



# LA MATEMATICA GRECA

Prof. Roberto Capone

A.A. 2025/26

Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore



# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

La teoria delle proporzioni costituiva uno strumento in qualche modo sostitutivo della teoria dei numeri reali. Tuttavia la “misurazione” di una figura geometrica (calcolo dell’area, volume, perimetro) non era intesa, come oggi, come assegnazione di un numero reale a tale figura. Per gli antichi greci essa consisteva nel confronto tra le grandezze di figure geometriche. Questo confronto consisteva nel constatare una uguaglianza o una proporzione tra le estensioni di due figure.

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

Definizione intuitiva di “equiscomponibilità”.

Due figure geometriche  $F$  e  $\bar{F}$  si dicono equiscomponibili se è possibile

- Tagliare  $F$  nelle figure  $X_1 \dots X_n$
- Spostare tali figure in modo da ottenere le figure  $\bar{X}_1 \dots \bar{X}_n$
- Ricomporre  $\bar{X}_1 \dots \bar{X}_n$  in modo da ottenere  $\bar{F}$  .

Due figure sono equiscomponibili se sono la  
“somma” di figure uguali.

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

La nozione di “tagliare” può essere rappresentata dalla nozione insiemistica di partizione.

## **Definizione**

Se  $X$  è un insieme chiamiamo partizione finita di  $X$ , una classe finita  $X_1 \dots X_n$  di insiemi non vuoti tali che

- $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$
- per ogni  $i$  e  $j$  con  $i \neq j$ ,  $X_i \cap X_j = \emptyset$ .

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

La nozione “spostare” corrisponde alla nozione di isometria.

## Definizione

Chiamiamo isometria del piano euclideo  $E$  ogni funzione  $i: R^2 \rightarrow R^2$  che conserva le distanze, cioè tale che  $d(x, y) = d(i(x), i(y))$ .

Diciamo che  $i$  sposta un insieme di punti  $A$  nell'insieme di punti  $B$  se  $i(A) = B$ . Due figure geometriche  $A$  e  $B$  si dicono isometriche o uguali se esiste una isometria che sposta  $A$  in  $B$ .

Possiamo ora dare la nozione di equiscomponibilità in modo più preciso.

## Definizione

Due figure geometriche  $F$  e  $F$  si dicono equiscomponibili se ammettono rispettivamente due partizioni  $X_1 \dots X_n$ , e  $\overline{X}_1 \dots \overline{X}_n$ , tali che, per ogni  $i$ ,  $X_i$  è isometrico a  $\overline{X}_i$ .

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

## **Teorema**

Se due figure  $F$  e  $\bar{F}$  sono equiscomponibili allora hanno la stessa misura.

## **Definizione**

Due figure si dicono equicompletabili se aggiungendo ad esse parti a due a due uguali si ottengono figure

## **Proposizione**

Due figure equicompletabili hanno la stessa misura.uguali.

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

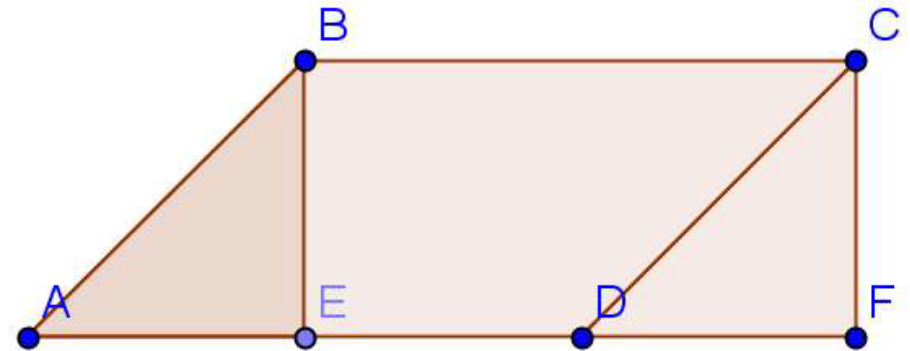
---

## Teorema

Dato un parallelogramma fissiamo un lato come base, allora il parallelogramma è equiscomponibile ad un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza..

Dim.

