
Bruno de Finetti, 1959, Matematica logico intuitiva, Cremonese, p.XIII

" Chi segue una catena di sillogismi o passaggetti può venir condotto (come usava dire Federico Enriques) ad ammettere obtorto collo una verità senza vederne il perché. Ma proprio vederne il perché è invece, a mio avviso l'essenziale …

Bruno de Finetti, 1970, Teoria delle Probabilità, Einaudi, p. 584

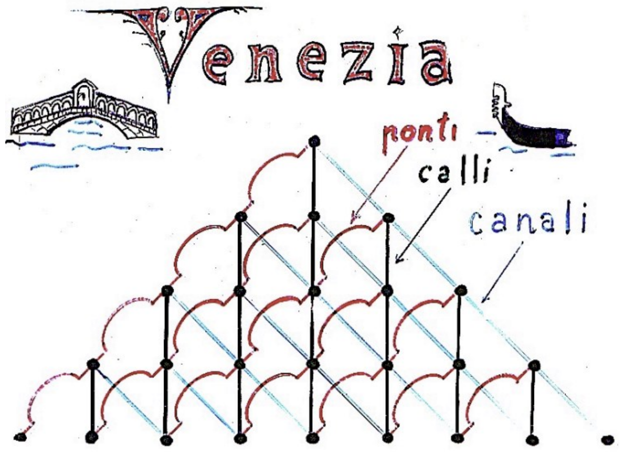
"… così la generalità degli intendimenti e la concretezza delle immagini concorrono allo scopo di persuadere che la matematica non è un meccanismo a sé da sostituire al ragionamento, ma è la ragionevole base e prosecuzione dell'ordinario ragionamento

Bruno de Finetti, 1959, Matematica Logico Intuitiva, Cremonese, p.XII



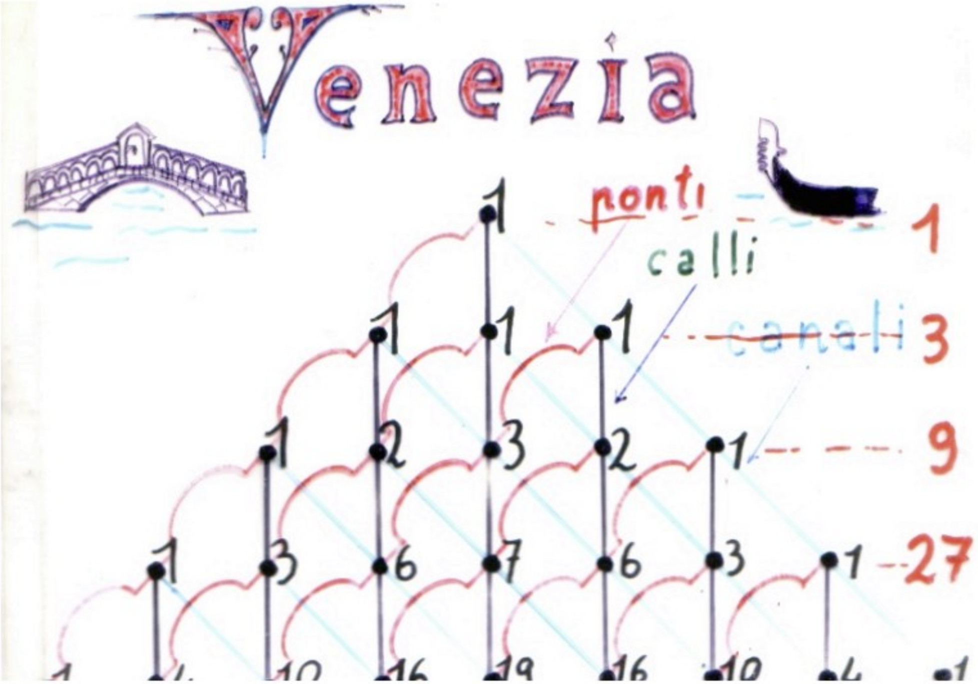
Siamo a Venezia. Invece dei bivi della città triangolare reticolata, ora, partendo dall’origine e da ogni nodo, ci sono 3 possibilità di procedere verso il basso. Queste sono indicate dalle frecce riportate sotto il disegno per rappresentare: un tratto di canale, diretto in basso a destra che, quando raggiunge i punti interni passa sotto i ponti, una “calle” che si dirige verso il basso e, infine, un ponte che è diretto in basso a sinistra e che passa sopra un canale quando questo s’interpone fra due nodi da congiungere. Il problema è analogo al precedente: anche adesso gli studenti devono determinare quanti sono i modi per raggiungere tutti i nodi partendo dall’origine

