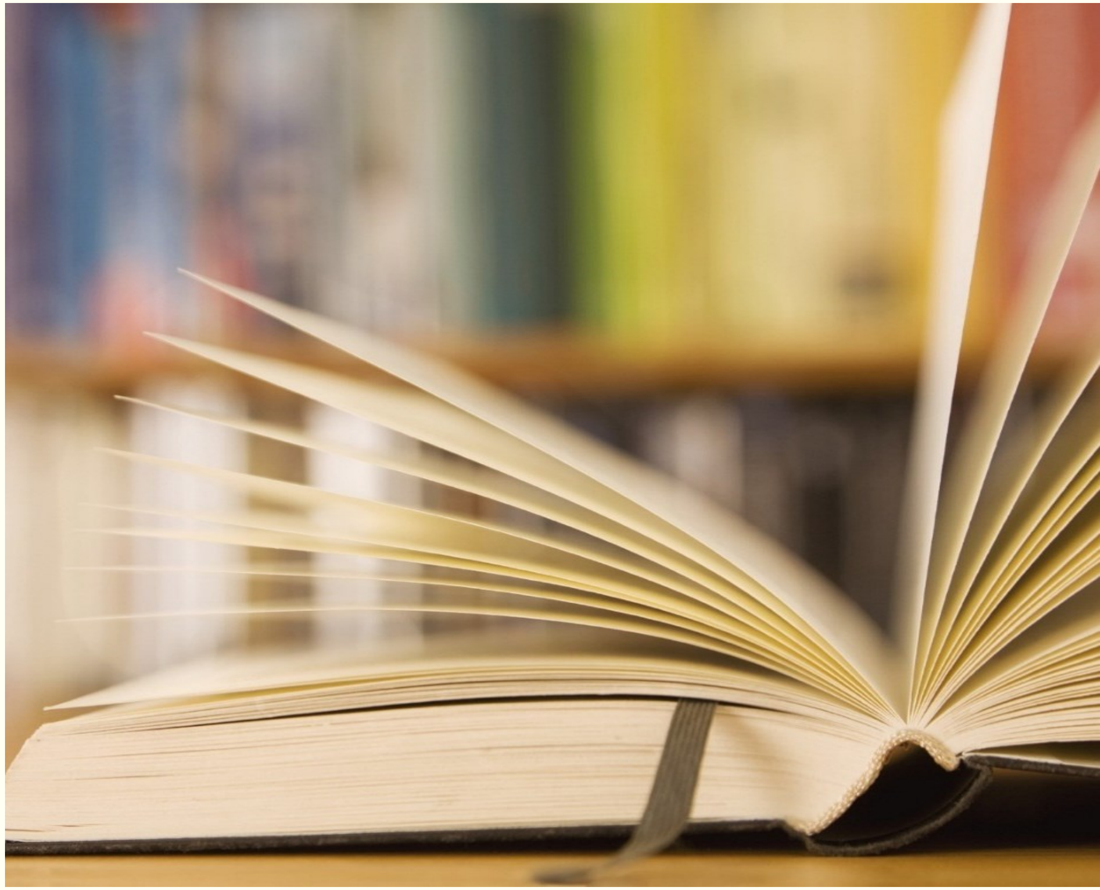
L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA: TAPPE STORICHE

Prof. Roberto Capone
Percorso PF60 - A.A. 2025/26
Fondamenti e Didattica laboratoriale della Geometria



Dalla geometria come “ginnastica del pensiero” alla geometria laboratoriale: Euclide, intuizione, dimostrazione, artefatti

Che cosa ha significato, nella scuola italiana, “**insegnare geometria**”:

- addestrare al rigore
- educare l’intuizione
- costruire conoscenza attraverso attività

Insegnamento della Geometria in Italia: Riforme Scolastiche, Programmi, Libri di Testo

Metodo Euclideo: "Ginnastica" del Pensiero

1859

Legge Casati

casati.pdf

1867

Leggge Coppino

Revisione ed integrazione dei programmi scolastici Introduzione della "Geometria Razionale"

1867

L. Cremona

"Elementi di Euclide" Un libro obbligatorio!

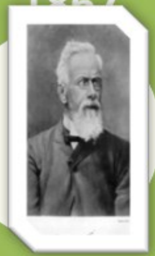
GLI

ELEMENTI D'EUCLIDE

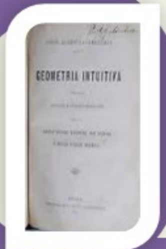
CON NOTE, AGGIUNTE ED ESERCIZI

AD USO DE' GINNASI E DE' LICEI

ENRICO BETTI E FRANCESCO BRIOSCHI.



1867



1881

Geometria Intuitiva

Introduzione alla geometria razionale al Ginnasio inferiore

1985

Settimio Cirillo

Geometria
Elementi di geometria piana e solida

"[...] If we wish to teach Geometry as educationally effective as possible, we Have only to follow in or own schools the example of the English and reintroduce Euclid's Elements, which are unversally acknowledged to be the most perfect model of regorous reasoning.

From Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867–1923): Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Italy
September 2006, Paedagogica Historica 42(4-5):587-613, Livia Giacardi

Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, 24-10-1867

La legge Casati

Una prima riforma scolastica è la Legge Casati, nella quale l'istruzione primaria, rivolta alla fascia dai 6 ai 9 anni, era suddivisa rispettivamente in ciclo inferiore e ciclo superiore.

In questa legge l'istruzione secondaria fu introdotta per la prima volta, suddivisa in istruzione classica, dai 10 ai 17 anni, e istruzione secondaria tecnica, dai 10 ai 14 anni.

L'istruzione classica era suddivisa in ginnasio, dai 10 ai 14 anni, e liceo, mentre l'istruzione tecnica era organizzata in scuole tecniche e istituti tecnici.

I "primi elementi della geometria" e il "disegno lineare" venivano introdotti come materie specifiche per i soli maschi nel biennio superiore (3° e 4° anno) della scuola elementare,

La legge Coppino

Il metodo di insegnamento scientifico, in particolare la matematica e la geometria, ha subito un'evoluzione. Le istruzioni del 1867, che hanno seguito la legge Casati, proponevano un ritorno agli "elementi di Euclide" per garantire rigore geometrico nella scuola secondaria.

Abolizione della geometria intuitiva: Nel 1884, il ministro Coppino abolì lo studio della "geometria intuitiva" nel ginnasio inferiore. Questa scelta fu fortemente influenzata dal matematico Eugenio Beltrami

Anticipazione della geometria razionale: La geometria razionale (basata sul rigore logico e deduttivo) fu anticipata al 4° anno di ginnasio.

L'insegnamento della geometria doveva "creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio", privilegiando la geometria pura rispetto alla trasformazione dei teoremi in formule algebriche.

La legge Coppino

Nei programmi scolastici, pubblicati nel Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, 24-10-1867, n. 291, p. 4, il 24 ottobre 1867, fu specificato che gli Elementi di Euclide dovevano essere reintrodotti:

> *L'insegnamento della geometria comprende i primi sei libri, l'undicesimo e il dodicesimo degli Elementi di Euclide, ai quali seguiranno le proposizioni più essenziali di Archimede sulla misura del cerchio, del cilindro, del cono e della sfera. La geometria, insegnata con il metodo degli antichi, è più facile e più attraente della scienza astratta dei numeri: cosicché, invece di posticiparla all'algebra, una parte di essa (il Libro I di Euclide) fu assegnata alla quinta classe del ginnasio, e una anche alla prima classe del liceo (Libri II e III di Euclide). Si raccomanda all'insegnante di attenersi al metodo euclideo, perché questo è quello che crea nelle giovani menti l'abitudine a un rigore inflessibile nel ragionamento.*

Enrico Betti e Francesco Brioschi

Se, come scrisse Pascal nei suoi *Pensieri*, « la Géométrie seule sait les véritables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer; s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, *que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle,*[1] » egli è indubitato che coloro i quali per debito d'ufficio sono chiamati a dirigere l'educazione nazionale, come quelli a cui essa è affidata o ne fruiscono, hanno stretto obbligo di curare che l'insegnamento della geometria nella istruzione media raggiunga quell'alto fine che da Pascal con tanta efficacia era espresso.

Prefazione di "Gli Elementi di Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei a cura di Enrico Betti e Francesco Brioschi

Seguendo strettamente le indicazioni ministeriali, Enrico Betti e Francesco Brioschi realizzarono una nuova traduzione degli Elementi di Euclide (Betti & Brioschi, 1868), per la geometria del ginnasio e del liceo, che divenne il più famoso manuale italiano di geometria di quel periodo. Si tratta di una semplice traduzione degli Elementi di Euclide, con l'aggiunta di alcuni teoremi, come specificato nei programmi.

Il dibattito metodologico sull'insegnamento della geometria appare nelle introduzioni dei manuali di geometria.

Enrico Betti e Francesco Brioschi

Se, come scrisse Pascal nei suoi *Pensieri*, « la Géométrie seule sait les véritables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer; s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, *que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle*,[1] » egli è indubitato che coloro i quali per debito d'ufficio sono chiamati a dirigere l'educazione nazionale, come quelli a cui essa è affidata o ne fruiscono, hanno stretto obbligo di curare che l'insegnamento della geometria nella istruzione media raggiunga quell'alto fine che da Pascal con tanta efficacia era espresso.