Consideriamo un parallelogramma  $ABCD$  e supponiamo che la base  $AD$  sia il lato maggiore. Riferendoci alla figura disegnata, proiettiamo i punti  $B$  e  $C$  sulla retta  $AD$  ottenendo i punti  $E$  ed  $F$ , rispettivamente. Essendo  $AE$  minore di  $AB$  sarà anche minore di  $AD$  e quindi  $AE$  è interno al parallelogramma. I due triangoli  $ABE$  e  $DCF$  sono uguali. Per ottenere la decomposizione cercata basta allora tagliare il triangolo  $ABE$  e traslarlo nella posizione  $DCF$ . Si ottiene in tale modo il rettangolo  $EBCF$  avente la stessa base e la stessa altezza del parallelogramma.

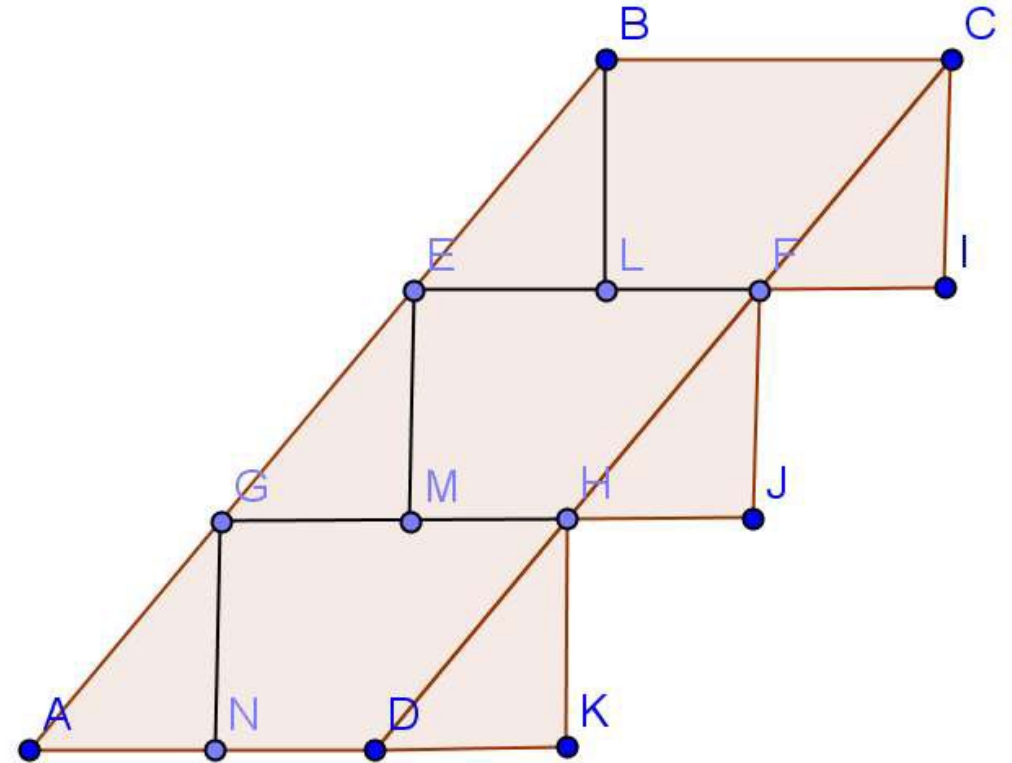


# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

Nel caso in cui AD sia il lato minore, basta tagliare il parallelogramma in  $n$  strisce parallele ad AD con un lato uguale ad AD e l'altro minore di AD. Ciascuno di tali parallelogrammi rientra nel caso che abbiamo già affrontato e quindi può essere ridotto ad un rettangolo di base AD. Sovrapponendo i rettangoli così ottenuti otteniamo il rettangolo cercato.

Questo teorema corrisponde alla ben nota regola:  
*L'area del parallelogramma è uguale alla base per l'altezza.*



# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

## Teorema

Ogni triangolo è equiscomponibile ad un rettangolo di uguale base e metà altezza (qualunque sia il lato scelto come base).

