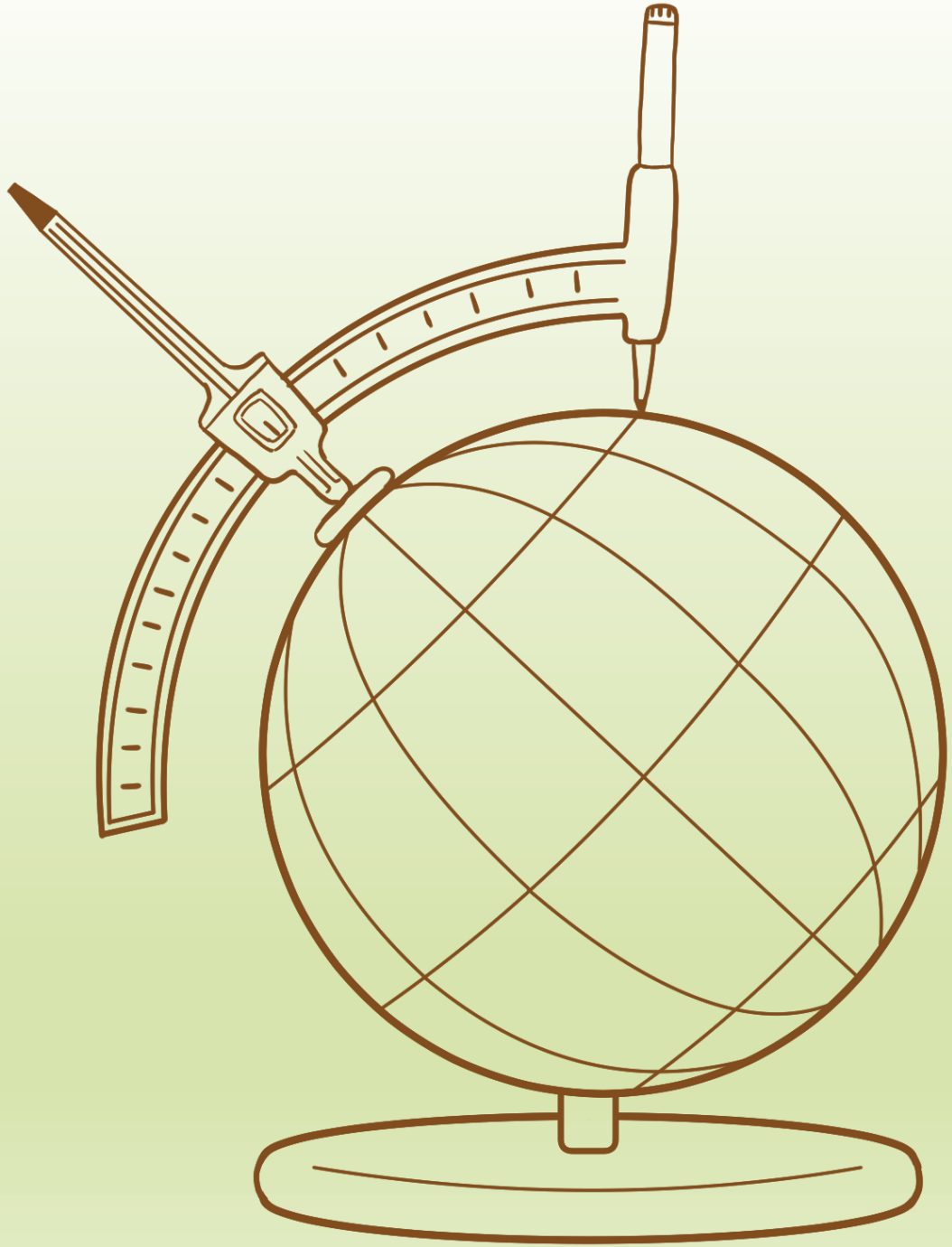
GEOMETRIA SFERICA

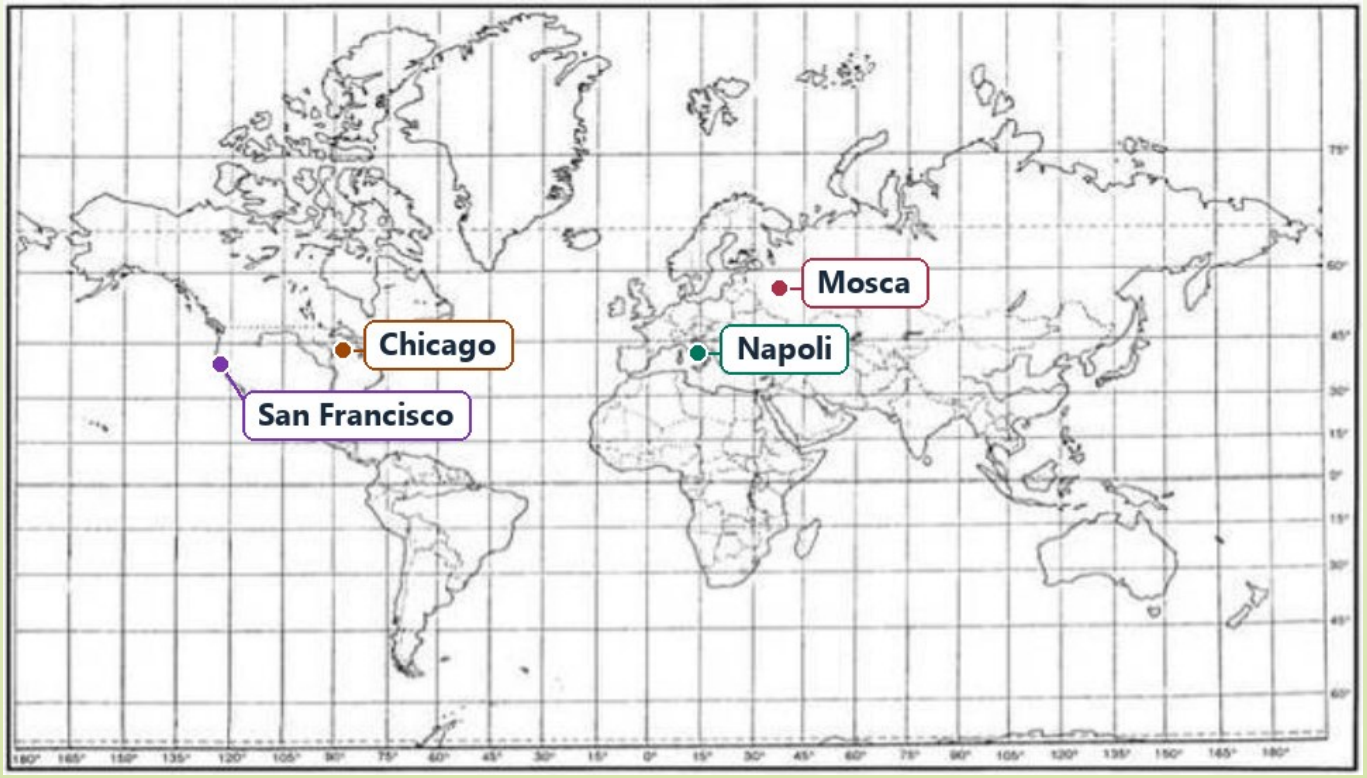
di Alessia Abruzzese

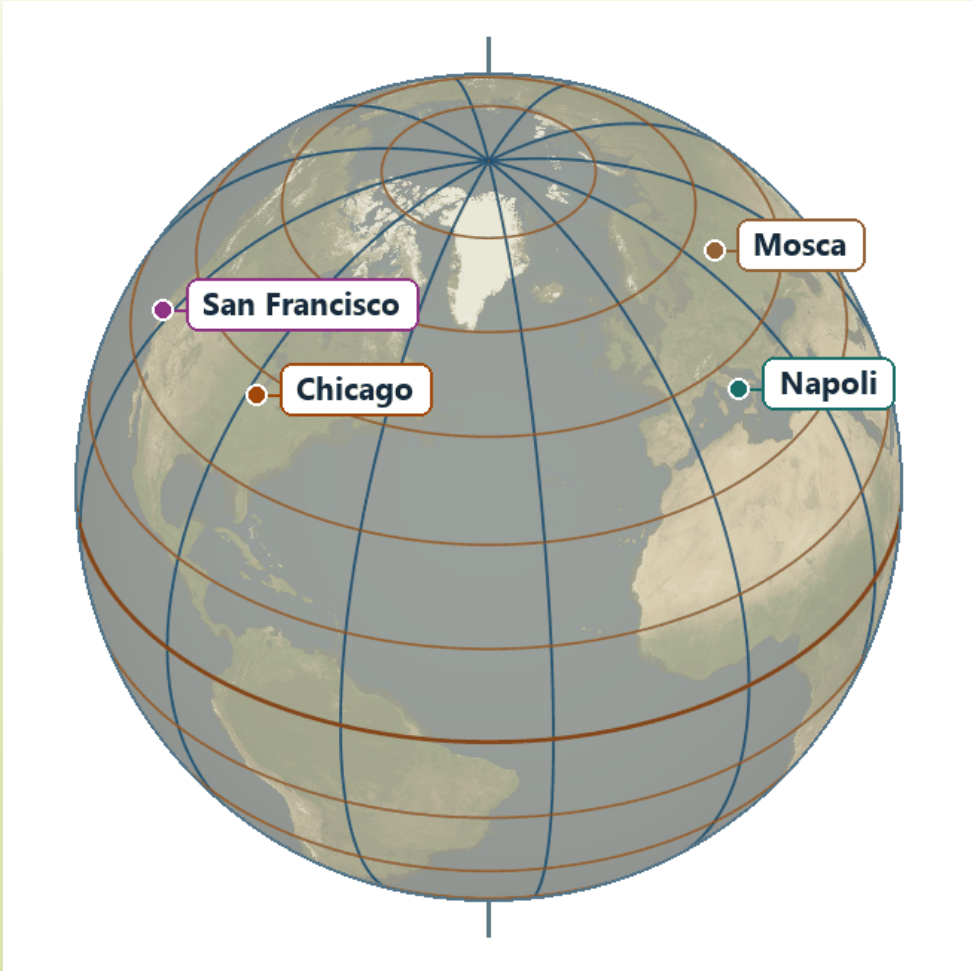
Un approfondimento sulle geometrie non euclidee, con particolare attenzione alla geometria sferica, arricchito da attività didattiche realizzabili tramite l'uso dei kit della sfera di Lènart.