Nel manuale di Betti e Brioschi, ad esempio, viene sottolineata la responsabilità contestuale degli insegnanti e del Ministero per un insegnamento efficace della geometria, al fine di soddisfare le idee di Pascal:

Solo la geometria conosce le vere regole del ragionamento e, senza considerare le regole dei sillogismi, così naturali da non poter essere ignorate, essa si fonda sul vero metodo di condurre il ragionamento in tutte le cose, metodo che quasi tutti ignorano e che è così vantaggioso conoscere, come vediamo per esperienza: a parità d'ingegno e di ogni altra cosa, chi possiede la geometria vince e acquista un nuovo maestro. (Betti & Brioschi, 1868, p. 3)

Enriques e Amaldi

Enriques e Amaldi, tuttavia, misero in evidenza la necessità di un sistema razionale nell'insegnamento della geometria:

Un manuale elementare deve soddisfare due ordini di bisogni: quello scientifico e quello didattico. Un'idea errata del rigore scientifico porta alcuni matematici a credere che l'ideale della scienza geometrica consista in una sistematica esclusione dell'intuizione. Secondo questa premessa, si arriverebbe a una trattazione astrusa degli elementi, inaccessibile al principiante e inconciliabile con lo scopo educativo della geometria. La geometria è una scienza di osservazione e di ragionamento. Essa deve educare i giovani a entrambe queste facoltà. Il rigore scientifico, come lo intendiamo noi, ha un valore formativo perché abitua gli studenti a distinguere tra l'attività di una facoltà e quella dell'altra. (Enriques & Amaldi, 1903, p. 5)

Enriques e Amaldi

Coerentemente con queste idee, nel 1903 essi pubblicarono un manuale di geometria, Elementi di Geometria, usato nella maggior parte delle scuole secondarie e pubblicato ancora oggi. Nella prefazione, gli autori scrissero che in esso la geometria razionale era pienamente descritta. Nel manuale di Enriques e Amaldi (1903), l'argomento è affrontato attraverso il sistema razionale-induttivo, nel tentativo di superare il difetto tipico dell'esposizione euclidea.

https://books.google.it/books?id=mojqXKcuBpkC&printsec=frontcover&hl=it&source=gbs_atb#v=onepage&q&f=false

Alasia

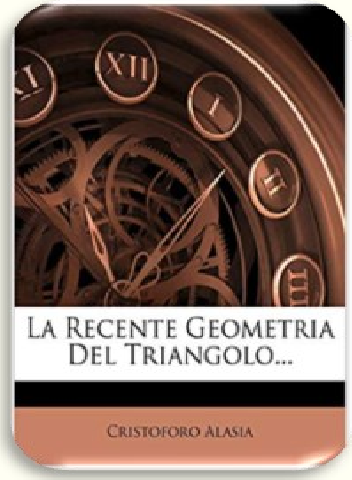
Inoltre, Alasia sottolineò, in La recente geometria del triangolo, che lo stesso sistema doveva essere usato anche per dimostrare i nuovi teoremi:

> *La geometria pura è spesso fonte di difficoltà nei giovani. Soprattutto, è necessario mettere nelle loro mani l'occasione perché essi stessi trovino nuovi teoremi, invece di invitarli a ripetere quelli che già esistono.* (Alasia, 1900, p. 7)

Geometria: Come insegnarla? Cosa insegnare?

"Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva matematico milanese del secolo XVII" Rivista ginnasiale e delle Scuole tecniche e erali, t. VI (1859), pp. 191-206.

Cremona intervenne nella riforma dei programmi sostenendo l'uso del solo testo degli Elementi di Euclide. Egli ebbe però anche un ruolo cruciale nella "Nuova geometria del triangolo", riscoprendo in Italia un teorema storico che era stato quasi dimenticato: il teorema di Ceva. Ne scrisse nel suo manoscritto Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva Matematico Milanese del secolo XVII, 1859 (Cremona, 1859).



Triangoli Ceviani, Ortici...

- **Metodo Ipotetico Deduttivo (Euclide)**
- Approccio Intuitivo con applicazioni pratiche/reali

Geometria: Come insegnarla? Cosa insegnare?

Il terzo snodo è Enriques-Amaldi: qui la contrapposizione tra intuizione e rigore si supera in modo più moderno. La geometria viene presentata come scienza di osservazione e ragionamento: non pura deduzione astratta, ma nemmeno semplice percezione visiva. Questo è perfetto per un corso su fondamenti e didattica laboratoriale, perché permette di dire che il laboratorio non è “fare lavoretti”, ma costruire situazioni in cui osservazione, congettura, argomentazione e dimostrazione si tengono insieme

- Metodo Ipotetico Deduttivo (Euclide)
- Approccio Intuitivo con applicazioni pratiche/reali

Geometria: Come insegnarla? Cosa insegnare?

PREFAZIONE

Nel 1873 Emilio Lemoine presentava al "Congresso di Lione dell'Associazione francese pel progresso delle Scienze„ una memoria "**Sur quelques propriétés d'un point remarcable du triangle**„ a cui era stato condotto dalla discussione di un problema che trovasi risolto nei "Théorémes et problemes de Géométrie élémentaire„ di Ch. Lafremoire,

Mi sia ora permesso dire qualche parola del *perchè* del presente libro. L'importanza che ormai ha acquistata la *Recente Geometria del triangolo* è indiscutibile. Essa si manifesta tanto coi progressi maravigliosi fatti in pochi anni che coi nomi degli insigni matematici che ad essa hanno consacrato preziose memorie ed incessanti ricerche. Ogni anno nuove pubblicazioni vengono ad arricchire la sua bibliografia. Ma esse trovansi disseminate nei periodici o nei rendiconti di Accademie di diverse nazioni, per cui i professori, i cultori delle Matematiche che hanno il dovere di mantenersi all'altezza del suo sviluppo, sono obbligati a lunghe ricerche, a perdite di tempo spesso eccessive. Il presente libro ha appunto il modesto scopo di rimediare in parte a tale inconveniente.

Ed infatti il fare della Geometria pura è spesso nei giovani fonte di difficoltà. È sopratutto necessario mettere fra le mani di essi il mezzo di trovare da loro stessi nuovi teoremi anzichè invitarli a ripetere quelli che di già esistono, e questo mezzo è incontestabilmente l'equazione.

Luigi Cremona

Nel 1853 ottenne, con lode, il titolo di "dottore negli studi di ingegnere civile e architetto" e subito dopo si impegnò nella stessa Università come ripetitore di matematica applicata fino al 1856 quando, con l'intenzione di dedicarsi all'insegnamento secondario, diede gli esami di matematica e fisica che erano necessari e fu nominato professore supplente al Ginnasio di Pavia.

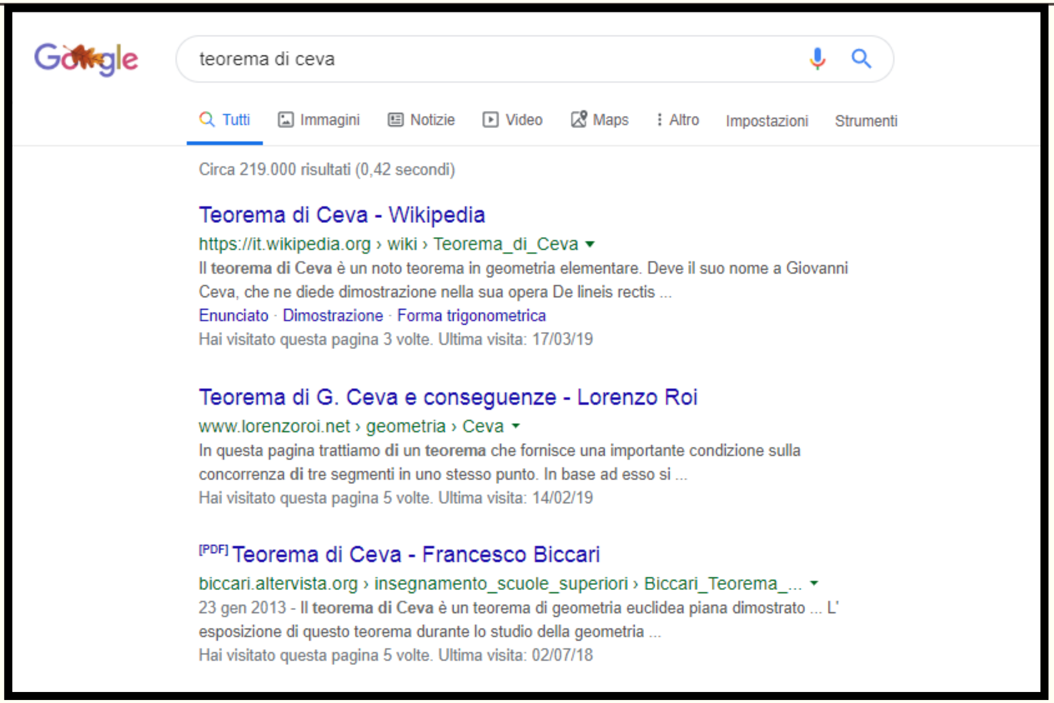
Due anni più tardi fu trasferito a Cremona dove ottenne un posto di professore ordinario nel Ginnasio e dove tenne corsi che spaziavano dall'aritmetica all'algebra, dalla geometria del piano e geometria dello spazio alla trigonometria ed era apprezzato, come insegnante, per la sua chiarezza, il suo rigore e l'efficacia del suo metodo didattico.

Cremona: da un lato sostiene Euclide come modello didattico, dall'altro recupera Ceva e quindi apre, quasi paradossalmente, alla possibilità di una geometria scolastica non ridotta ai soli contenuti euclidei.

Questo è un punto molto potente per futuri docenti:

la tradizione non è immobilità; può essere anche riscoperta, scelta, riorganizzazione didattica.