Reazioni degli studenti

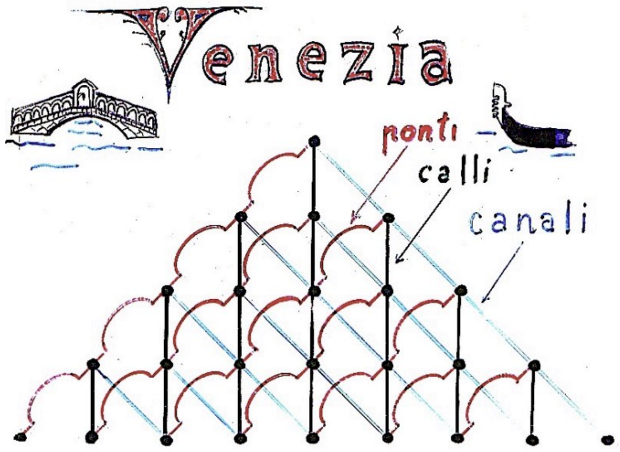


In questo caso si presenta una differenza più netta nel comportamento degli studenti, rispetto alla situazione precedente:

- alcuni dopo qualche tentativo, riescono facilmente a generalizzare quanto hanno capito risolvendo lo stesso problema presentato nella "città quadrettata": ora il numero dei percorsi che collega l'origine con un nodo che può essere raggiunto provenendo dai tre nodi immediatamente sovrastanti è la somma del numero dei percorsi che portano a questi tre nodi.



Reazioni degli studenti



L'algoritmo che prima determinava ogni coefficiente binomiale attraverso la somma di due numeri, ora addizionandone tre di questi, determina:

T_3^2

0 0 1 1 1 0 0	somma 3
0 0 1 2 3 2 1 0 0	somma 9
0 0 1 3 6 7 6 3 1 0 0	somma 27
0 0 1 4 10 16 19 16 10 4 1 0 0	somma 81

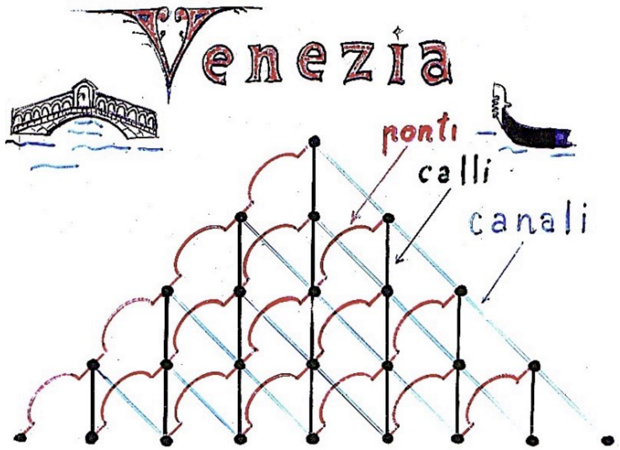
Altri studenti continuano a selezionare puntualmente ciascun percorso, e, quasi inevitabilmente, incorrono in qualche errore.
Un tempo minore rispetto al caso di T_2^2 e una maggiore omogeneità nel comportamento degli studenti, vengono riscontrati per dare una spiegazione del perché il totale dei numeri di ogni riga di T_3^2 risulta una potenza di tre.

Gli studenti arrivano a dire ad esempio: poiché ciascun percorso dà origine a tre percorsi, il totale di questi dopo un certo numero n di passi, risulta il triplo del totale relativo a n-1 passi, indicato nella riga precedente.