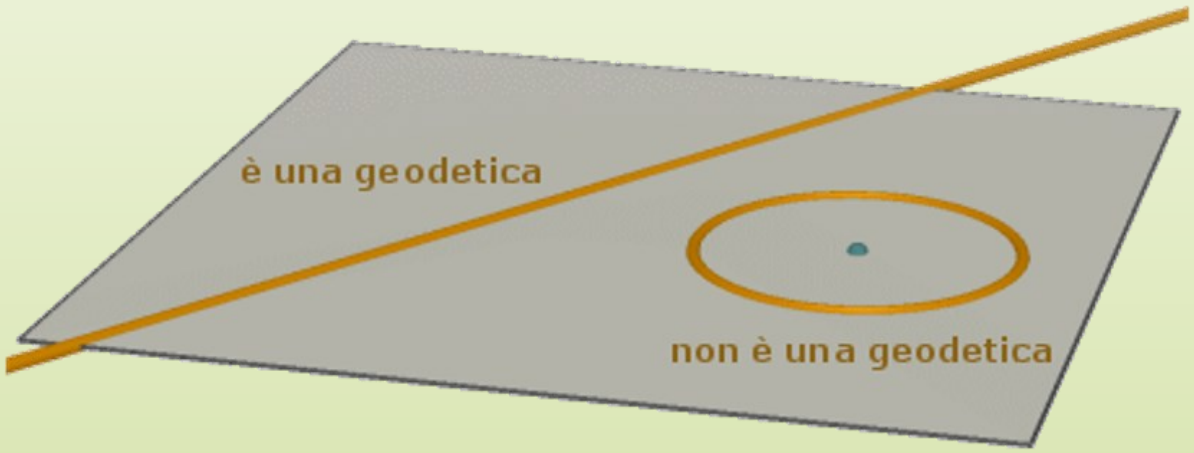
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

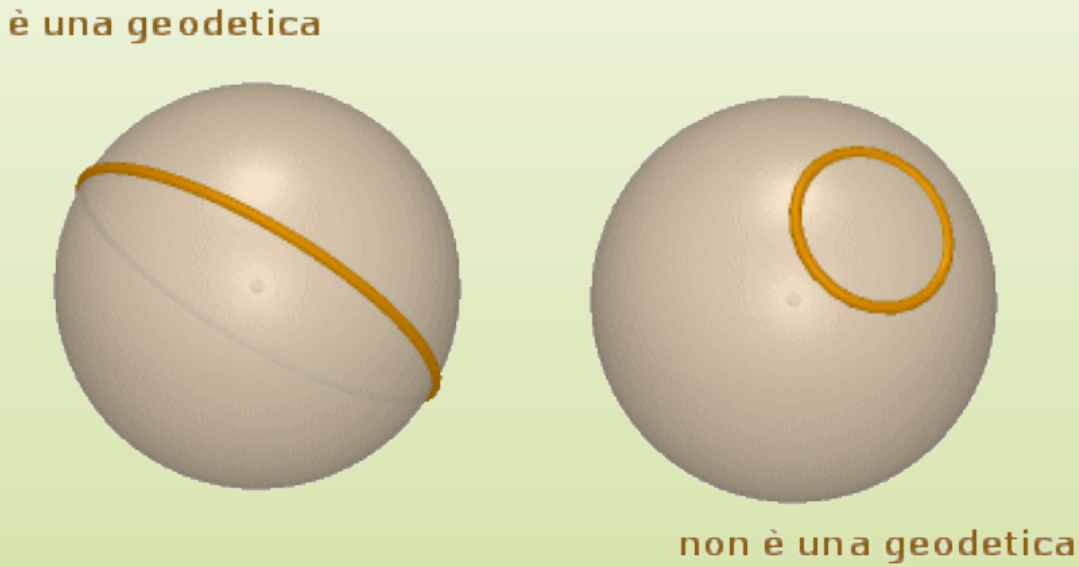
Le rotte aeree





La geodetica del piano e della superficie sferica



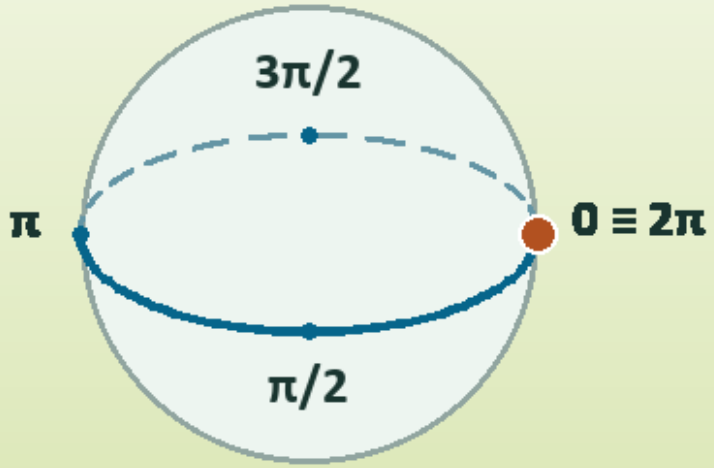


La geodetica della superficie sferica è la **circonferenza massima.**

È un ente primitivo, corrispettivo di retta per la geometria euclidea.