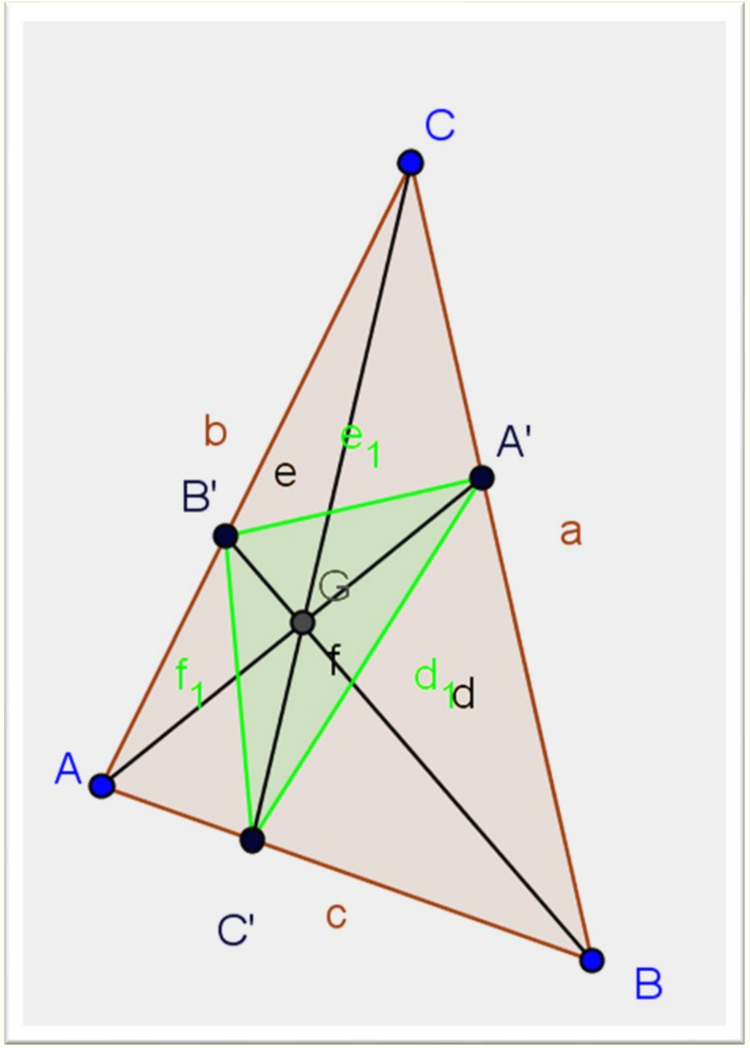
Il teorema di Ceva



Giovanni Ceva
(1647-1734)

- ✓ *Forum di Matematica*
- ✓ *Blogs*
- ✓ *Wiki*
- ✓ *Youtube*
- ✓ *Università*

Il teorema di Ceva

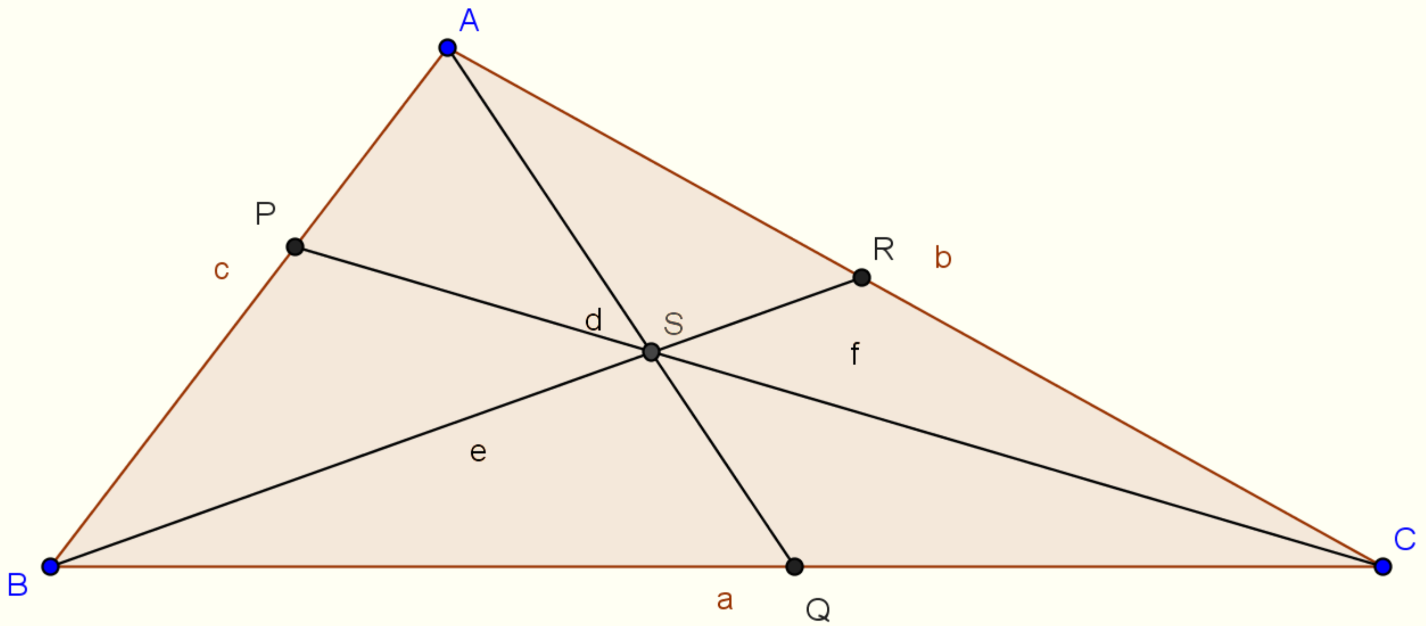


- Ceviano = Segmento che congiunge un vertice di un triangolo con un punto sul lato opposto.
- Punto Ceviano = Punto d’incontro di 3 ceviani
- A’B’C’ = Triangolo Ceviano

Il teorema di Ceva

In un triangolo ABC, tre segmenti ceviani AQ, BR e CP sono concorrenti se e solo se:

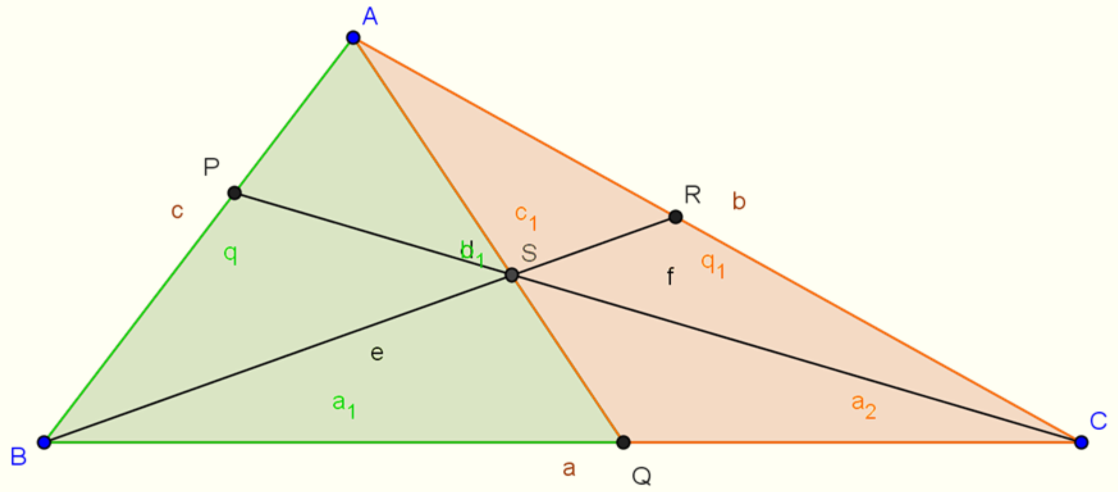
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$



Il teorema di Ceva

DIM

OSS.1: Dati due triangoli con altezze congruenti, le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi [Banalmente: $A_1=B_1H/2$, $A_2=B_2H/2$, da cui sostituendo $H=2A_2/B_2$ si ha $A_1/A_2=B_1/B_2$]



$$\frac{BQ}{QC}=\frac{A(ABQ)}{A(AQC)}$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{A(SBQ)}{A(SQC)}$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{A(ABQ)}{A(AQC)}=\frac{A(SBQ)}{A(SQC)}=\frac{A(ABQ)-A(SBQ)}{A(AQC)-A(SQC)}=\frac{A(ABS)}{A(ASC)}$$

Il teorema di Ceva

Analogamente

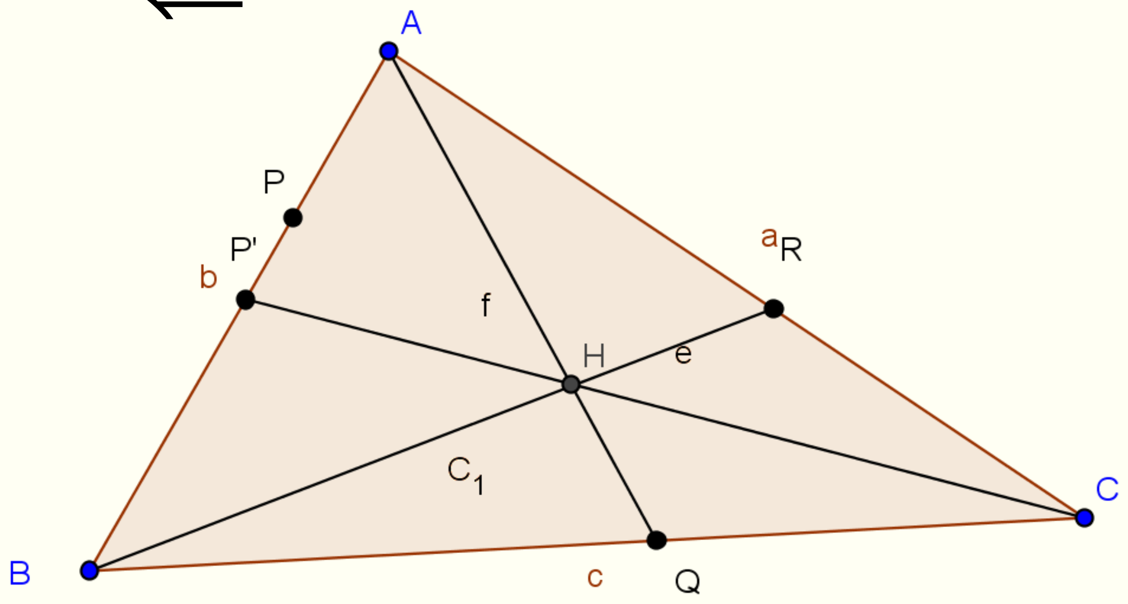
$$\frac{CR}{RA}=\frac{A(CBR)}{A(ABR)}=\frac{A(CSR)}{A(ASR)}=\frac{A(CBR)-A(CSR)}{A(ABR)-A(ASR)}=\frac{A(CBS)}{A(ABS)}$$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{A(APC)}{A(PBC)}=\frac{A(APS)}{A(PBS)}=\frac{A(APC)-A(APS)}{A(PBC)-A(PBS)}=\frac{A(ASC)}{A(CBS)}$$

$$\begin{cases}\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{A(ABS)}{A(ASC)}\\[2ex]\dfrac{CR}{RA}=\dfrac{A(CBS)}{A(ABS)}\\[2ex]\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{A(ASC)}{A(CBS)}\end{cases}\Rightarrow\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AP}{PB}=1$$