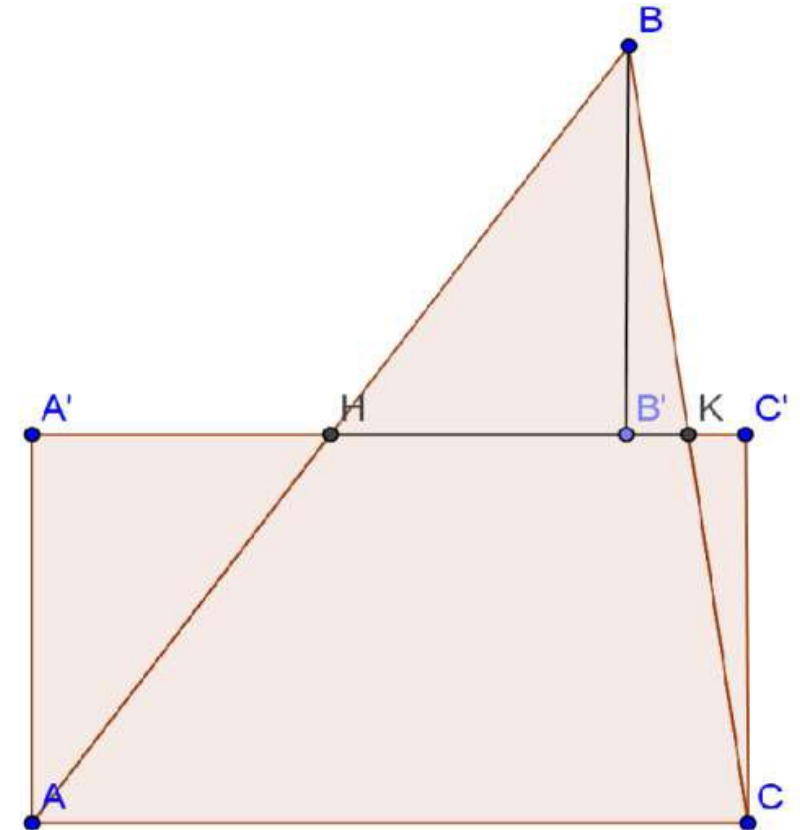
Dim. Dato un triangolo di vertici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  fissiamo come base il segmento  $AC$  e supponiamo che i due angoli in  $A$  e  $C$  siano acuti.

Procediamo poi al modo seguente:

1. costruiamo il punto di mezzo  $H$  del lato  $AB$
2. costruiamo il punto di mezzo  $K$  del lato  $BC$
3. tracciamo il rettangolo  $A'C'AC$ ,
4. tracciamo l'altezza  $BB'$  del triangolo  $HBK$ .

Stante l'ipotesi sugli angoli tale altezza è interna al triangolo.

L'equiscomponibilità tra il triangolo  $ABC$  ed il rettangolo  $A'C'AC$  segue dal fatto che tali figure hanno il quadrilatero  $AHKC$  in comune, il triangolo  $HBB'$  è uguale a  $AA'H$  ed il triangolo  $B'BK$  è uguale a  $KC'C$ .