ASSIOMA 1: una sfera ed una circonferenza massima contengono almeno due punti.

ASSIOMA 2: esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti di ogni circonferenza massima e R modulo 2π.



$$\gamma : C \to \mathbb{R} \bmod 2\pi$$

A ogni punto associamo la lunghezza d'arco orientata, modulo 2π.

Sulla sfera unitaria, un giro completo misura 2π.

Proprietà della sfera e delle sue geodetiche

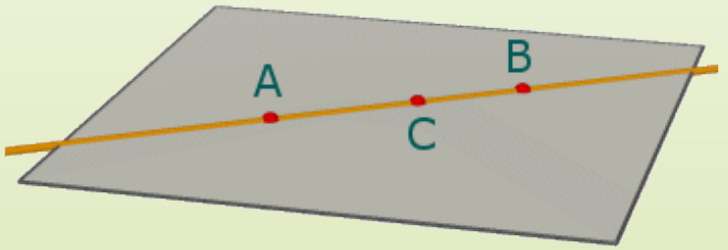
PROPRIETÀ 1: per ogni punto sulla sfera, esiste una circonferenza massima che lo contiene.

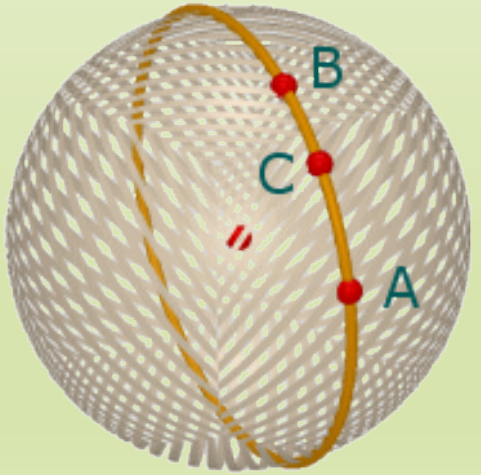
Sia S^2 la nostra sfera e supponiamo, per comodità, che la nostra sfera sia di raggio unitario.

PROPRIETÀ 2: le rette di S^2 hanno tutte la stessa lunghezza finita 2π.

PROPRIETÀ 3: S^2 ha area finita 4π.

PROPRIETÀ 4: di tre punti qualsiasi di una circonferenza massima, non è vero che uno e uno solo sta fra gli altri due.





Le geodetiche sulla sfera sono enti **chiusi** e **limitati**.

PASSO 1 Traccia sulla sfera di Lénárt due qualsiasi circonferenze massime distinte.

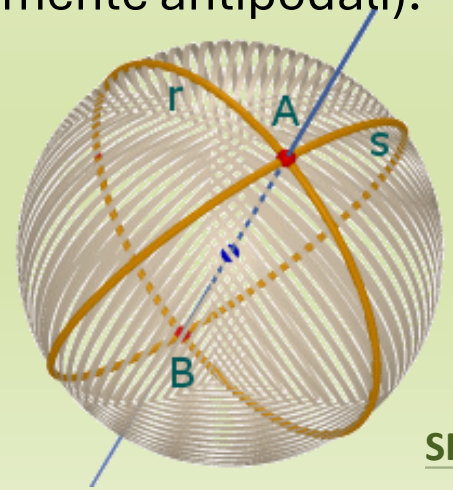
QUANTI PUNTI DI INTERSEZIONE INDIVIDUI?

Che cosa osservi rispetto alla loro posizione?

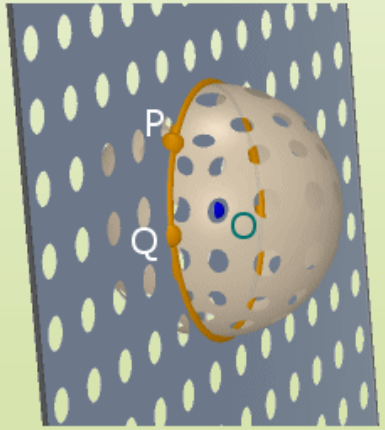
Due circonferenze massime distinte si incontrano in almeno due punti, detti **antipodali.**

Due punti su una sfera sono detti **antipodali** se esiste un cerchio massimo che li contiene, la cui corrispondenza biunivoca con R modulo 2π li associa a due punti che differiscono di π.

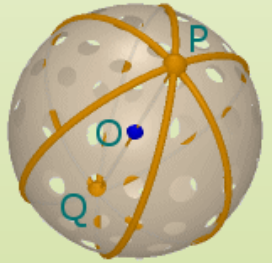
- **ASSIOMA 3**: ogni punto ammette al più un antipodale.
- **PROPRIETÀ 5**: due rette di S^2 hanno sempre due punti in comune. (Nella figura A e B sono necessariamente antipodali).



- **PROPRIETÀ 6**: per due punti del piano euclideo passa una e una sola retta; lo stesso accade per due punti non antipodali di S^2, **ma per due punti antipodali passano infinite rette**.