Il teorema di Ceva

DIM $\Leftarrow$



Hp: $\dfrac{AP}{PB} \cdot \dfrac{BQ}{QC} \cdot \dfrac{CR}{RA} = 1$

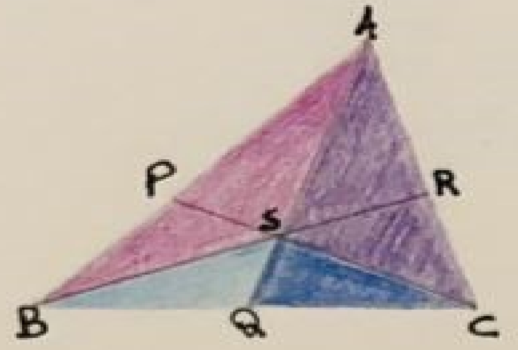
Th: AQ, CP, PR sono concorrenti in un punto

DIM

P.A. Siano AQ e BR concorrenti in un punto H, ma CP no, Esisterà un punto P'≠P, tale che CP' sia concorrente ad AQ e BR. Pertanto, per il teorema di Ceva diretto, varrà la relazione:

$\dfrac{AP'}{PB} \cdot \dfrac{BQ}{QC} \cdot \dfrac{CR}{RA} = 1$ Essendo per ipotesi $\dfrac{AP}{PB} \cdot \dfrac{BQ}{QC} \cdot \dfrac{CR}{RA} = 1 \Rightarrow P \equiv P'$

Il teorema di Ceva



Hp: $\overline{AQ}, \overline{BR}, \overline{CP}$ sono concorrenti.

Th: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1$

Consideriamo il lato $\overline{BC}$:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{|A\hat{B}Q|}{|A\hat{Q}C|} = \frac{|S\hat{B}Q|}{|S\hat{Q}C|} = \frac{|A\hat{B}Q| - |S\hat{B}Q|}{|A\hat{Q}C| - |S\hat{Q}C|} = \frac{|A\hat{B}S|}{|C\hat{A}S|}$$

Consideriamo il lato $\overline{CA}$:

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{|C\hat{B}R|}{|A\hat{B}R|} = \frac{|C\hat{S}R|}{|A\hat{S}R|} = \frac{|C\hat{B}R| - |C\hat{S}R|}{|A\hat{B}R| - |A\hat{S}R|} = \frac{|C\hat{B}S|}{|A\hat{B}S|}$$

Consideriamo il lato $\overline{AB}$:

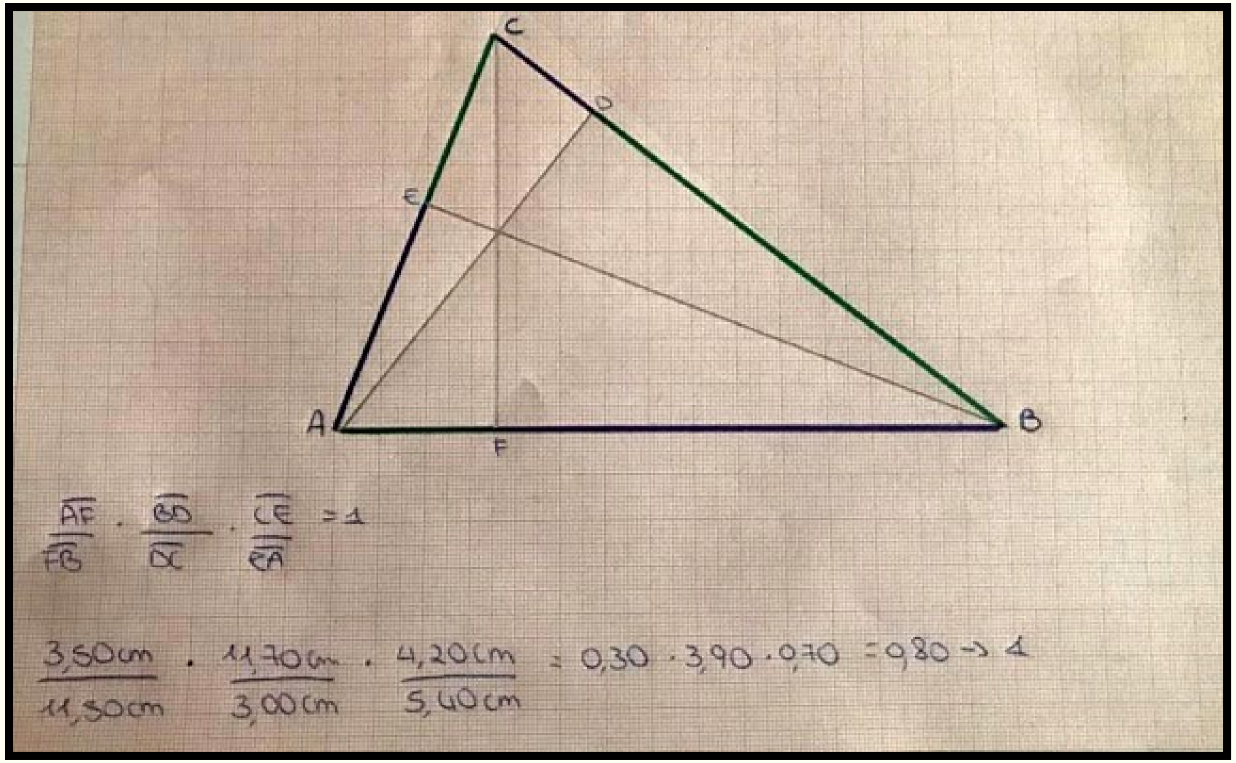
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{|A\hat{P}C|}{|P\hat{B}C|} = \frac{|A\hat{P}S|}{|P\hat{B}S|} = \frac{|A\hat{P}C| - |A\hat{P}S|}{|P\hat{B}C| - |P\hat{B}S|} = \frac{|C\hat{A}S|}{|B\hat{C}S|}$$

Moltiplicando i rapporti al 1° membro si ottiene:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{|A\hat{B}S|}{|C\hat{A}S|} \cdot \frac{|B\hat{C}S|}{|A\hat{B}S|} \cdot \frac{|C\hat{A}S|}{|B\hat{C}S|} = 1$$

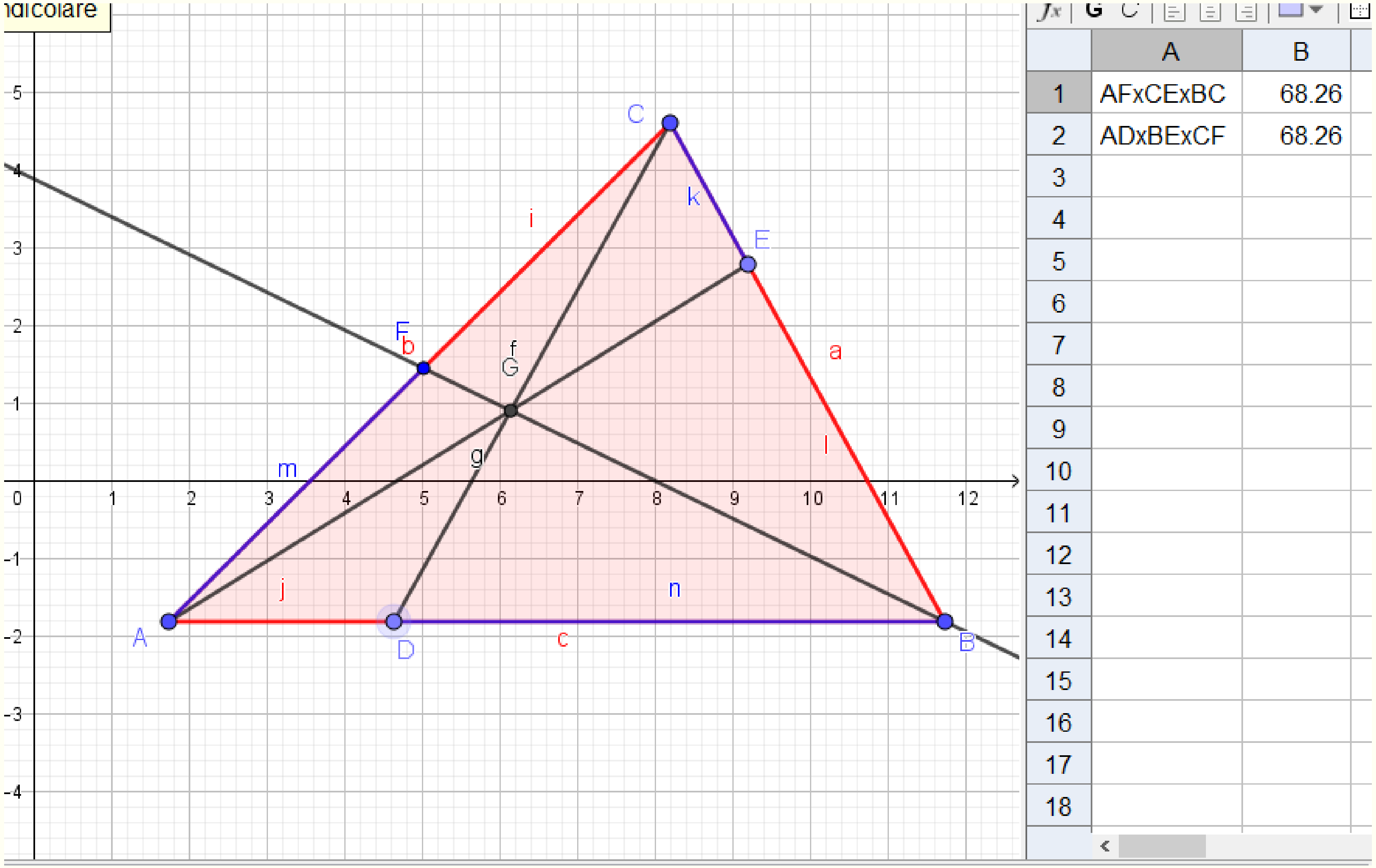
come volevasi dimostrare.