Analogamente girando quattro roulette divise ciascuna in tre settori circolari uguali corrispondenti rispettivamente ai numeri 0, 1, 2, le possibili somme di questi quattro numeri aleatori distribuiti uniformemente, sono 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e il totale dei modi per ottenerle è dato dai termini della quarta riga di T_3^2

Questi sono rispettivamente: 1, 4, 10, 16, 19, 16, 10, 4, 1.

Reazioni degli studenti



L'algoritmo che prima determinava ogni coefficiente binomiale attraverso la somma di due numeri, ora addizionandone tre di questi, determina:

T_3^2

0 0 1 1 1 0 0	somma 3
0 0 1 2 3 2 1 0 0	somma 9
0 0 1 3 6 7 6 3 1 0 0	somma 27
0 0 1 4 10 16 19 16 10 4 1 0 0	somma 81

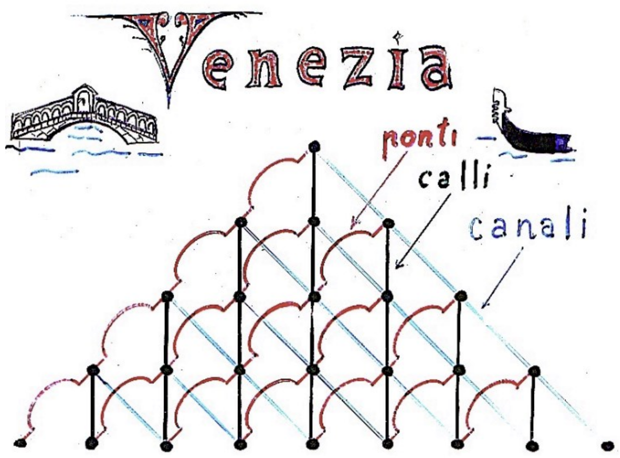
Non risulta molto difficile approfondire il significato di questa coincidenza: un percorso risulta la somma di n "passi aleatori" con tre possibilità equiprobabili, e allo stesso modo, si ripete, con le roulette vengono considerate le somme di quattro numeri aleatori che assumono i valori 0, 1, 2 con distribuzione uniforme.

Infine, cambiando ancora contesto, poiché, $x^i x^j x^h = x^{i+j+h}$
allora gli stessi coefficienti precedenti possono essere utilizzati per determinare:

$$(x^0 + x^1 + x^2)^4 = (x^0 + x^1 + x^2)^3(x^0 + x^1 + x^2) = (x^0 + 3x^1 + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6)\,(x^0 + x^1 + x^2) = x^0 + 4x^1 + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$$

infatti, anche in questo caso si tratta di addizionare i numeri degli esponenti per ottenere la stessa somma.
Così ad esempio il termine $19x^4$ si ottiene, moltiplicando $(x^0 + x^1 + x^2)^3\ con\ (x^0 + x^1 + x^2)$
Unicamente attraverso la somma dei tre prodotti: $6x^4x^0 + 7x^3x^1 + 6x^2x^2$.

Reazioni degli studenti



E nel caso particolare si può capire quanto avviene in ogni caso. Quindi, e soltanto per esercitarsi con espressioni più generali, si può dire che il coefficiente di x^k nello sviluppo di

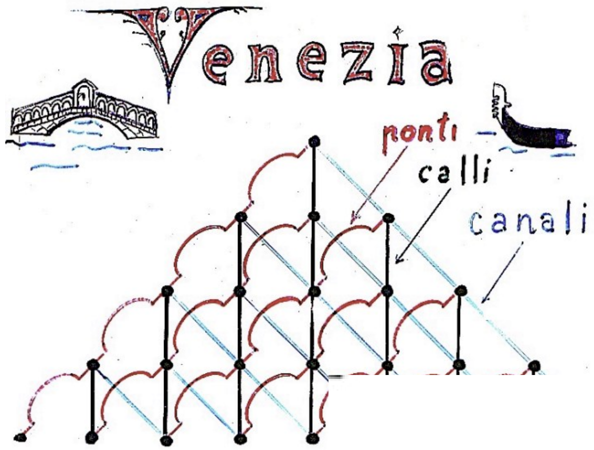
$$(x^0 + x^1 + x^2)^d = (x^0 + x^1 + x^2)^{d-1}(x^0 + x^1 + x^2)$$

si può determinare mediante la somma dei tre coefficienti di
$x^{k-0}, x^{k-1}, x^{k-2}$
presenti nello sviluppo di $(x^0 + x^1 + x^2)^{d-1}$ appunto perchè x^k può essere ottenuto soltanto moltiplicando queste tre potenze di x rispettivamente per x^0, x^1, x^2

"Si può ottenere somma 10 con tre dadi, se con i primi due si è ottenuta somma 3?"