Per P e Q non antipodali passa una e una sola circonferenza massima



Per P e Q antipodali passano infinite circonferenze massime (qui ne vedi tre)

SPUNTO DI RIFLESSIONE: Il secondo e il quinto postulato di Euclide valgono ancora sulla sfera?

COSTRUZIONE

Traccia ora una terza circonferenza massima.

Riesci a individuare una figura analoga a un triangolo euclideo? □ SÌ □ NO

DEFINIZIONE

Nel piano euclideo, un triangolo è individuato da tre punti non allineati, collegati a due a due da segmenti, detti lati.

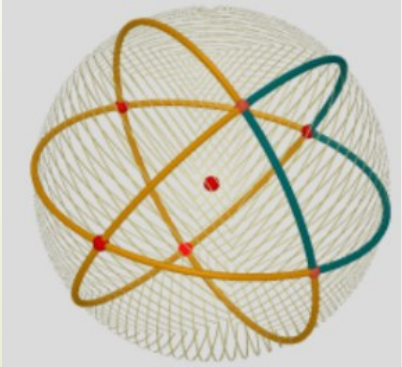
Sulla base dell'esplorazione effettuata, come definiresti un triangolo sferico? Quali analogie e differenze individui rispetto alla definizione euclidea?

CONFRONTO CON IL PIANO

Nel piano euclideo, tre rette che si intersecano a due a due in tre punti distinti individuano un unico triangolo.

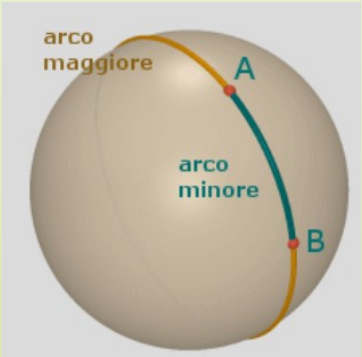
Che cosa accade, invece, considerando tre circonferenze massime sulla sfera?

Nel piano euclideo tre rette non passanti per uno stesso punto e tali da intersecarsi a due a due, individuano uno e un solo triangolo. Cosa si può dire per tre circonferenze massime sulla sfera?



Tre circonferenze massime sulla sfera non passanti per uno stesso punto individuano otto triangoli sferici (a due a due antipodali). Nella figura a destra è stato evidenziato in verde uno degli otto triangoli.

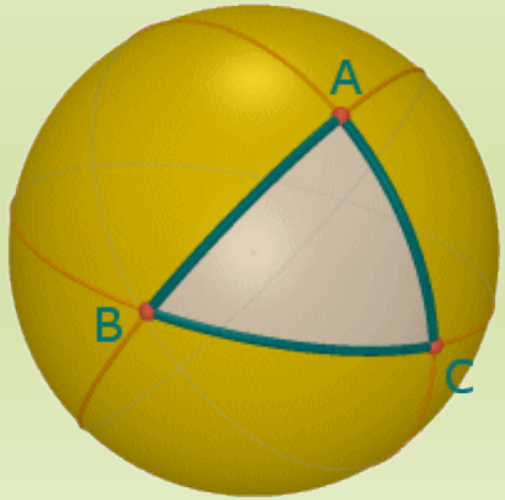
RIFLESSIONI:
Quando passiamo alla sfera, è necessario precisare alcune osservazioni:



In primo luogo, è utile osservare che due punti non antipodali possono essere collegati con due diversi segmenti (un arco minore e un arco maggiore di circonferenza massima, come si vede nella figura a sinistra).

Stabiliamo allora di considerare solo archi minori.

C'è poi da osservare che tre archi minori non disposti (a due a due) sulla stessa circonferenza massima e aventi a coppie un estremo in comune, delimitano due regioni sulla sfera.



Assumiamo che il triangolo sferico sia proprio quella regione, delle due, che ha area minore.

SCHEDA 3

Traccia l'**equatore** sulla sfera di Lénart a tua disposizione utilizzando un pennarello lavabile e chiamalo ***s***; individua uno dei **poli** rispetto all'equatore *s* e denotalo con **A**.

Costruisci un **triangolo sferico ABC** in modo che:

- il vertice A sia polo rispetto ad s;
- la base BC giace sull'equatore *s;*
- gli archi sferici AB e AC cadono perpendicolarmente sull'equatore *s*.



Suggerimento: usa il goniometro sferico per misurare l'ampiezza di un angolo:
Quanto vale la **somma degli angoli interni del triangolo ABC**? .....°

Ora, muovi il punto C lungo l'equatore *s,* in modo da allungare il lato BC; costruisci un nuovo triangolo sferico di vertici A, B e C.

Dopo aver modificato la posizione di C, qual è ora la **somma degli angoli interni del nuovo triangolo ABC**? .....°

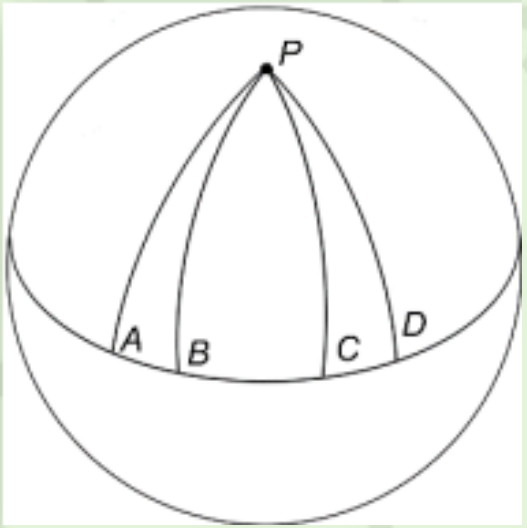
LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO SFERICO E' COSTANTE? ☐ SÌ ☐ NO

In caso di risposta negativa, prova a giustificare il motivo della tua scelta.