Verifica Geometrica… con riga e compasso



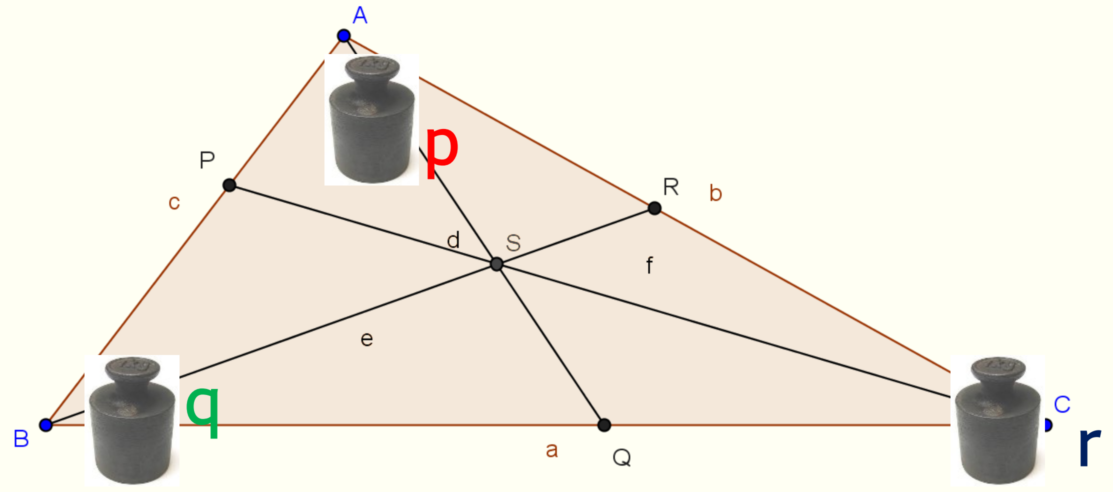
E’ sempre vero?

Il teorema di Ceva con Geogebra



TeoremaCEVAVErificaGEometrica.ggb

Formulazione di Ceva… dalla Statica



Hp ***Applicati ai vertici*** **A,B,C** ***i pesi*** **p,q,r** ***tali che*** $p{:}q = BP{:}PA$ ***e*** $p{:}r = CR{:}RA$

Th $q : r = CQ : QB$; $p : (q + r) = QS : SA$; $q : (p + r) = RS : SB$; $r : (p + q) = PS : SC$

DIM per ipotesi, P è il centro di gravità dei pesi p e q applicati rispettivamente in A e in B, e che R è il centro di gravità dei pesi p ed r applicati rispettivamente in A e in C, segue che il centro di gravità dei tre pesi, dovendo appartenere sia al segmento CP che a BR, coincide con S. Di conseguenza il centro di gravità dei pesi q ed r è l'intersezione del prolungamento del segmento AS con BC, ossia coincide con Q. Analogamente, si deduce che S è il centro di gravità dei pesi p e (q+r) applicati rispettivamente in A e in Q da cui la proporzione p : (q+r) = QS : SA , e così per le altre.

Il teorema di Ceva:il testo storico

PROP. II. PROB. II. ELEM. II.

Sit triangulum E A C, & ab angulis ipsius ducantur ad idem punctum F intra triangulum lineæ E F, A F, C F, quæ ex F productæ occurrant lateribus in punctis deinceps B K D; Institutum est, ex prædictis angulis E A C suspendere grauia I G H; ita vt pondus G ad I sit vt E D ad D A; idem G ad H, vt C B ad B A; H ad I, vt E K ad K C; pondus I ad duo G H, vt B F ad F E; pondus verò H ad duo I G, vt D F ad F C, & demum, vt vnicum G ad duo I H, ita K F ad F A.

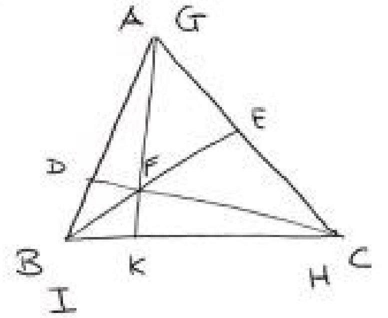
Fiat vt C B ad B A, ita pondus G ad H, & vt E D ad D A, ita idem pondus G ad I. *tab. 1. fig. 5.*

Quoniam igitur figura E D B A C F est illa primi elementi, estq; C B ad B A, vt G ad H, recta verò E D ad D A, vt G ad I; etiam D F ad F C, erit vt pondus H ad duo pondera I G; itemque B F ad F E, vt pondus I ad duo G H.

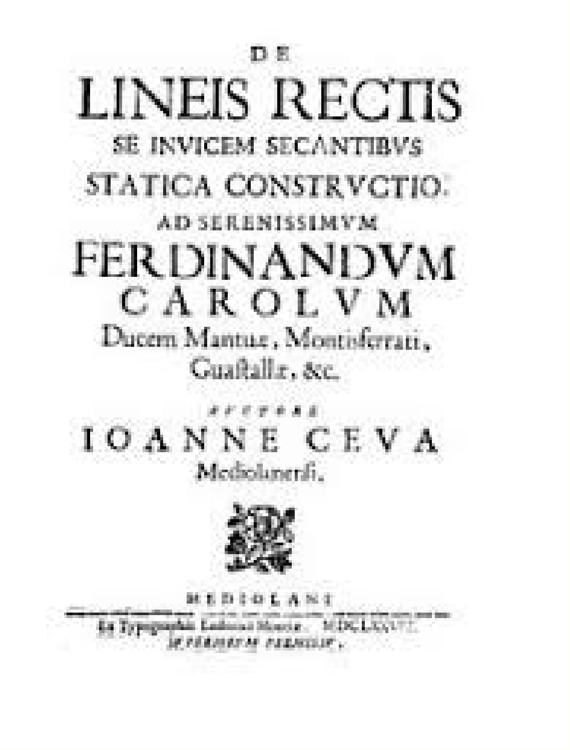
DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati, Guastallæ, &c.
AVCTORE
IOANNE CEVA
Mediolanensi.

MEDIOLANI

Il teorema di Ceva:il testo storico



Sia dato il triangolo EAC; dagli angoli di questo siano condotte verso lo stesso punto F interno al triangolo le linee EF, AF, CF, che, prolungate da F, incontrino i lati rispettivamente nei punti B, K e D. Si supponga che, dai predetti ~~[illegible]~~ angoli EAC, siano sospesi i pesi I, G e H; si che il peso di G sta al peso di I come ED sta a DA; allo stesso modo G sta ad H come CB sta a BA; H sta ad I come EK sta a KC; il peso I sta ai due pesi G ed H come BF sta ad FE; il peso H sta ai due pesi I e G, come DF sta ad FC, infine come il solo G sta ai due I ed H, come KF sta a FA.


DE

LINEIS RECTIS

SE INVICEM SECANTIBVS

STATICA CONSTRVCTIO.

AD SERENISSIMVM

FERDINANDVM

CAROLVM

Ducem Mantuae, Montisferrati, Guastallae, &c.

AVCTORE

IOANNE CEVA

Mediolanensi.

MEDIOLANI

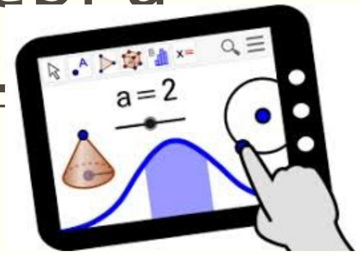
Approccio Intuitivo <-> Fisica Sperimentale