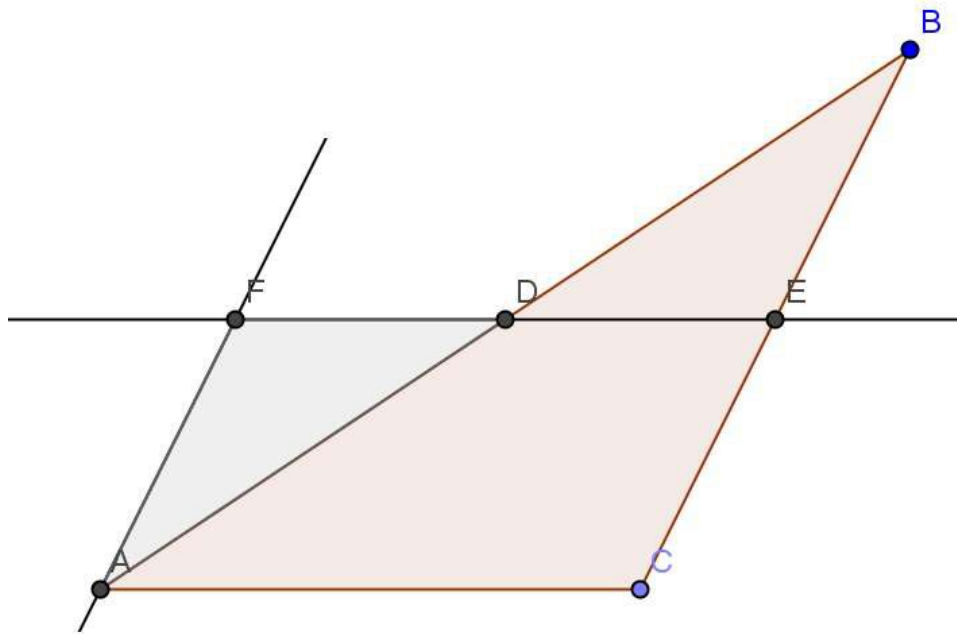


# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

---

Tuttavia tale procedimento non può essere applicato nel caso in cui uno degli angoli in A ed in C sia ottuso.



Invece la seguente procedura funziona in tutti i casi.

1. Si costruisce il parallelogramma AFEC tracciando la retta per i punti medi D ed E dei lati AB e CB e poi la parallela per A alla retta CB. Poiché il triangolo ADF risulta essere uguale al triangolo DEB, tale parallelogramma risulta essere equiscomponibile al triangolo ABC.
2. Si trasforma tale parallelogramma in un rettangolo in accordo con la procedura del teorema precedente.

Il teorema ora dimostrato corrisponde alla ben nota regola:  
*L'area del triangolo è uguale alla base per l'altezza diviso due.*

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

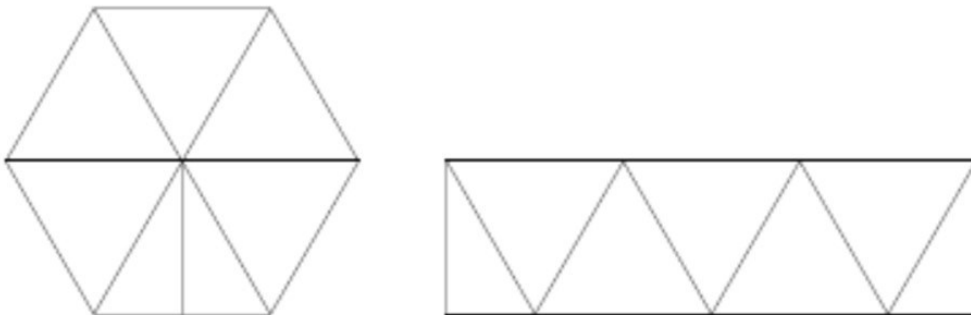
---

## Teorema

Un poligono regolare è equiscomponibile ad un rettangolo che ha come base la metà del perimetro e come altezza l'apotema.

Dim.

Riferendoci ad esempio ad un esagono, è sufficiente considerare la seguente figura in cui si mostra che l'esagono si può scomporre in 7 triangoli che ricomposti formano un rettangolo.



Attualmente questo teorema si esprime dicendo che:

- l'area di un poligono regolare è uguale al perimetro per l'apotema diviso due.

# Misura, equiscomponibilità, equicompletabilità

---

---

## Proposizione

L'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza, cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva.

## Teorema

Siano  $Q_1$  e  $Q_2$  due figure poligonali, allora le seguenti asserzioni sono equivalenti.

- i)  $Q_1$  e  $Q_2$  sono equicompletabili.
- ii)  $Q_1$  e  $Q_2$  sono equiscomponibili.
- iii)  $Q_1$  e  $Q_2$  hanno la stessa area.

**Dim.** Dobbiamo provare solo l'equivalenza tra i) e ii). Ora se  $Q_1$  e  $Q_2$  sono equicompletabili hanno la stessa area e quindi, poiché due figure poligonali che sono di uguale misura sono equiscomponibili, sono equiscomponibili. Se  $Q_1$  e  $Q_2$  sono equiscomponibili, detto  $Q$  un quadrato che le contiene entrambe risulta che  $Q-Q_1$  e  $Q-Q_2$  sono di uguale estensione e quindi equiscomponibili. Pertanto  $Q_1$  e  $Q_2$  sono equicompletabili.