ATTIVITÀ

SCHEDA 3

Esegui la seguente costruzione sulla sfera di Lénart utilizzando il materiale presente all'inte



PASSO 1: Traccia l'equatore utilizzando un pennarello lavabile.

PASSO 2: Individua uno dei poli rispetto all'equatore *s* e denotalo con P.

PASSO 3: Disegna una perpendicolare all'equatore passante per P.

PASSO 4: Disegna altre tre perpendicolari. Chiama i punti di intersezione con l'equatore A, B, C e D, come mostrato in figura.

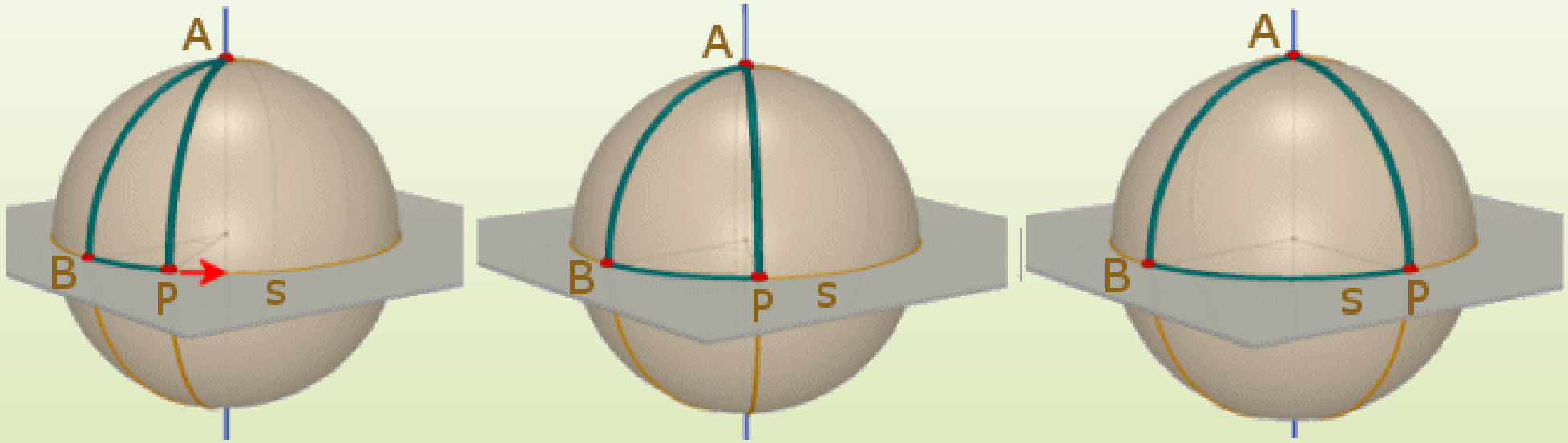
PASSO 5: Individua i **triangoli sferici PAB, PAC, PAD** e misura gli angoli interni di ciascun triangolo utilizzando il goniometro sferico. Annota le misure su un foglio.

QUALE ELEMENTO O QUALI FATTORI INFLUENZANO LA MISURA DELLA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO SFERICO?

Indica, se esistono, il valore minimo e massimo che può assumere la somma degli angoli interni di un triangolo sferico.

Motiva la tua risposta e/o rappresenta la situazione con un disegno.

ATTIVITÀ

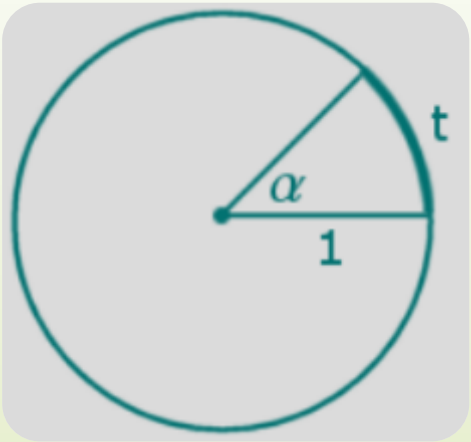


Si direbbe che la somma degli angoli vari al variare **dell'area del triangolo**: tanto maggiore è l'area tanto maggiore è la somma angolare, tanto più l'area si avvicina a zero tanto più la somma angolare si avvicina a 180°.

Misura degli angoli in radianti

•Circonferenza di **raggio unitario**.

•Ad ogni **angolo al centro** α corrisponde un **arco di lunghezza** t.



•**Proporzionalità diretta**:
- •Raddoppia l'angolo → raddoppia l'arco.
- •Triplica l'angolo → triplica l'arco, e così via.

•**Misura in radianti**: lunghezza dell'arco corrispondente.