Aula

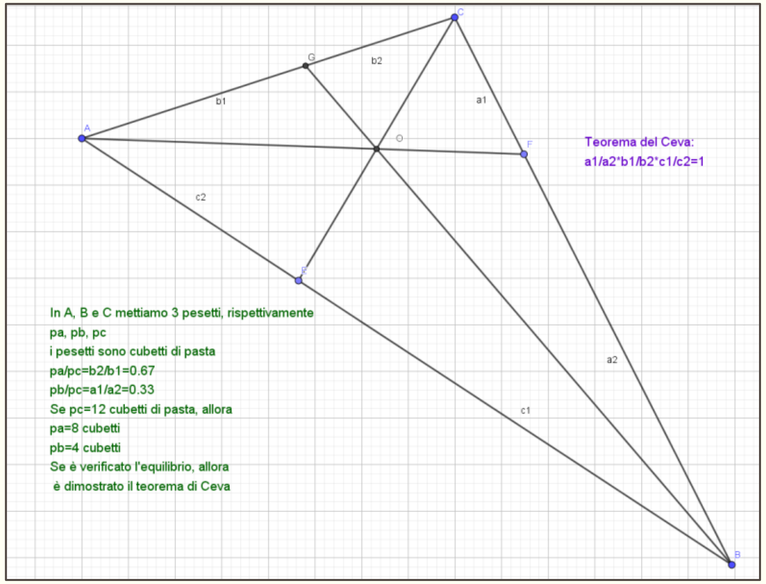
Spazio Laboratoriale

Cooperative Learning

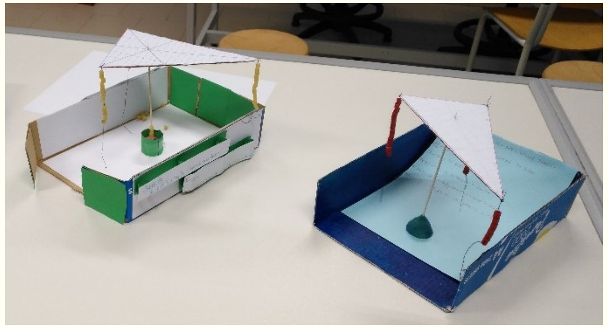
Triangolo “in equilibrio” con Geogebra



Il calcolo simbolico

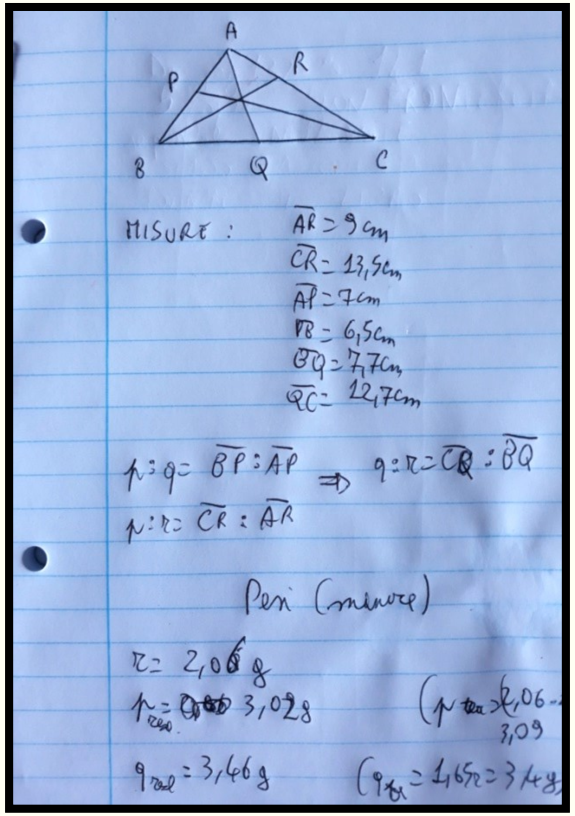


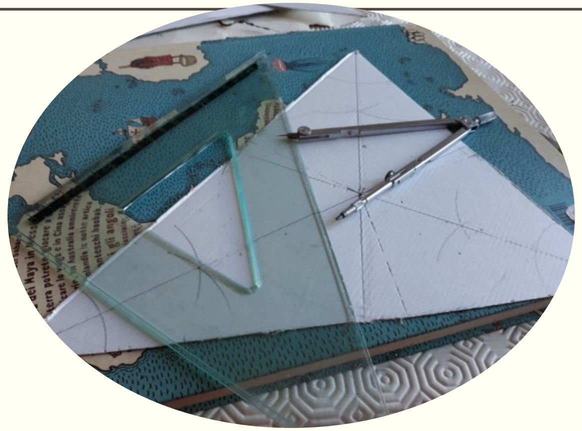
Costruzione e sperimentazione del modello

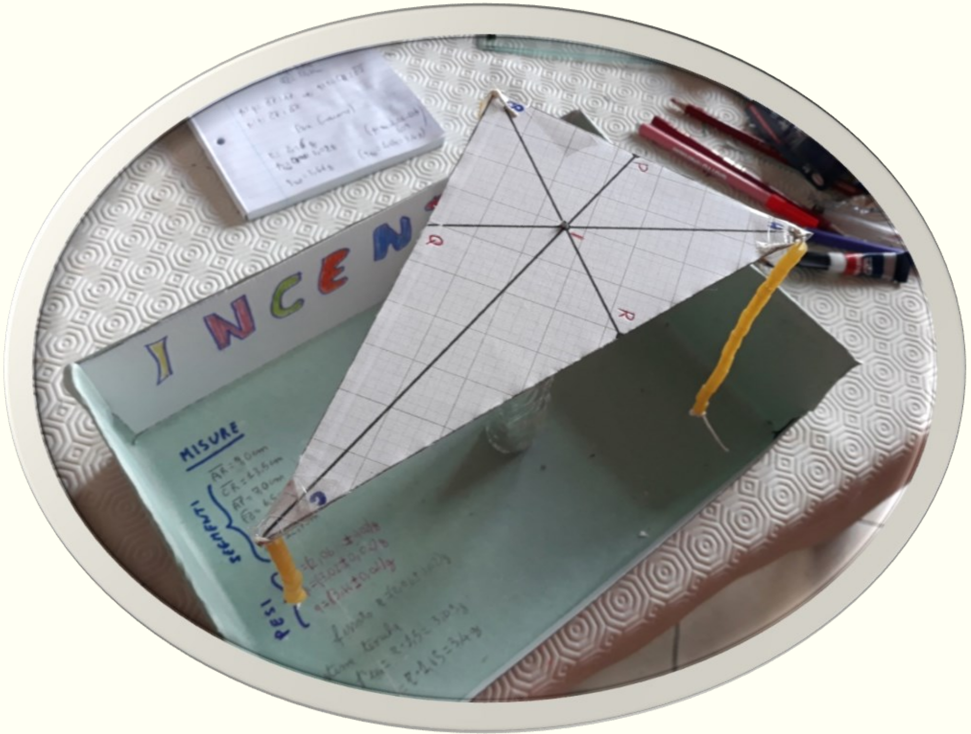


Unità di misura

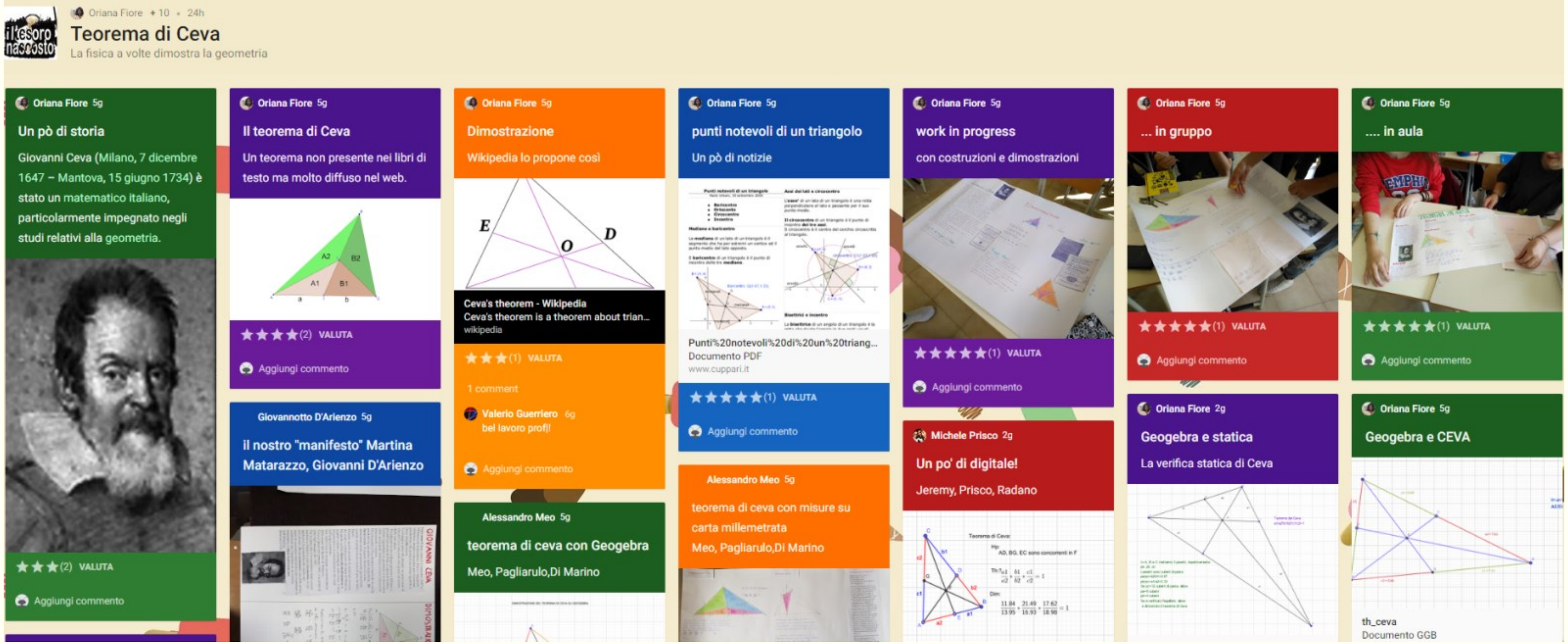
Triangolo “in equilibrio” nell’incentro







Documentazione: Software su Cloud Padlet



[Padlet]

… Ceva et Al.…

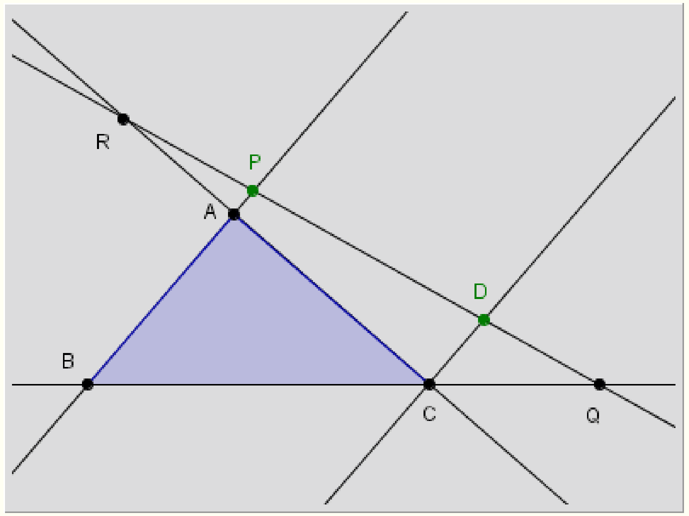
- **Il punti notevoli dei triangoli sono punti ceviani**
- Dal teorema di Ceva si possono ricavare le **proprietà del Baricentro**

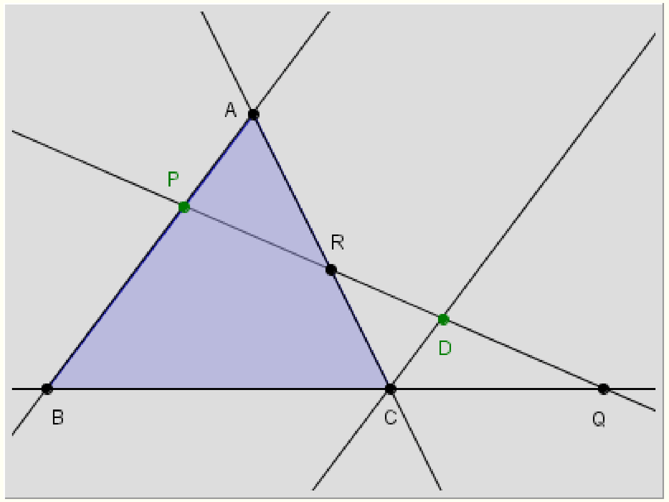
Gli “Scienziati” interessati al “teorema di CEVA”:

- Altri autori pervennero al medesimo teorema, come **Johan Bernoulli, Lazare Carnot, Gaspar Coriolis…**
- **Michel Chasles** (matematico francese, vissuto nel periodo più duro della rivoluzione francese, il cui nome compare tra i settantadue nomi di insigni cittadini francesi incisi sulla *Torre Eiffel*) per primo nel 1837 diede risalto al teorema di Ceva, nello studio della “**geometria proiettiva**”, nella sua opera: *“Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie “ ("Esposizione storica sull'origine e lo sviluppo dei metodi in geometria“)*

Teorema di Menelao

- I punti P, Q, R appartenenti rispettivamente ai lati (o ai loro prolungamenti) *AB*, *BC* e *CA* di un triangolo ABC sono collineari, se e solo se vale:





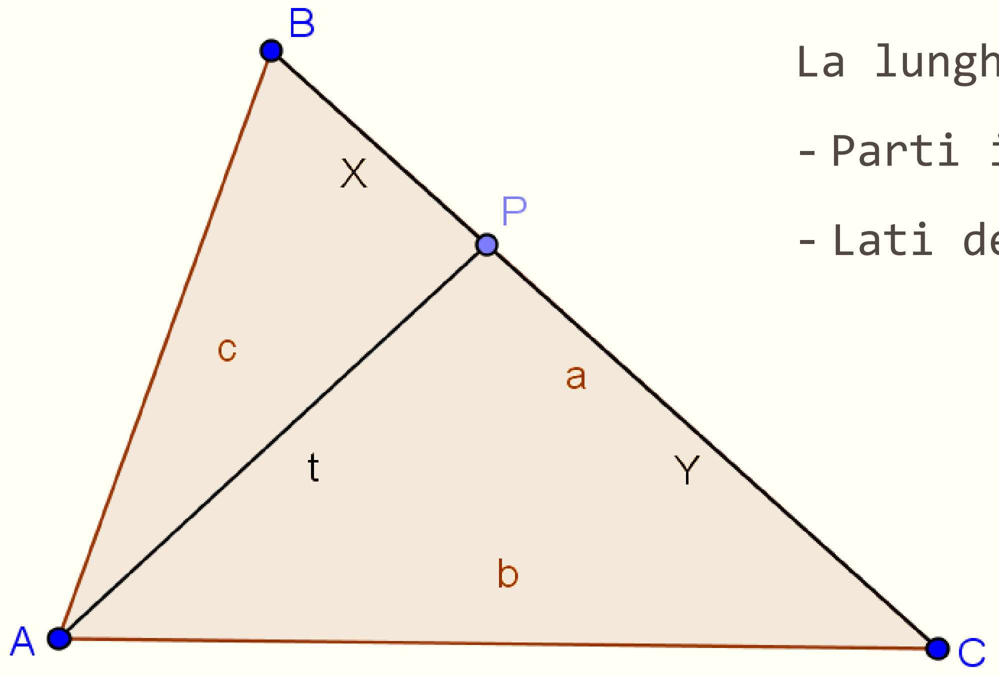
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

Teoremi “complementari”

Il teorema di Ceva fornisce un criterio per la concorrenza in un punto di tre rette mentre il teorema di Menelao fornisce un criterio per la collinearità di tre punti cioè per l'appartenenza di questi ad una medesima retta.

Teorema di Stewart

Il teorema di Stewart riguarda la lunghezza di una ceviana in un triangolo. È quindi molto collegato al tema dei punti ceviani: mentre Ceva dice quando tre ceviane sono concorrenti, Stewart permette di calcolare la lunghezza di una singola ceviana



La lunghezza di un segmento ceviano (t)

- Parti in cui viene diviso un lato dallo stesso (X, Y)
- Lati del triangolo

$$a \cdot (t^2 + X \cdot Y) = b^2 X + c^2 Y$$

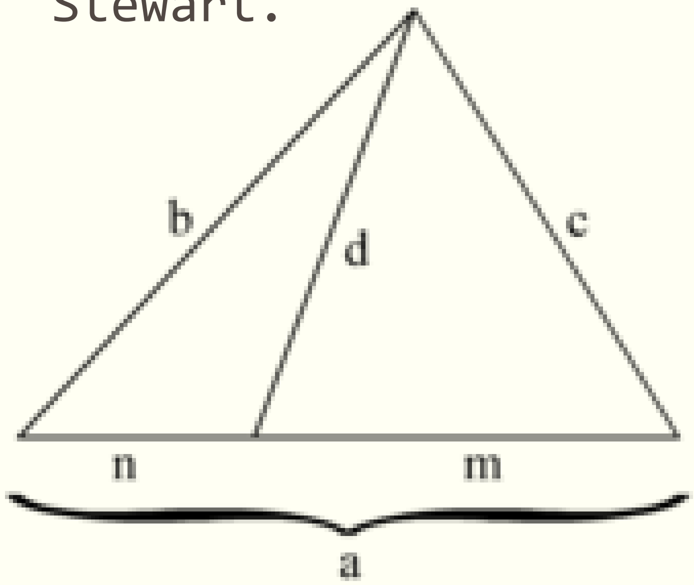
Ceviana

In geometria, una ceviana è genericamente un segmento che congiunge un vertice del triangolo al suo lato opposto, o al suo prolungamento; mentre con retta ceviana si intende per estensione la retta su cui giace.

Particolarmente importanti sono le ceviane concorrenti in un unico punto, detto appunto ceviano – le cui condizioni di sufficienza sono dettate dal teorema di Ceva – designando sui lati opposti anche tre punti che sono i vertici del relativo triangolo ceviano il cui circumcerchio è detto cerchio ceviano.

Ceviana

La lunghezza di una ceviana può essere calcolata con il teorema di Stewart.



Tre ceviane concorrenti individuano un punto ceviano che può essere sia interno che esterno al perimetro del triangolo; nel primo caso anche tutte e tre le ceviane sono interne alla figura, invece quando è esterno solo una rimane interna e lo raggiunge solo se prolungata, mentre le altre due incrociano direttamente il punto e intersecano i prolungamenti dei lati.

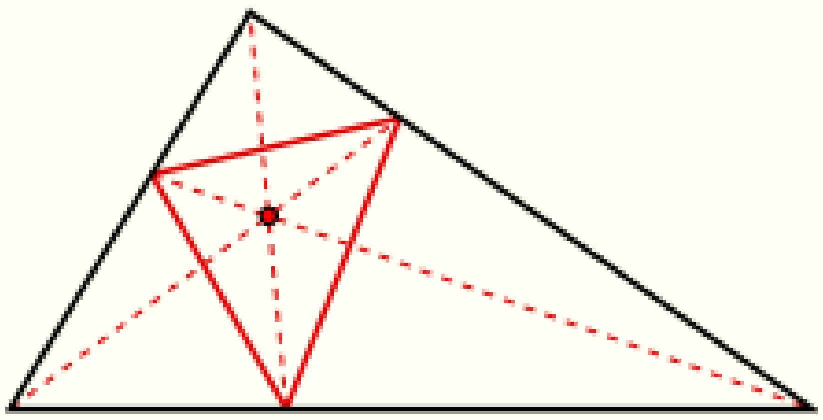
Nella figura, la lunghezza della ceviana d è data dalla formula:

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$$

Triangolo Ceviano

Il triangolo ceviano è un triangolo i cui vertici coincidono con i punti d'incontro fra tre ceviane concorrenti e i lati opposti (o i loro prolungamenti) di uno stesso triangolo di riferimento; pariteticamente il triangolo di riferimento può essere considerato il triangolo anticeviano prendendo invece a riferimento quello ceviano, e avrebbero in comune il medesimo punto ceviano.

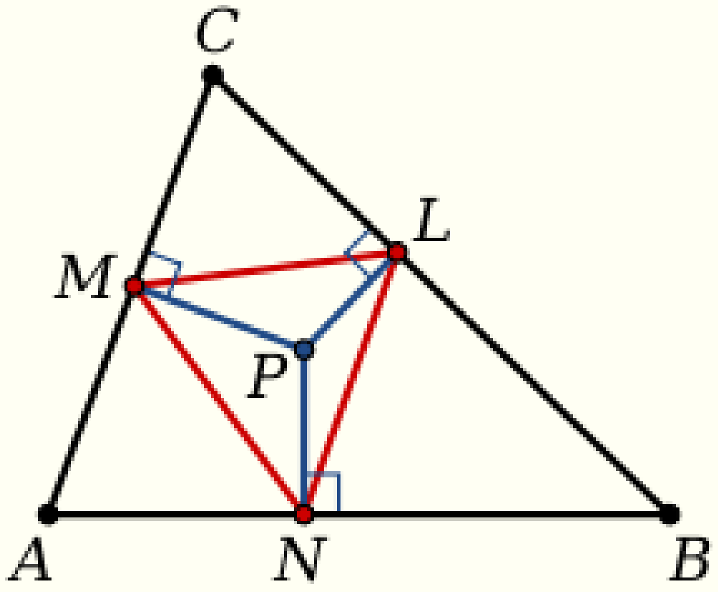
Dato quindi un triangolo di riferimento e uno specifico punto ceviano si può ricavare grazie ad esso sia una specifico triangolo ceviano e uno anticeviano.



Triangolo pedale

Si definisce triangolo pedale di un punto rispetto ad un triangolo, il triangolo individuato dalla proiezione del punto sui lati del triangolo.
Le equazioni che legano le coordinate trilineari p:q:r del punto pedale con le coordinate dei vertici del triangolo pedale sono:

L = 0 : q + p cos C : r + p cos B
M = p + q cos C : 0 : r + q cos A
N = p + r cos B : q + r cos A : 0



Triangolo pedale

Il triangolo pedale dell'incentro corrisponde al triangolo di contatto dell'incerchio.

Il triangolo pedale del circocentro corrisponde al triangolo mediale.

Il triangolo pedale dell'ortocentro corrisponde al triangolo ortico.

Il triangolo pedale del punto di Bevan corrisponde al triangolo di contatto degli excerchi.
Per tutti i punti sulla circonferenza circoscritta il triangolo pedale degenera in un segmento che giace sulla retta di Simson; inoltre nei casi particolari dei tre vertici del triangolo, tale segmento coincide con l'altezza del triangolo.

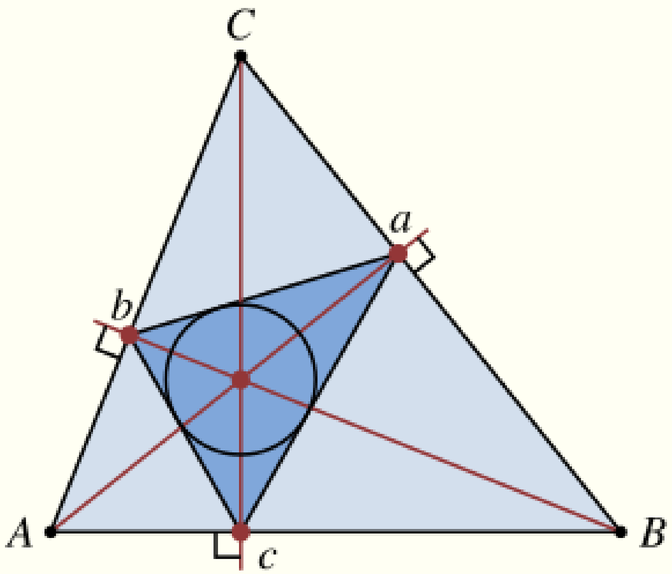
Per tutti i punti interni di un triangolo che non sia ottusangolo il triangolo pedale è interno al triangolo di riferimento.

Triangolo ortico

Si definisce triangolo ortico, dato un triangolo ABC, la figura che si ottiene tracciando i tre segmenti che congiungono a due a due i piedi delle tre altezze del triangolo dato. Il triangolo ortico è pertanto sia il triangolo ceviano che il triangolo pedale dell'ortocentro del triangolo ABC.

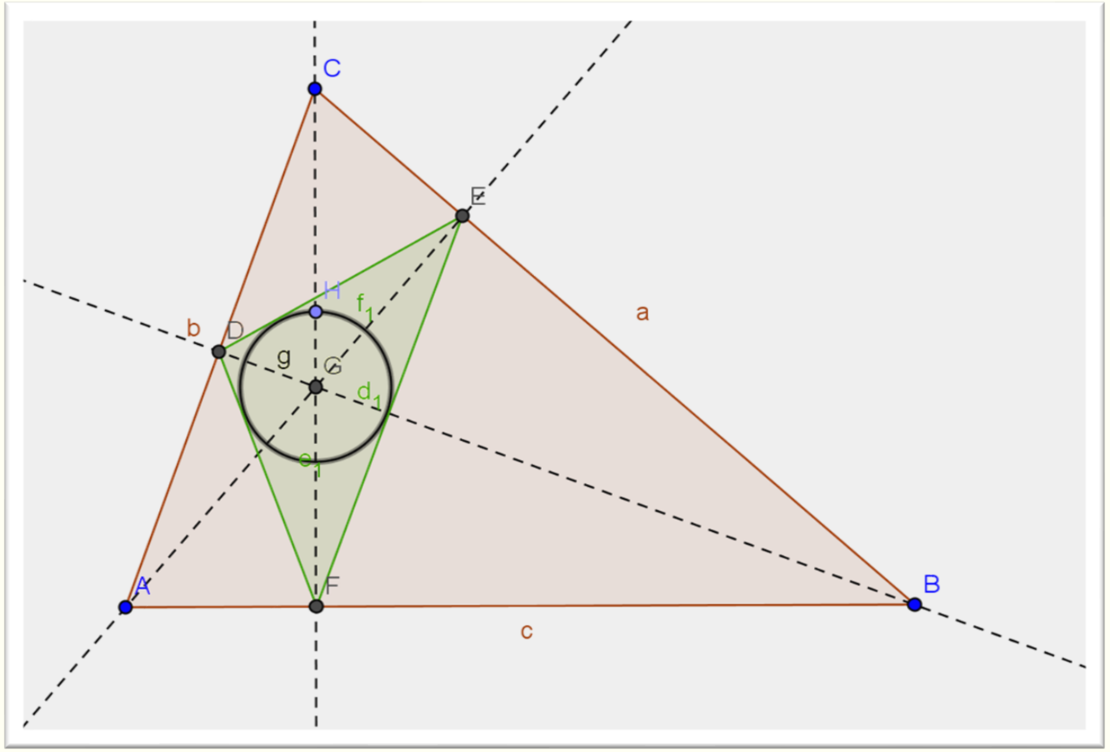
Il triangolo ortico di un triangolo rettangolo si riduce alla sua altezza relativa all'ipotenusa.

Il triangolo ortico di un triangolo T è contenuto interamente in T se e solo se T non è un triangolo ottusangolo: in tal caso i vertici del triangolo ortico che cadono sulle rette che prolungano i lati dell'angolo ottuso sono esterni a T.



Triangoli ortici Teorema 1

Dato triangolo ortico DEF di un triangolo ABC, le altezze del triangolo ABC sono bisettrici interne del triangolo ortico, e dunque **l’ortocentro di ABC** coincide con **l’incentro di DEF**.



Come si costruisce la geometria?

- Se ci si basa sull'ipotesi che gli enti geometrici si formino nella mente umana per astrazione, a partire da osservazioni di oggetti reali e da esperienze su questi, sul piano didattico dobbiamo far precedere l'approccio razionale da un approccio a carattere sperimentale dove gli assiomi trovino le loro radici naturali
- L'approccio razionale non avrebbe ragione di esistere se gli enti di cui si parla non avessero la loro origini e le loro radici profonde nelle esperienze concrete
- Solo dopo la scoperta può cominciare un ripensamento e un lavoro di ricostruzione della teoria a partire dagli elementi più semplici (si pensi al lavoro degli archeologi)

Caratteristica peculiare della geometria

- La specificità della geometria sta nell’intreccio tra aspetti figurali e aspetti concettuali
- La scuola non può e non deve ignorare l’immediatezza della percezione visiva ma deve anche assolvere al non facile compito di strutturare progressivamente le esperienze sensoriali in un quadro di riferimento globale e coerente
- È possibile articolare percorsi per l’apprendimento della geometria basati su più livelli e descrivere il passaggio da un livello all’altro facendo riferimento al quadro teorico sviluppato dai coniugi van Hiele

Il metodo costruttivo nell’insegnamento della geometria

- Il passaggio dal concreto all’astratto è reso più naturale non attraverso osservazioni sull’oggetto ma attraverso operazioni sull’oggetto
- La sistemazione astratta della geometria deve essere preceduta da una serie di indagini che consistono nello sviluppare a poco a poco regolarità e permanenze più generali a partire da regolarità e permanenze che si constatano in situazioni concrete appositamente predisposte dall’insegnante
- Il concreto deve avere il duplice scopo di promuovere capacità di sintesi ed analitiche

I materiali «operativi»

- Caratteristica fondamentale dei materiali per l’insegnamento costruttivo della geometria è la loro trasformabilità per continuità (esempio strisce e fermacampioni per creare poligoni)
- Esempi da E. Castelnuovo
  - disegna un rettangolo avente la base tripla dell’altezza… versus… risolvi il problema utilizzando degli stuzzicadenti (tutti uguali)… se poi cambio i dati (la base sia il doppio, il quadruplo, un terzo… ecc. dell’altezza) la «messa in equazione» nasce spontanea
  - dalla costruzione di triangoli con strisce di cartone alla costruzione con il compasso, alla rigidità del triangolo
  - Il cubo di metallo per le sezioni piane

I concetti di superficie-area e di volume

- Se di un quadrato conosco l’area come posso determinare la lunghezza del lato? Risposta frequente: divido l’area per 4
- Figure che hanno lo stesso perimetro e area diversa e figure che hanno la stessa area e perimetri diversi
- Il Geopiano (Gattengo)
- I rombi di strisce e lo spago per scoprire che l’area non si conserva
- La geometria dinamica… e l’avvio alla dimostrazione