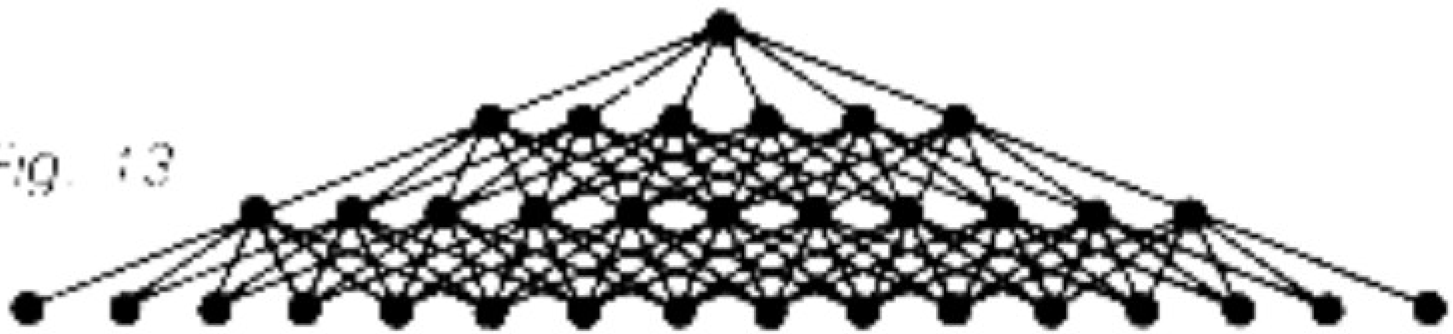
… può risultare somma 10 con tre dadi se e solo se si è ottenuto con due dadi 10-1, 10-2, 10-3, 10-4, 10-5, 10-6, e poi, con il terzo dado, rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6. Così il numero di modi per ottenere la prima somma con tre dadi, si potrà calcolare addizionando i numeri dei modi per ottenere le sei somme elencate facendo riferimento alla somma di due dadi.

Reazioni degli studenti



Collegando la città triangolare e Venezia con i dadi, il
modello per questi ultimi può essere costituito da una città ove ogni percorso si dirama in 6 tratti di strada come nella figura che segue:

Fig. 13



Esprimendosi in generale e considerando insieme i dadi e la zara, si ricava così che il numero delle possibilità per ottenere con d dadi, le cui f facce sono contrassegnate dai numeri 0, 1, 2,…e = f-1, (è preferibile considerare questi valori rispetto a: 1, 2, …, f in modo da ottenere sempre zero come somma minima), le somme s = 0, 1, … , ed è dato dall’s-simo numero della d-esima riga di un Triangolo aritmetico generalizzato

Consigli di lettura

E. CASTELNUOVO, Didattica della matematica, Firenze, La Nuova Italia, 1964, p. 208.

B. DE FINETTI, Filosofia della probabilità, Milano, Il Saggiatore, 1995, p. 330.

B. DE FINETTI, La logica dell'incerto, Milano, Mondatori, 1989, p. 296.

B. DE FINETTI, La matematica per le applicazioni economiche, Roma, ed. Cremonese, 1961, p. 481.

B. DE FINETTI, Un matematico e l'economia, Milano, F. Angeli, 1969, p. 337.

B. DE FINETTI, Probabilità e induzione, Bologna, Clueb, 1993, p. 524.

B. DE FINETTI, La funzione vivificatrice della matematica, Milano, F. Angeli, 1973, p. 33.

B. DE FINETTI, Il saper vedere in matematica, Torino, ed. Scolastica, 1975, p. 45.