•**Esempio**:
- Angolo di **90°** → Arco di **lunghezza** $\frac{\pi}{2}$.
- Quindi: **90°** = $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Formule di conversione

In generale possiamo scrivere la proporzione

$$\alpha : 360 = t : 2\pi$$

- α è la misura in gradi dell'angolo;
- t la lunghezza dell'arco corrispondente (quindi t è la misura in radianti dell'angolo).

Ne segue

Da gradi a radianti: $t = \frac{\pi\alpha}{180}$

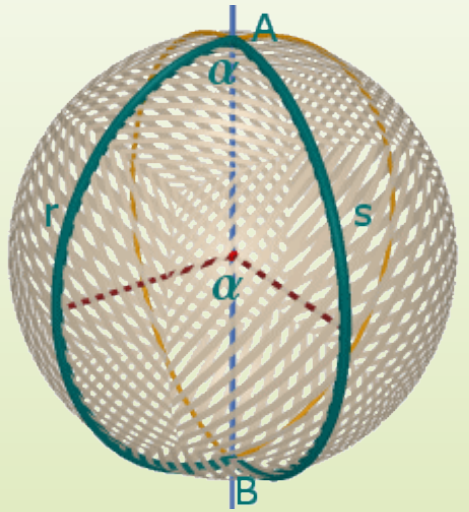
Da radianti a gradi: $\alpha = \frac{180t}{\pi}$

(link: https://www.geogebra.org/m/QR3WMrmG).

Area di un fuso sferico

•È la regione della superficie sferica compresa tra due semicirconferenze massime. Nella figura a fianco è evidenziato in verde un fuso sferico:

r ed s = due circonferenze massime
α= angolo del fuso



L'area di un fuso è direttamente proporzionale all'angolo del fuso, secondo la proporzione

$$\alpha : \pi = A : 2\pi$$

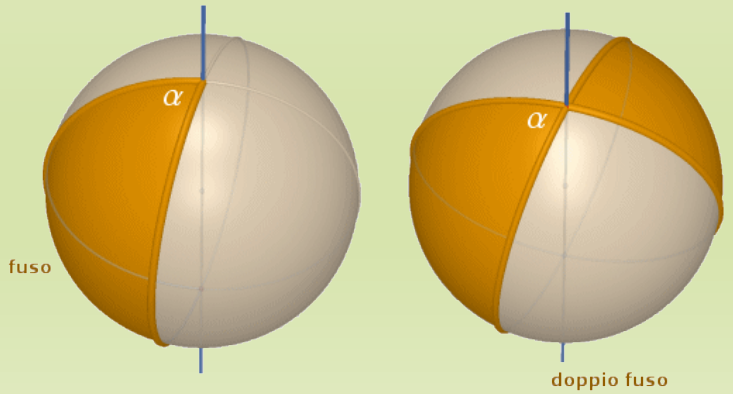
dove

- α è l'angolo del fuso espresso in radianti
- π è l'angolo piatto espresso in radianti
- A è l'area del fuso
- 2π è l'area della superficie della semisfera (raggio= 1).

Ne segue

$$A = 2\alpha.$$

Se consideriamo due fusi speculari: $A = 4\alpha$.



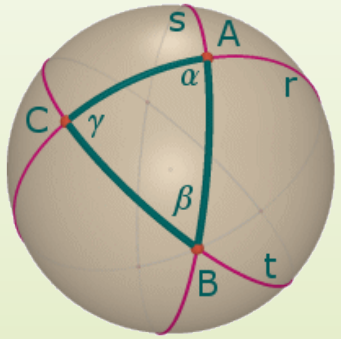
Esempio:

•Un fuso di angolo $\frac{\pi}{2}$ ha area π .

•Costituisce **1/4 della superficie sferica**.

Somma degli angoli di un triangolo sferico

Consideriamo un triangolo sferico ABC su una sfera di raggio unitario.



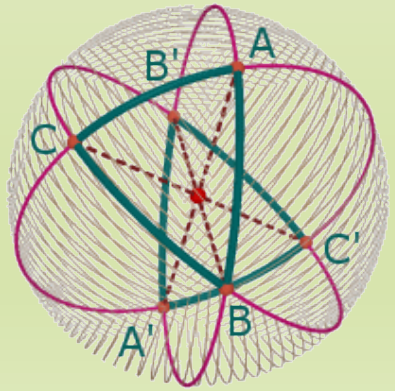
- Angoli: α, β e γ.
- Somma degli angoli: $S = \alpha + \beta + \gamma$ *(non costante)*

Quale elemento o quali elementi influenzano questa misura? **L'area del triangolo.**

Relazione tra area e somma degli angoli

Osserviamo che:

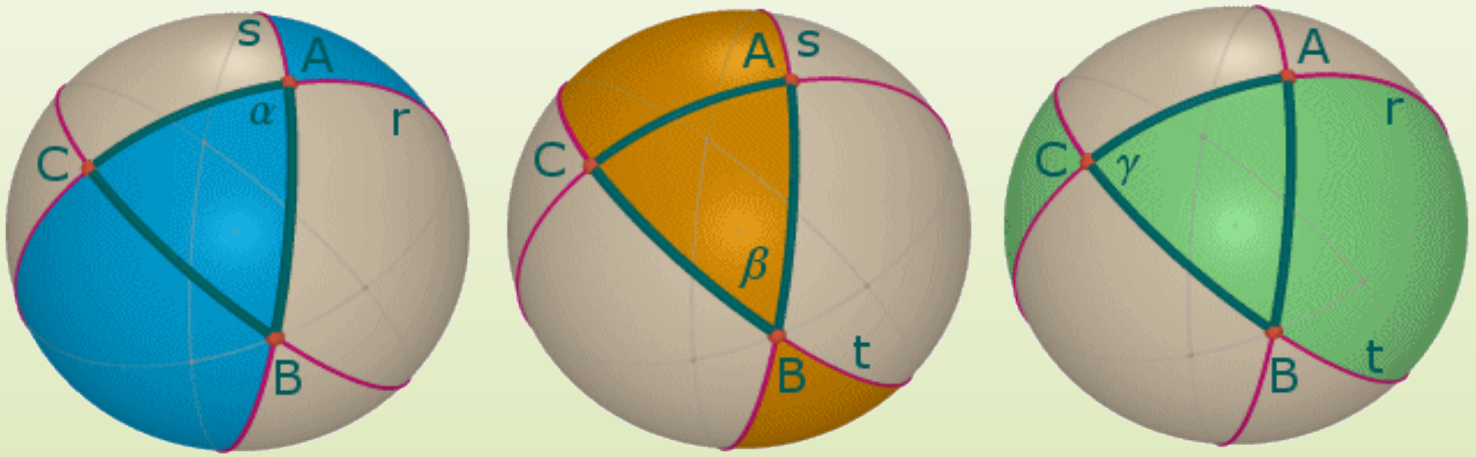
- Al triangolo **ABC** corrisponde un triangolo antipodale **A'B'C'** inversamente uguale al primo;
- link: https://www.geogebra.org/m/vpFWyz4M;
- ABC e A'B'C' hanno lati e angoli corrispondenti uguali **α, β e γ** ;
- ABC e A'B'C' hanno la stessa area che denotiamo con **A**;



FORMALIZZAZIONE

Allora

•I tre doppi fusi determinati da *r, s* e *t* hanno angoli α, β e γ;



OSSERVAZIONI:

- Coprono tutta la superficie sferica;
- I due triangoli ABC e A'B'C' vengono ricoperti tre volte ciascuno: il triangolo ABC viene ricoperto successivamente in azzurro, arancione e verde e lo stesso accade per il triangolo antipodale.

Caso r=1:

Possiamo scrivere: *Area sfera = Area dei tre doppi fusi – 2 Area* ABC *– 2 Area* A'B'C'

Sostituendo: $4\pi = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 2A - 2A$, *dove* A = *area* ABC = *area* $A'B'C'$;

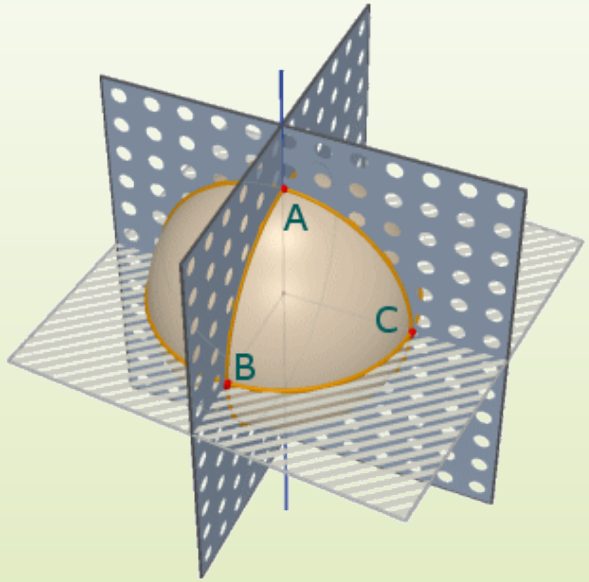
Dividendo per 4: $\pi = (\alpha + \beta + \gamma) - A$ $\qquad\qquad$ $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$

Si ha dunque il seguente fondamentale teorema

Teorema: *Assumendo una sfera unitaria e la misura degli angoli in radianti, la somma degli angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di un angolo piatto ed è uguale a un angolo piatto più l'area del triangolo.*

Corollario: *Assumendo una sfera unitaria, l'area di un triangolo sferico è uguale alla somma dei suoi angoli (misurati in radianti) meno π.*

$$A = (\alpha+\beta+\gamma) - \pi.$$



Applicazione: triangolo trirettangolo equilatero

$$Area = \frac{1}{8}\ dell'area\ della\ sfera = \frac{\pi}{2}$$

Applicando il corollario si ha: $A = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$

Caso *r* generico:

Basta osservare che:

- l'area di una sfera di raggio *r* è $4\pi r^2$;

l'area di un doppio fuso sferico di angolo α diventa $4\alpha r^2$.

area superficie sferica =area dei tre doppi fusi- 2 volte area triangolo ABC- 2 volte area triangolo A'B'C'

diventa

$$4\pi r^2 = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4A \longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$$

Il termine $\frac{A}{r^2}$ prende il nome di ***eccesso sferico*** del triangolo e si indica con **E**; esso ci dice di quanto la somma degli angoli supera π.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO